

PROBLEME D'ECOULEMENT DE PUISSANCE

1 Définition du problème

Dans les réseaux d'énergie électrique, plusieurs problèmes de planification doivent être étudiés et résolus pour un fonctionnement satisfaisant, fiable et de qualité. L'un des problèmes importants étudiés, aussi bien dans la planification (pour d'éventuelles extensions du réseau) que pendant le fonctionnement, est celui du calcul d'écoulement de puissance ou de charge (en anglais : power flow ou load flow).

Le calcul d'écoulement de puissance (ou encore répartition des puissances ou de charge) consiste à déterminer l'ensemble des transits de puissances et des tensions dans le réseau pour un cas de charge donné. Il est défini par un ensemble d'équations qui sont dérivées des lois de Kirchhoff et appliquées aux nœuds du réseau. En plus, des contraintes sur le fonctionnement du réseau sont prises en considération. Le problème est de type non-linéaire car la puissance est le produit de la tension et du courant. On suppose un régime établi et sinusoïdal (donc équations algébriques et non différentielles) dont les conditions de fonctionnement doivent être fixées pour chaque étude.

2 Equations d'écoulement de puissance

Soit la représentation de la Fig. 1 ci-dessous pour un réseau électrique à n nœuds.

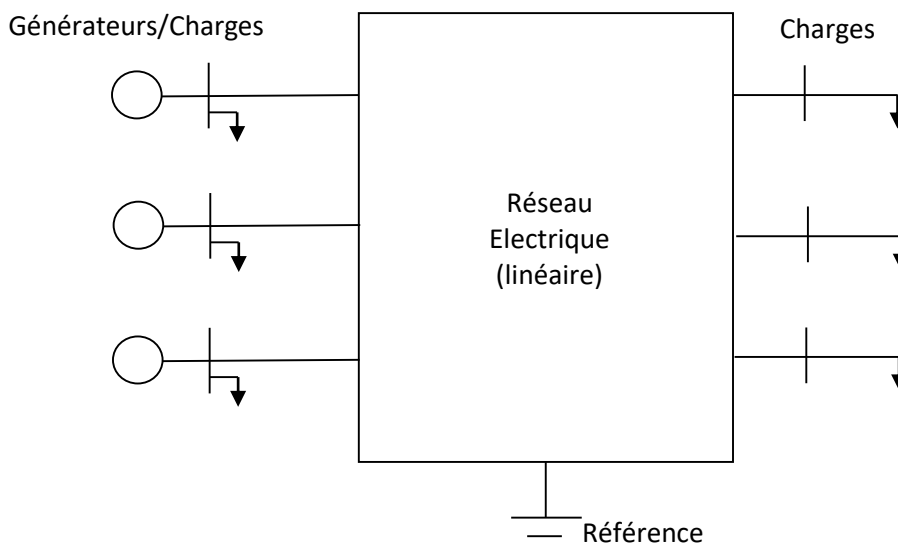


Fig. 1 : Représentation schématique d'un réseau électrique

Un nœud ou jeu de barres est un point dans le réseau électrique où la puissance apparente est soit consommée par une charge ou soit délivrée par un générateur connecté à ce nœud. Les nœuds relient les lignes et forment donc les sources et les charges du réseau électrique.

En effet, en plus des lignes et des transformateurs, les éléments possibles reliés à un nœud i sont les générateurs, les charges et les éléments shunts.

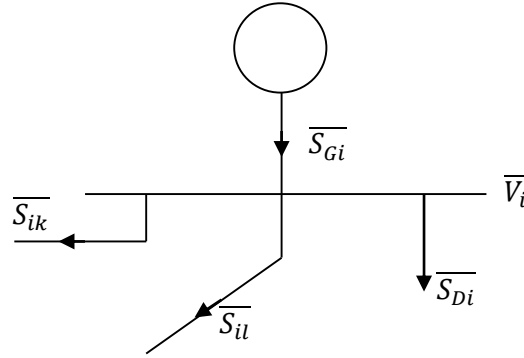


Fig. 2 : Un nœud i du réseau connecté à d'autres nœuds k et l

Pour ce nœud, nous pouvons définir la puissance injectée :

$$\bar{S}_i = \bar{S}_{Gi} - \bar{S}_{Di} \tag{1}$$

où S_{Gi} es la puissance générée au nœud i et S_{Di} la puissance consommée ou demandée au nœud i .

La loi de conservation de puissance donne :

$$\bar{S}_i = \sum_{j=1}^n \bar{S}_{ij} \quad i = 1,2, \dots, n \tag{2}$$

où S_{ij} est la puissance qui circule dans la ligne ij reliant les nœuds i et j .

Le courant injecté au nœud i (Fig. 3):

$$I_i = I_{Gi} - I_{Di} = \sum_{j=0}^n I_{ij} \quad i = 1,2, \dots, n \tag{3}$$

avec :

$$I_{ij} = y_{ij}(V_i - V_j) \tag{4}$$

et $V_j = 0$ pour $j = 0$ (nœud de référence).

D'où :

$$I_i = \sum_{j=0}^n y_{ij}(V_i - V_j) = V_i \sum_{j=0}^n y_{ij} - \sum_{j=1, i \neq j}^n y_{ij} V_j \tag{5}$$

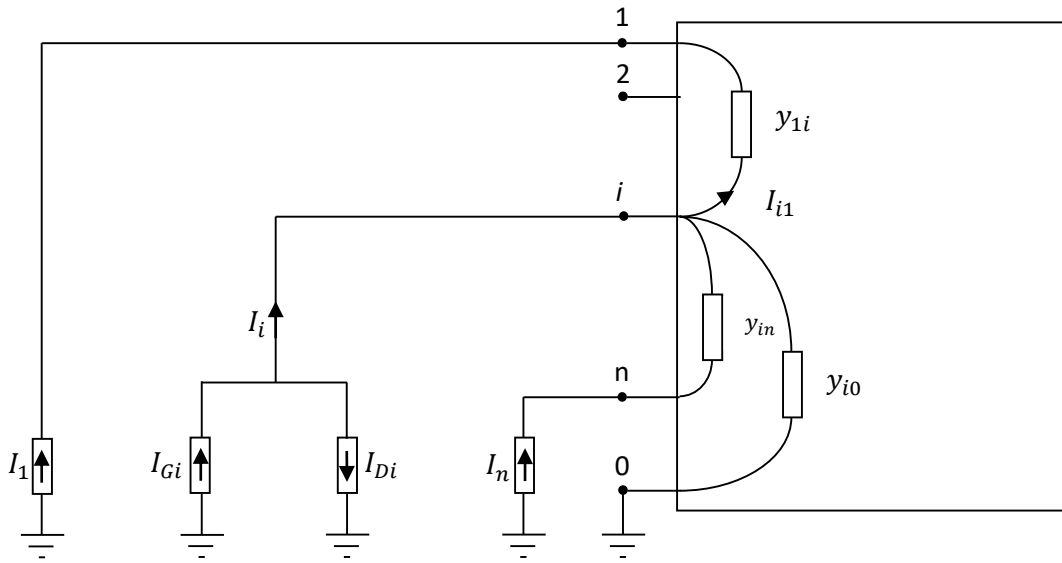


Fig. 3 : Représentation du réseau électrique avec courants injectés et admittances

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_i \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^n y_{1j} & -y_{12} & \dots & \dots & -y_{1n} \\ -y_{21} & \sum_{j=0}^n y_{2j} & \dots & \dots & -y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -y_{i1} & -y_{i2} & \dots & \sum_{j=0}^n y_{ij} & \dots & -y_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_{n1} & -y_{n2} & \dots & \dots & \dots & \sum_{j=0}^n y_{nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \tag{6}$$

Sous forme compacte :

$$[I] = [Y_{bus}][V] \tag{7}$$

Y_{bus} est la matrice admittance nodale. Pour simplifier la notation, elle sera notée tout simplement Y .

$[Y_{bus}]$ est dite aussi matrice admittance de court-circuit. Ses éléments se calculent par :

$$\begin{cases} Y_{ij} = -y_{ij} & i \neq j \\ Y_{ii} = \sum_{j=0}^n y_{ij} \end{cases} \tag{8}$$

La puissance complexe injectée au nœud i s'écrit:

$$\bar{S}_i = \bar{V}_i \bar{I}_i^* = \bar{V}_i \left(\sum_{j=1}^n Y_{ij} \bar{V}_j \right)^* = \bar{V}_i \sum_{j=1}^n Y_{ij}^* \bar{V}_j^* \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

On peut avoir plusieurs formulations du fait qu'on peut écrire les éléments complexes de Y ou encore les tensions et les courants complexes en coordonnées cartésiennes ou polaires.

En écrivant les tensions sous la forme

$$\bar{V}_i = V_i e^{j\delta_i} \quad \text{et} \quad \bar{V}_j = V_j e^{j\delta_j}$$

En exprimant l'élément (i, j) de la matrice Y par

$$Y_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$$

et en notant: $\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$

On obtient :

$$\begin{aligned} \bar{S}_i &= P_i + jQ_i = \sum_{j=1}^n V_i V_j e^{j\delta_{ij}} (G_{ij} - jB_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^n V_i V_j (\cos\delta_{ij} + j\sin\delta_{ij})(G_{ij} - jB_{ij}) \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (10)$$

Les puissances active et réactive injectées aux nœuds s'écrivent alors:

$$\begin{cases} P_i = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \cos\delta_{ij} + B_{ij} \sin\delta_{ij}) \\ Q_i = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \sin\delta_{ij} - B_{ij} \cos\delta_{ij}) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

Ce sont les équations d'écoulement de puissance où les puissances injectées sont connues et les amplitudes et les angles des tensions des différents nœuds sont à déterminer.

Les équations d'écoulement de puissance ainsi obtenues sont non-linéaires et impossibles à résoudre analytiquement. On a recours aux méthodes itératives : c'est une opération répétitive qui consiste en une estimation d'une solution initiale qui sera utilisée en conjonction avec les équations originales pour le calcul d'une première solution, puis une deuxième solution et ainsi de suite jusqu'à atteindre une solution satisfaisante.

En fait, le problème d'écoulement de puissance peut avoir aucune, une ou plusieurs solutions. Quatre grandeurs sont associées à chaque nœud du système : les puissances active et réactive ainsi que le module et la phase de la tension. Seules deux de ces quatre variables sont connues en un nœud, les deux autres étant déterminées lors du calcul. Trois combinaisons, définissant trois types de nœuds sont généralement utilisés :

- Les nœuds *PQ* pour lesquels les injections de puissances active et réactive sont fixées : Un nœud *PQ* est connecté directement avec la charge, il ne possède aucune source d'énergie.
- Les nœuds *PV* où les grandeurs connues sont la puissance active et le module de la tension : Un nœud *PV* est connecté directement avec un générateur ou une source d'énergie réactive. La production de l'énergie réactive est limitée par des valeurs inférieures et supérieures, Q_{Gmin} et Q_{Gmax} respectivement. Si l'une des deux limites est atteinte, la valeur se fixe à cette limite et la tension se libère, le nœud devient alors un nœud *PQ*.
- Le nœud bilan ou balancier (slack bus en anglais) pour lequel la tension complexe est donnée en module et en phase et qui sert de référence au système : ce nœud est considéré dans le calcul d'écoulement de puissance afin de compenser les pertes actives et assurer l'égalité entre la demande et la génération de la puissance active. Sans la définition de ce nœud, nous ne pouvons avoir de convergence et donc de solution.

3 Méthodes de résolution

3.1 Méthode de Gauss-Seidel

La méthode de Gauss Seidel est une méthode itérative utilisée dans la résolution des systèmes linéaires à plusieurs inconnus. Cette méthode fixe d'abord des valeurs initiales des inconnus pour un premier calcul des résultats. Ces nouvelles valeurs sont utilisées comme données initiales pour une deuxième itération et ainsi de suite. On arrête le processus itératif une fois que la différence entre les valeurs obtenues entre deux itérations est inférieure à une tolérance notée ϵ .

3.1.1 Principe de la méthode

Soit le système d'équations

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (12)$$

Ce système d'équation peut être écrit sous une autre forme où on tire de chaque équation l'expression de x_i :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{cases} \quad (13)$$

$a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$

Si on note par k le nombre d'itérations, cette méthode consiste à évaluer x^{k+1} à partir de x^k . Le système d'équations précédent peut alors s'écrire.

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \dots - a_{1n}x_n^k}{a_{11}} \\ x_2^{k+1} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \dots - a_{2n}x_n^k}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^k}{a_{nn}} \end{cases} \quad (14)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - a_{i1}x_1^k - a_{i2}x_2^k - \dots - a_{in}x_n^k}{a_{ii}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

ou encore :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^k \right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

La méthode de Gauss appelé aussi méthode de Jacobi nécessite un vecteur de valeurs initiales pour commencer les itérations

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$

Le processus d'itération va s'arrêter une fois la condition de convergence est satisfaite :

$$|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \varepsilon \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

La méthode de Gauss Seidel est une amélioration à la méthode de Jacobi qui consiste à calculer l'inconnue à l'itération $k + 1$, x^{k+1} en fonction des valeurs x^k de l'itération k et x^{k+1} disponible à l'itération $k + 1$ comme suit :

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

Le nombre d'itérations de la méthode de Gauss Seidel peut être amélioré en utilisant à chaque itération un facteur d'accélération α comme suit :

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \alpha(x_i^{k+1} - x_i^k) \quad (19)$$

3.1.2 Application au problème d'écoulement de puissance

L'équation du calcul d'écoulement de puissance nous ramène aux calculs des tensions aux nœuds du réseau

$$\bar{I}_i = \sum_{j=1}^n Y_{ij} \bar{V}_j \quad (20)$$

$$\bar{S}_i = P_i + jQ_i = \bar{V}_i \bar{I}_i^* = \bar{V}_i \left(\sum_{j=1}^n Y_{ij} \bar{V}_j \right)^* \quad (21)$$

En prenant le conjugué de la puissance apparente, on aura :

$$\bar{S}_i^* = P_i - jQ_i = \bar{V}_i^* \cdot \bar{I}_i = \bar{V}_i^* \cdot Y_{ii} \cdot \bar{V}_i + \bar{V}_i^* \left(\sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij} \bar{V}_j \right) + \bar{V}_i^* \left(\sum_{j=i+1}^n Y_{ij} \bar{V}_j \right) \quad (22)$$

Le processus d'itération de Gauss Seidel, peut être alors appliqué comme suit :

$$\bar{V}_i^{k+1} = \frac{1}{Y_{ii}} \left(\frac{\bar{S}_i^*}{\bar{V}_i^{*k}} - \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij} \bar{V}_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n Y_{ij} \bar{V}_j^k \right) \quad (23)$$

Cette équation, ne concerne pas le nœud bilan où V et θ sont données ; P et Q à déterminer.

Pour les nœuds PV , la puissance réactive est inconnue. Elle doit être calculée d'après l'équation suivante :

$$Q_i^{k+1} = -imag \left\{ \bar{V}_i^{*k} \cdot \left(Y_{ii} \cdot \bar{V}_i^k + \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij} \bar{V}_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^n Y_{ij} \bar{V}_j^k \right) \right\} \quad (24)$$

Si la valeur calculée d'après l'équation précédente viole l'une des limites spécifiées, on fixe la valeur de Q_i à la limite violée. Ensuite, on procède au calcul de \bar{V}_i^{k+1} comme précédemment pour un nœud PQ .

Pour le calcul de \bar{V}_i^{k+1} , pour ce type de nœud, le module de la tension étant spécifiée, on doit garder seulement l'angle de phase θ calculé en effectuant l'opération suivante :

$$\bar{V}_i^{k+1} = \frac{\bar{V}_i^{k+1}}{|\bar{V}_i^{k+1}|} \cdot |\bar{V}_{i,specifiée}| \quad (25)$$

Pour accélérer la convergence de la méthode, les tensions durant les itérations successives, doivent être modifiés comme suit

$$\bar{V}_i^{k+1} = \bar{V}_i^k + \alpha(\bar{V}_i^{k+1} - \bar{V}_i^k) \quad (26)$$

où α est le facteur d'accélération.

Pour la majorité des réseaux électriques, α est tel que : $1,1 \leq \alpha \leq 2$

3.2 Méthode de Newton-Raphson

Parmi les différentes méthodes existantes pour résoudre un calcul de répartition de charge, c'est celle de Newton-Raphson qui est ordinairement et largement utilisée.

3.2.1 Principe de la méthode

Soit le système :

$$f(x) = 0 \tag{27}$$

avec :

$$x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^t$$

$$f = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]^t$$

La solution itérative de Newton-Raphson est donnée par :

$$x^{k+1} = x^k - [J(x^k)]^{-1} \cdot f(x^k) \tag{28}$$

où :

x^k : solution à l'itération k

x^{k+1} : solution à l'itération $k + 1$

J : Jacobien du système

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{29}$$

Nous écrivons souvent la résolution sous la forme :

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k \tag{30}$$

$$\Delta x^k = -[J(x^k)]^{-1} \cdot f(x^k) \tag{31}$$

3.2.2 Application au problème d'écoulement de puissance

Nous avons les équations d'écoulement de puissance qui se mettent sous la forme :

$$\Delta P_i = P_{ispec} - P_i \tag{32}$$

$$\Delta Q_i = Q_{ispec} - Q_i \tag{33}$$

avec $i = 1, 2, \dots, n$ et nœud 1 considéré comme nœud bilan.

P_{ispec} et Q_{ispec} sont les puissances injectées spécifiées en chaque nœud (génération et charge).

Le système à résoudre s'écrit :

$$f(x) = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = 0 \quad (34)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta P &= [\Delta P_2 \ \Delta P_3 \ \dots \ \Delta P_n]^t \\ \Delta Q &= [\Delta Q_2 \ \Delta Q_3 \ \dots \ \Delta Q_n]^t \\ x &= [\delta \ V]^t = [\delta_2 \ \delta_3 \ \dots \ \delta_n \ V_2 \ V_3 \ \dots \ V_n]^t \end{aligned}$$

Le système linéaire à résoudre pour trouver les accroissements :

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} \quad (35)$$

avec les éléments du Jacobien :

$$J_{11} = -\frac{\partial \Delta P}{\partial \delta} = \frac{\partial P}{\partial \delta} \quad (36)$$

$$J_{12} = -\frac{\partial \Delta P}{\partial V} = \frac{\partial P}{\partial V} \quad (37)$$

$$J_{21} = -\frac{\partial \Delta Q}{\partial \delta} = \frac{\partial Q}{\partial \delta} \quad (38)$$

$$J_{22} = -\frac{\partial \Delta Q}{\partial V} = \frac{\partial Q}{\partial V} \quad (39)$$

En reprenant les expressions des équations d'écoulement de puissance :

$$\Delta P_i = P_{ispec} - \sum_{j=1}^n V_i V_j (G_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j)) \quad (40)$$

$$\Delta Q_i = Q_{ispec} - \sum_{j=1}^n V_i V_j (G_{ij} \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{ij} \cos(\delta_i - \delta_j)) \quad (41)$$

On peut calculer les expressions des différents éléments du Jacobien :

$$(J_{11})_{ij} = -\frac{\partial \Delta P_i}{\partial \delta_j} = V_i V_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} - B_{ij} \cos \delta_{ij}) \quad (42)$$

$$(J_{11})_{ii} = -\frac{\partial \Delta P_i}{\partial \delta_i} = \sum_{j=1, j \neq i}^n V_i V_j (-G_{ij} \sin \delta_{ij} + B_{ij} \cos \delta_{ij}) = -Q_i - B_{ii} V_i^2 \quad (43)$$

$$(J_{12})_{ij} = -\frac{\partial \Delta P_i}{\partial V_j} = V_i(G_{ij} \cos \delta_{ij} + B_{ij} \sin \delta_{ij}) \quad (44)$$

$$(J_{12})_{ii} = -\frac{\partial \Delta P_i}{\partial V_i} = \sum_{j=1, j \neq i}^n V_j(G_{ij} \cos \delta_{ij} + B_{ij} \sin \delta_{ij}) + 2V_i G_{ii} = \frac{P_i}{V_i} + G_{ii} V_i \quad (45)$$

$$(J_{21})_{ij} = -\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial \delta_j} = V_i V_j (-G_{ij} \cos \delta_{ij} - B_{ij} \sin \delta_{ij}) = -V_j (J_{12})_{ij} \quad (46)$$

$$(J_{21})_{ii} = -\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial \delta_i} = \sum_{j=1, j \neq i}^n V_i V_j (G_{ij} \cos \delta_{ij} + B_{ij} \sin \delta_{ij}) = P_i - G_{ii} V_i^2 \quad (47)$$

$$(J_{22})_{ij} = -\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \sin \delta_{ij} - B_{ij} \cos \delta_{ij}) = \frac{(J_{11})_{ij}}{V_j} \quad (48)$$

$$(J_{22})_{ii} = -\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial V_i} = \sum_{j=1, j \neq i}^n V_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} - B_{ij} \cos \delta_{ij}) - 2V_i B_{ii} = \frac{Q_i}{V_i} - B_{ii} V_i \quad (49)$$

3.2.3 Algorithme de calcul

Il se résume dans les étapes suivantes :

1. Lire les données du système et former la matrice admittance Y
2. Itération $k = 0$: Estimer une solution initiale $x^0 = [\delta^0 \ V^0]$

une solution initiale typique est le "flat start" : $V_i^0 = 1$; $\delta_i^0 = 0$

3. Evaluer les "mismatches" ΔP et ΔQ pour la solution actuelle
4. Vérifier la tolérance de calcul (précision ou critère d'arrêt)

$$|\Delta P_i| \leq \varepsilon \text{ et } |\Delta Q_i| \leq \varepsilon \quad i = 2, 3, \dots, n \quad \text{ou} \quad \max(|\Delta P|, |\Delta Q|) \leq \varepsilon$$

où ε est une tolérance choisie.

Si oui : stop (fin des itérations)

Si non : aller à l'étape 5

5. Calculer les éléments du Jacobien pour la solution actuelle
6. Résoudre le système linéaire (35) pour $\Delta x = [\Delta \delta \ \Delta V]$
7. Mise à jour de la solution $x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$
8. Itération $k + 1$ et retourner à 3

3.2.4 Nœuds contrôlés en tension

Si pour un nœud i l'amplitude de tension est contrôlée donc fixée constante $V_i = const$ durant le calcul d'écoulement de puissance, alors on élimine la colonne dans le Jacobien qui correspond aux dérivées par rapport à V_i . C'est le cas des nœuds PV où l'amplitude de tension est spécifiée. En ces nœuds, la puissance réactive Q injectée sera calculée après résolution et convergence.

Si nous avons m nœuds PV , alors il y aura $(n - 1 - m)$ nœuds de charge ou PQ . La dimension du Jacobien est alors $(n - 1 - m) \times (n - 1 - m)$ au lieu de $(n - 1) \times (n - 1)$ relatif au cas où tous les nœuds excepté le slack bus sont de type PQ .

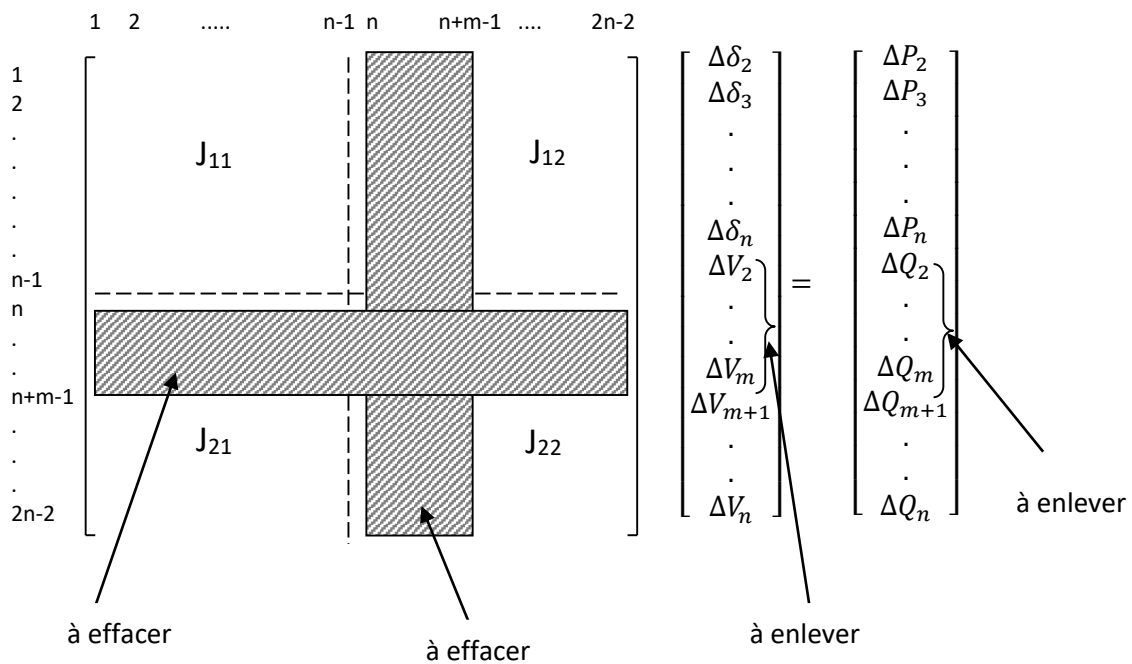


Fig. 4 : Modification de la matrice Jacobienne tenant compte des nœuds PV

Remarques :

- Si durant le calcul, un générateur arrive à sa limite de production réactive, il est transformé en nœud de charge et il n'est plus contrôlé en tension. Pour cela, on détermine à chaque fois la puissance réactive injectée aux nœuds PV et on vérifie qu'elle reste dans les limites spécifiées.
- Après convergence et obtention de la solution $[\delta \ V]$, on est en mesure de calculer les puissances active et réactive générées au slack bus, les puissances réactives produites aux nœuds PV , les puissances transitées dans les lignes et à travers les transformateurs ainsi que les pertes de puissance et les chutes de tension.
- Le nombre d'itérations de la méthode de Newton-Raphson est indépendant du nombre de nœuds du réseau à calculer mais le calcul du Jacobien consomme beaucoup de temps de calcul. Le nombre d'itérations est réduit du fait de la convergence quadratique de la méthode. Globalement, la méthode de Newton-Raphson est avantageuse par rapport aux autres méthodes.

3.3 Exemple

Résoudre le problème d'écoulement de puissance du système à 3 nœuds ci-dessous (Fig. 5) par la méthode de Newton-Raphason. Les impédances de toutes les lignes en pu par km sont égales à $(31,1 + j316). 10^{-6} pu/km$.

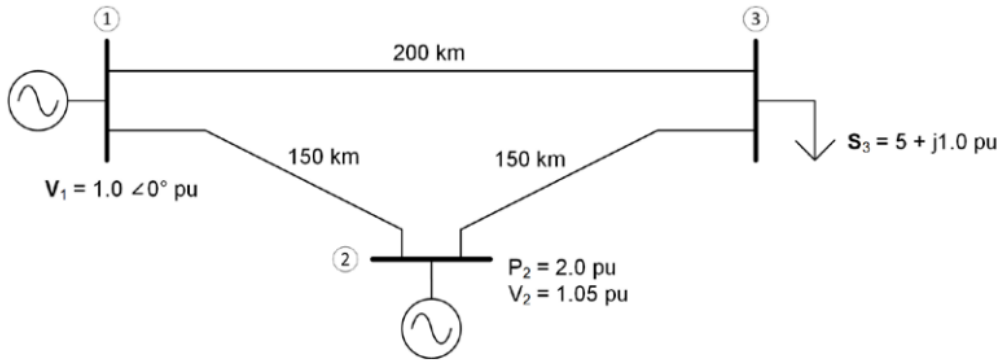


Fig. 5 : Réseau électrique à 3 nœuds

Classification des nœuds :

- Nœud 1 : balancier (slack bus), V_1 et δ_1 connus, trouver P_1 et Q_1
- Nœud 2 : PV , P_2 et V_2 connus, trouver δ_2 et Q_2
- Nœud 3 : PQ , P_3 et Q_3 connus, trouver V_3 et δ_3

Impédances des lignes :

$$z_{12} = (31,1 + j316). 10^{-6} \times 150 = (4,665 + j47,4). 10^{-3} pu$$

$$z_{13} = (31,1 + j316). 10^{-6} \times 200 = (6,220 + j63,2). 10^{-3} pu$$

$$z_{23} = (31,1 + j316). 10^{-6} \times 150 = (4,665 + j47,4). 10^{-3} pu$$

Admittances des lignes :

$$y_{12} = y_{23} = \frac{1}{z_{12}} = \frac{1}{(4,665 + j47,4). 10^{-3}} = 2,06 - j20,9 pu$$

$$y_{13} = \frac{1}{z_{13}} = \frac{1}{(6,220 + j63,2). 10^{-3}} = 1,54 - j15,7 pu$$

La matrice admittance :

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,6 - j36,6 & -2,06 + j20,9 & -1,5 + j15,7 \\ -2,06 + j20,9 & 4,1 - j41,8 & -2,06 + j20,9 \\ -1,5 + j15,7 & -2,06 + j20,9 & 3,6 - j36,6 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$G = \begin{bmatrix} 3,6 & -2,06 & -1,5 \\ -2,06 & 4,1 & -2,06 \\ -1,5 & -2,06 & 3,6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -36,6 & 20,9 & 15,7 \\ 20,9 & -41,8 & 20,9 \\ 15,7 & 20,9 & -36,6 \end{bmatrix}$$

Grandeurs spécifiées :

- *Slack bus* : $V_1 = 1,0 pu, \delta_1 = 0^\circ$
- *PV bus* : $V_2 = 1,05 pu, P_2 = 2,0 pu$
- *PQ bus* : $P_3 = -5,0 pu, Q_3 = -1,0 pu$

Vecteur de sortie (mismatches de puissance) :

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta P_2 = 2,0 - [(V_2 V_1 (G_{21} \cos(\delta_2 - \delta_1) + B_{21} \sin(\delta_2 - \delta_1)) + V_2^2 G_{22} + V_2 V_3 (G_{23} \cos(\delta_2 - \delta_3) + B_{23} \sin(\delta_2 - \delta_3)))]$$

$$\Delta P_3 = -5,0 - [(V_3 V_1 (G_{31} \cos(\delta_3 - \delta_1) + B_{31} \sin(\delta_3 - \delta_1)) + V_3 V_2 (G_{32} \cos(\delta_3 - \delta_2) + B_{32} \sin(\delta_3 - \delta_2)) + V_3^2 G_{33}]$$

$$\Delta Q_3 = -1,0 - [(V_3 V_1 (G_{31} \sin(\delta_3 - \delta_1) - B_{31} \cos(\delta_3 - \delta_1)) + V_3 V_2 (G_{32} \sin(\delta_3 - \delta_2) - B_{32} \cos(\delta_3 - \delta_2)) - V_3^2 B_{33}]$$

Vecteur des grandeurs inconnues :

$$x = \begin{bmatrix} \delta \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Le vecteur initial formé des valeurs initiales estimées :

$$x^0 = \begin{bmatrix} \delta_2^0 \\ \delta_3^0 \\ V_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des tensions complexes est alors :

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \angle \delta_1 \\ V_2 \angle \delta_2 \\ V_3 \angle \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \angle 0^\circ \\ 1,05 \angle \delta_2 \\ V_3 \angle \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \angle 0^\circ \\ 1,05 \angle 0^\circ \\ 1,0 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

La matrice du Jacobien :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_2}{\partial \delta_3} & \frac{\partial P_2}{\partial V_3} \\ \frac{\partial P_3}{\partial \delta_2} & \frac{\partial P_3}{\partial \delta_3} & \frac{\partial P_3}{\partial V_3} \\ \frac{\partial Q_3}{\partial \delta_2} & \frac{\partial Q_3}{\partial \delta_3} & \frac{\partial Q_3}{\partial V_3} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \delta_2} = -V_2[V_1(-G_{21} \sin(\delta_2 - \delta_1) + B_{21} \cos(\delta_2 - \delta_1)) + V_3(-G_{23} \sin(\delta_2 - \delta_3) + B_{23} \cos(\delta_2 - \delta_3))]$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial \delta_3} = -V_3[V_1(-G_{31} \sin(\delta_3 - \delta_1) + B_{31} \cos(\delta_3 - \delta_1)) + V_2(-G_{32} \sin(\delta_3 - \delta_2) + B_{32} \cos(\delta_3 - \delta_2))]$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial \delta_3} = V_2V_3(G_{23} \sin(\delta_2 - \delta_3) - B_{23} \cos(\delta_2 - \delta_3))$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial \delta_2} = V_2V_3(G_{32} \sin(\delta_3 - \delta_2) - B_{32} \cos(\delta_3 - \delta_2))$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial V_3} = V_2(G_{23} \cos(\delta_2 - \delta_3) + B_{23} \sin(\delta_2 - \delta_3))$$

$$\frac{\partial P_3}{\partial V_3} = V_1(G_{31} \cos(\delta_3 - \delta_1) + B_{31} \sin(\delta_3 - \delta_1)) + V_2(G_{32} \cos(\delta_3 - \delta_2) + B_{32} \sin(\delta_3 - \delta_2)) + 2V_3G_{33}$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial \delta_2} = V_2V_3(-G_{32} \cos(\delta_3 - \delta_2) - B_{32} \sin(\delta_3 - \delta_2))$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial \delta_3} = V_3[V_1(G_{31} \cos(\delta_3 - \delta_1) + B_{31} \sin(\delta_3 - \delta_1)) + V_2(G_{32} \cos(\delta_3 - \delta_2) + B_{32} \sin(\delta_3 - \delta_2))]$$

$$\frac{\partial Q_3}{\partial V_3} = V_1(G_{31} \sin(\delta_3 - \delta_1) - B_{31} \cos(\delta_3 - \delta_1)) + V_2(G_{32} \sin(\delta_3 - \delta_2) - B_{32} \cos(\delta_3 - \delta_2)) - 2V_3B_{33}$$

- Paramètre à préciser : tolérance ou précision $\varepsilon = 10^{-6}$
- Critère d'arrêt : $\max(|\Delta P|, |\Delta Q|) \leq \varepsilon$

Iteration 0 :

$$\mathbf{V}^0 = \begin{bmatrix} 1,0 \angle 0^\circ \\ 1,05 \angle 0^\circ \\ 1,0 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,0 - 0,216 \\ -5,0 - (-0,103) \\ -1,0 - (-1,045) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,718 \\ -4,897 \\ 0,045 \end{bmatrix}$$

$\max(|\Delta P|, |\Delta Q|) = 4,897 > \varepsilon$: la précision exigée n'étant pas satisfaite, on calcule la nouvelle solution.

$$J^0 = \begin{bmatrix} 43,89 & -21,95 & -2,160 \\ -21,95 & 37,62 & 3,497 \\ 2,160 & -3,702 & 35,53 \end{bmatrix}$$

Les accroissements sont obtenus par résolution du système linéaire :

$$\begin{bmatrix} 43,89 & -21,95 & -2,160 \\ -21,95 & 37,62 & 3,497 \\ 2,160 & -3,702 & 35,53 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_2 \\ \Delta\delta_3 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,718 \\ -4,897 \\ 0,045 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\Delta x^0 = \begin{bmatrix} \Delta\delta_2^0 \\ \Delta\delta_3^0 \\ \Delta V_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0345 \\ -0,1492 \\ -0,0122 \end{bmatrix}$$

Mise à jour de la solution:

$$x^1 = x^0 + \Delta x^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,0345 \\ -0,1492 \\ -0,0122 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0345 \\ -0,1492 \\ 0,9878 \end{bmatrix}$$

La convergence est atteinte après 4 itérations :

$$x = x^4 = \begin{bmatrix} -2,1^\circ \\ -8,8^\circ \\ 0,98 \end{bmatrix}$$

Et donc :

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \angle \delta_1 \\ V_2 \angle \delta_2 \\ V_3 \angle \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \angle 0^\circ \\ 1,05 \angle -2,1^\circ \\ 0,98 \angle -8,8^\circ \end{bmatrix}$$

La puissance injectée :

$$S = \begin{bmatrix} \overline{S_1} \\ \overline{S_2} \\ \overline{S_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,08 - j0,82 \\ 2,0 - j2,67 \\ -5,0 - j1,0 \end{bmatrix}$$

3.4 Méthode d'écoulement de puissance découplée

Les lignes de transport électrique ont un rapport R/X très bas. Pour de tels systèmes, la variation de puissance active est plus sensible à la variation de la phase δ alors que la variation de puissance réactive est plus sensible au chagement dans les amplitudes de tension. Il est alors raisonnable de négliger les éléments dans les sous-matrices J_{12} et J_{21} . Le système devient:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta V \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ 0 & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta V \end{bmatrix} \quad (50)$$

ou

$$\Delta P = J_{11} \cdot \Delta\delta \quad (51)$$

$$\Delta Q = J_{22} \cdot \Delta V \quad (52)$$

Ce sont les équations découplées d'écoulement de puissance et sont résolues séparément (gain de temps et d'espace mémoire).

Dans la littérature relative au problème d'écoulement de puissance, il est usuel de noter J_{11} et J_{22} par H et L . Pour les nœuds contrôlés en tension, les amplitudes de tension sont connues. alors, s'il y a m nœuds contrôlés en tension, alors H est d'ordre $(n - 1) \times (n - 1)$ et L est d'ordre $(n - 1 - m) \times (n - 1 - m)$. Les éléments de ces deux matrices sont donnés par :

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = V_i V_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} - B_{ij} \cos \delta_{ij}) \quad (53)$$

$$H_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = -Q_i - B_{ii} V_i^2 \quad (54)$$

$$L_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \sin \delta_{ij} - B_{ij} \cos \delta_{ij}) \quad (55)$$

$$L_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} = \frac{Q_i}{V_i} - B_{ii} V_i \quad (56)$$

3.5 Méthode découplée rapide

Pour les réseaux électriques pratiques, on a en général :

$$X \gg R \rightarrow G_{ij} \sin \delta_{ij} \ll B_{ij} \quad (57)$$

Entre deux nœuds adjacents :

$$\sin \delta_{ij} = \sin(\delta_i - \delta_j) \approx \delta_i - \delta_j = \delta_{ij} \quad (58)$$

$$\cos \delta_{ij} = \cos(\delta_i - \delta_j) \approx 1 \quad (59)$$

d'où :

$$Q_i = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} - B_{ij} \cos \delta_{ij}) \approx V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} - B_{ij}) \ll V_i \sum_{j=1}^n V_j (-B_{ij}) \ll B_{ii} \cdot V_i^2 \quad (60)$$

Avec les approximations $V_i V_j \approx V_i^2$ et $V_i^2 \approx V_i$, on obtient:

$$H_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = -V_i B_{ii} \quad (61)$$

$$H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = -V_i B_{ij} \quad (62)$$

De manière similaire, on peut déduire les simplifications pour la matrice L :

$$L_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} = -V_i B_{ii} \quad (63)$$

$$L_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial V_j} = -V_i B_{ij} \quad (64)$$

Alors, les équations découplées prennent la forme suivante :

$$\frac{\Delta P}{V} = -B' \cdot \Delta \theta \quad (65)$$

$$\frac{\Delta Q}{V} = -B'' \cdot \Delta V \quad (66)$$

B' et B'' sont les parties imaginaires de la matrice admittance nodale Y . Ce sont des matrices constantes et sont inversées une seule fois dans la routine de calcul. Les méthodes découplée et découplée rapide exigent plus d'itérations que la méthode de Newton-Raphson globale mais beaucoup moins de temps de calcul par itération.

4 Calcul des puissances transitées et des pertes dans les lignes et les transformateurs

4.1 Puissances transitées dans les lignes

Pour calculer la puissance qui s'écoule dans la branche reliant les nœuds i et j , on détermine le courant qui circule entre ces nœuds qui a pour expression :

$$\bar{I}_{ij} = Y_{ij}(\bar{V}_i - \bar{V}_j) + Y_{i0}\bar{V}_i \quad (67)$$

et la puissance complexe qui transite dans la ligne $i - j$ mesurée au nœud i :

$$\bar{S}_{ij} = \bar{V}_i \bar{I}_{ij}^* = \bar{V}_i \cdot [Y_{ij}(\bar{V}_i - \bar{V}_j) + Y_{i0}\bar{V}_i]^* \quad (68)$$

$$\bar{S}_{ij} = |\bar{V}_i|^2 \cdot Y_{ij}^* - \bar{V}_i \cdot \bar{V}_j^* \cdot Y_{ij}^* + |\bar{V}_i|^2 \cdot Y_{i0}^* \quad (69)$$

De même la puissance apparente qui s'écoule du nœud j vers le nœud i vaut :

$$\bar{S}_{ji} = |\bar{V}_j|^2 \cdot Y_{ij}^* - \bar{V}_j \cdot \bar{V}_i^* \cdot Y_{ij}^* + |\bar{V}_j|^2 \cdot Y_{j0}^* \quad (70)$$

4.2 Puissances transitées dans les transformateurs régulateurs

Considérant un transformateur régulateur dont la matrice admittance est :

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{Y_{ij}}{a^2} & -\frac{Y_{ij}}{a} \\ -\frac{Y_{ij}}{a} & Y_{ij} \end{bmatrix} \quad (71)$$

Le courant qui circule entre les nœuds i et j est donné comme suit :

$$\bar{I}_{ij} = \frac{Y_{ij}}{a^2} \cdot \bar{V}_i - \frac{Y_{ij}}{a} \cdot \bar{V}_j = \frac{1}{a} \cdot Y_{ij} \left(\frac{1}{a} \bar{V}_i - \bar{V}_j \right) \quad (72)$$

et la puissance :

$$\bar{S}_{ij} = \bar{V}_i \bar{I}_{ij}^* = \bar{V}_i \cdot \left[\frac{1}{a} \cdot Y_{ij} \left(\frac{1}{a} \bar{V}_i - \bar{V}_j \right) \right]^* = \frac{1}{a^2} \cdot |\bar{V}_i|^2 \cdot Y_{ij}^* - \frac{1}{a} \cdot Y_{ij}^* \bar{V}_j^* \cdot \bar{V}_i \quad (73)$$

D'autre part le courant qui circule du nœud j vers le nœud i :

$$\bar{I}_{ji} = \frac{1}{a} \cdot Y_{ij} \left(\bar{V}_j - \frac{1}{a} \bar{V}_i \right) \quad (74)$$

$$\bar{S}_{ji} = \bar{V}_j \bar{I}_{ji}^* = \bar{V}_j \cdot \left[\frac{1}{a} \cdot Y_{ij} \left(\bar{V}_j - \frac{1}{a} \bar{V}_i \right) \right]^* = \frac{1}{a^2} \cdot |\bar{V}_j|^2 \cdot Y_{ij}^* - \frac{1}{a} \cdot Y_{ij}^* \bar{V}_i^* \cdot \bar{V}_j \quad (75)$$

4.3 Calcul des pertes totales dans le réseau

Pour un élément du réseau reliant deux nœuds i et j on a :

$$\bar{S}_{Loss\ ij} = \bar{S}_{ij} + \bar{S}_{ji} \tag{76}$$

$\bar{S}_{Loss\ ij}$: puissance complexe consommée (perdue) dans la branche ($i - j$)

\bar{S}_{ij} : puissance complexe qui transite du nœud i vers le nœud j

\bar{S}_{ji} : puissance complexe de qui transite du nœud j vers le nœud i

$$P_{Loss\ ij} = \text{Reel}\{\bar{S}_{Loss\ ij}\} \tag{77}$$

$$Q_{Loss\ ij} = \text{Imag}\{\bar{S}_{Loss\ ij}\} \tag{78}$$

$P_{Loss\ ij}$: puissance active perdue dans la branche ($i - j$)

$Q_{Loss\ ij}$: puissance réactive perdue dans la branche ($i - j$)

La puissance totale perdue dans le réseau est égale à la somme des puissances perdues dans toutes les branches du réseau.

$$\bar{S}_{Loss} = \sum \bar{S}_{Loss\ ij} \tag{79}$$

$$P_{Loss} = \text{Reel}\left\{\sum \bar{S}_{Loss\ ij}\right\} \tag{80}$$

$$Q_{Loss} = \text{Imag}\left\{\sum \bar{S}_{Loss\ ij}\right\} \tag{81}$$

5 Représentation des résultats d'écoulement de puissance

Soit le réseau de la Fig. 6 ci-dessous.

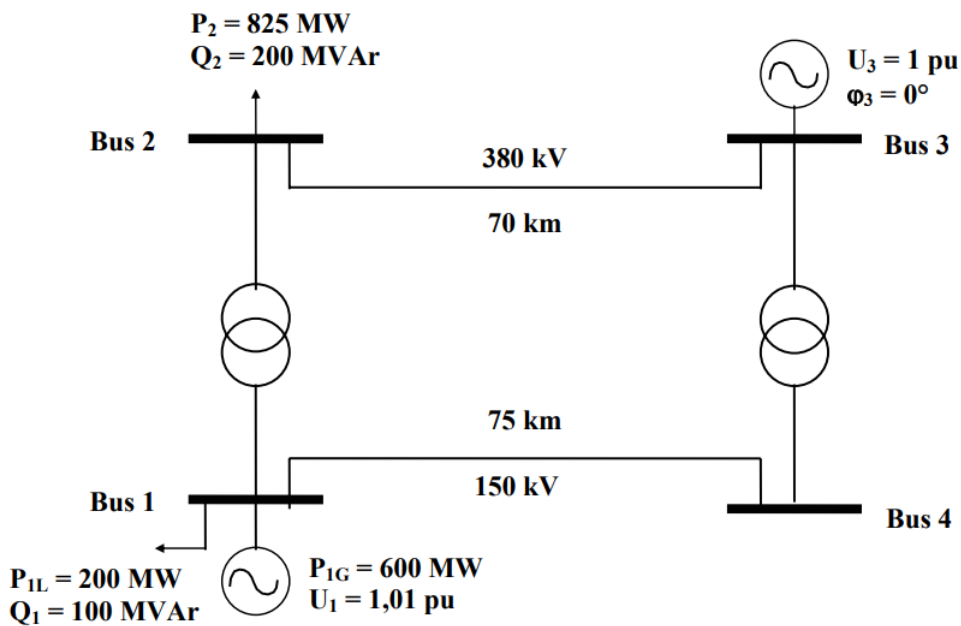


Fig. 6: Réseau à 4 nœuds

Les données de ce réseau sont dépeintes dans les tableaux suivants.

Lignes

Transformateurs

Ligne	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>R</i> (Ω/km)	<i>X</i> (Ω/km)	<i>U</i> (kV)	<i>l</i> (km)	Transfo	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>R</i> (%)	<i>X</i> (%)	<i>S</i> (MVA)
1	1	4	0	0.2875	150	75	1	1	2	0	13	295
2	2	3	0	0.2100	380	70	2	3	4	0	13	295

Noeuds

Nœud	Type	<i>U</i> (pu)	<i>P_G</i> (MW)	<i>Q_G</i> (MVA _r)	<i>P_L</i> (MW)	<i>Q_L</i> (MVA _r)
1	PV	1.01	600	0	200	100
2	PQ	-	-	-	825	200
3	Slack	1.00	0	0	0	0
4	PQ	-	-	-	0	0

Résultats d'écoulement de puissance

Les résultats du calcul de load flow appliqué à ce réseau sont listés ci-dessous. C'est l'état électrique du réseau pour les contraintes imposées (nœuds PV, PQ et balancier ; puissances produites et consommées programmées). Pour chaque nœud, la première ligne en représente la tension nominale (kV), la tension actuelle (pu) et le déphasage par rapport au nœud balancier. Les autres lignes représentent les charges et les générateurs connectés ainsi que les transits de puissance dans les lignes et les transformateurs. Nous pouvons directement vérifier que la somme des puissances actives ou réactives arrivant à un nœud est nulle.

```

BUS      1 Bus 1      150.0 MW      Mvar      MVA      % 1.0100      5.52      1 1
GENERATOR 1          600.00  199.36R  632.3
LOAD 1            200.00  100.00  223.6
TO      2 Bus 2      1  330.65  88.79  342.4  34  1.0000NT  0.0
TO      4 Bus 4      1   69.41  10.56  70.2   7

BUS      2 Bus 2      380.0 MW      Mvar      MVA      % 0.9819      -2.94      1 1
LOAD 1            825.00  200.00  848.9
SWITCHED SHUNT    0.00   0.00   0.0
TO      1 Bus 1      1 -330.65 -38.12  332.8  33  1.0000TA  0.0
TO      3 Bus 3      1 -494.35 -161.88  520.2   5

BUS      3 Bus 3      380.0 MW      Mvar      MVA      % 1.0000      0.00      1 1
GENERATOR 1          424.94  186.65R  464.1
TO      2 Bus 2      1  494.35  190.45  529.8   5
TO      4 Bus 4      1  -69.41  -3.80   69.5   7  1.0000TA  0.0

BUS      4 Bus 4      150.0 MW      Mvar      MVA      % 1.0021      1.75      1 1
TO      1 Bus 1      1  -69.41  -5.93   69.7   7
TO      3 Bus 3      1   69.41   5.93   69.7   7  1.0000NT  0.0
    
```

Représentation graphique

Les interfaces graphiques permettent de mieux visualiser les grandeurs électriques du réseau et de suivre son état. Un exemple de représentation est celui du logiciel Power World : les transferts de puissances sont représentés par les flèches le long des lignes ; Au niveau des nœuds on fournit les tensions et les puissances injectées (Fig. 7).

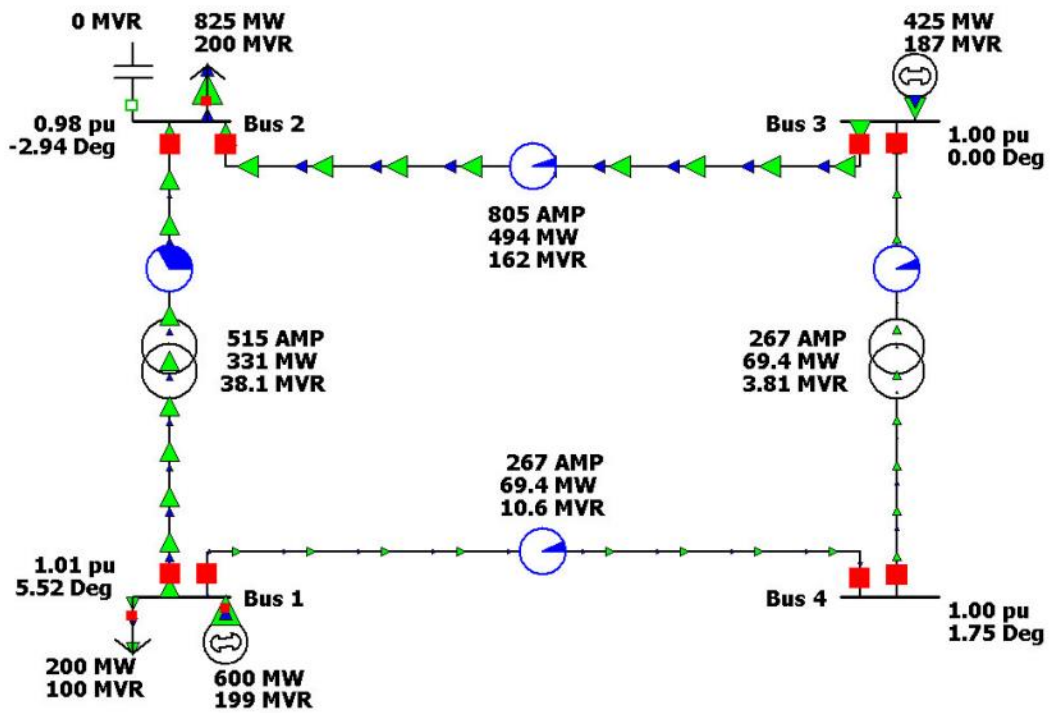


Fig. 7 : Exemple de présentation d'écoulement de puissance