REPARTITION OPTIMALE DE PUISSANCE ou DISPATCHING ECONOMIQUE

1 Introduction

L'électricité n'est pas disponible dans la nature et ne peut être stockée qu'en petite quantité ; elle doit être produite, transportée et distribuée de façon permanente. Et ce, en satisfaisant notamment les conditions techniques de tension et de fréquence stables. Pour cela, pendant le fonctionnement du système d'énergie, la contribution de chaque centrale et de chaque générateur, pour satisfaire à tout moment et en tout lieu la demande des consommateurs en énergie électrique, doit être déterminée de telle façon que le coût de production de l'énergie soit minimal. Ce problème est connu du point de vue économique sous le nom de ''Dispatching Economique Optimal''.

Au début, la méthode utilisée en exploitation consiste à charger ou à faire produire au maximum les unités les plus efficaces. Cette solution n'est pas rentable puisque l'abus de fonctionnement des machines diminue leur durée de vie. Par conséquent, les frais d'entretien et de maintenance augmentent considérablement. L'extension et la complexité du réseau ont poussé les chercheurs d'opter pour d'autres méthodes afin de contribuer à l'allégement de ce problème.

2 But du dispatching économique optimal

Le stockage massif de l'énergie électrique sous une forme immédiatement disponible n'est pas actuellement possible dans des conditions de consommation satisfaisantes. Le problème majeur de l'exploitation est de maintenir, en permanence, l'équilibre instantané entre la production et la consommation. C'est une condition nécessaire du système assurant la production et l'acheminement de l'énergie électrique vers les consommateurs.

L'électricité est produite dans des centrales électriques au moyen de turboalternateurs à eau ou à vapeur. Les grandes parties de l'électricité mondiale sont produites dans des centrales hydrauliques et thermiques aux différents combustibles (charbon, gaz, énergie nucléaire …), en plus petites proportions au diesel et autres installations à combustion interne.

L'exploitation et la conduite d'un réseau électrique visent les finalités suivantes :

- Favoriser la performance économique : optimisation générale compte tenu du rapport entre le coût de production et le coût de transport et qui revient en gros à minimiser à tout moment le coût de production.
- Maintenir la sûreté de fonctionnement du système : afin de veiller, à tout instant, à une alimentation des consommateurs et au respect des règles évitant les risques d'effondrement général.
- Garantir la qualité de fourniture.

L'objectif du dispatching économique optimal est alors la minimisation du coût de production de l'énergie électrique, en satisfaisant des contraintes de types égalité et inégalité. Nous donnons quelques exemples :

- Le dispatching économique tend à minimiser la quantité d'eau gaspillée ou de produire le maximum de MWh à partir de la quantité d'eau disponible dans un réseau composé de centrales hydrauliques.
- Dans un réseau composé de centrales thermiques fonctionnant au charbon, le dispatching économique tend à repartir la production entre les différentes stations pour minimiser le taux de pollution.
- Soient deux générateurs, l'un fonctionne au pétrole et l'autre au gaz. Le dispatching économique dans ce cas permet de partager la charge entre les deux générateurs pour que le coût global de production soit minimal.

En Algérie, le combustible étant essentiellement le Gaz Naturel, il s'agit d'optimiser la consommation spécifique des générateurs-turbines à gaz et à vapeur.

3 Formulation du problème

Les groupes de production constituent les composants essentiels d'un réseau électrique donné. La tâche à remplir est de satisfaire les demandes des charges et la couverture des pertes de puissance avec un minimum de frais.

Le problème consiste à minimiser la fonction coût de combustible pour la production de l'énergie électrique exigée. Cette fonction définit la dépendance des coûts de production des générateurs et des puissances générées. Ce problème d'optimisation est généralement formulé comme suit :

Minimiser la fonction objective $F(X)$

Sous les contraintes d'égalités $G(X) = 0$

et les contraintes d'inégalités $H(X) \leq 0$

Les contraintes d'égalités définissent les équations de l'écoulement de puissance ou l'équation de l'équilibre entre la demande et la production. Par contre, les contraintes d'inégalités présentent les domaines de fonctionnement admissible et essentiellement les limitations des ressources, marges de sécurité...etc.

Le type de la fonction objective est basé sur des critères économiques représentés par les coûts de production et par les pertes de puissance en ligne. La fonction coût global est la somme des fonctions coûts de toutes les unités de production. Cette fonction coût est considérée généralement comme une fonction polynomiale quadratique.

4 Caractéristiques des puissances générées

Dans l'analyse du problème d'optimisation de la fonction coût d'un système d'énergie électrique, plusieurs paramètres sont pris en considération. En effet, Le problème de répartition économique est la détermination des niveaux de production tels que le coût total de production devient minimum pour un niveau de charge défini. Les paramètres les plus importants sont les caractéristiques d'entrée - sortie des unités de production. Pour les unités thermiques, le coût du combustible par unité de puissance varie considérablement avec la puissance de sortie de l'unité. Par conséquent, il faut tenir compte des caractéristiques de coût du carburant des générateurs tout en trouvant leurs puissances réelles optimales. La Fig. 1 représente un schéma simplifié d'une centrale à vapeur. Cette unité est constituée d'une chaudière, d'une turbine et d'un générateur.

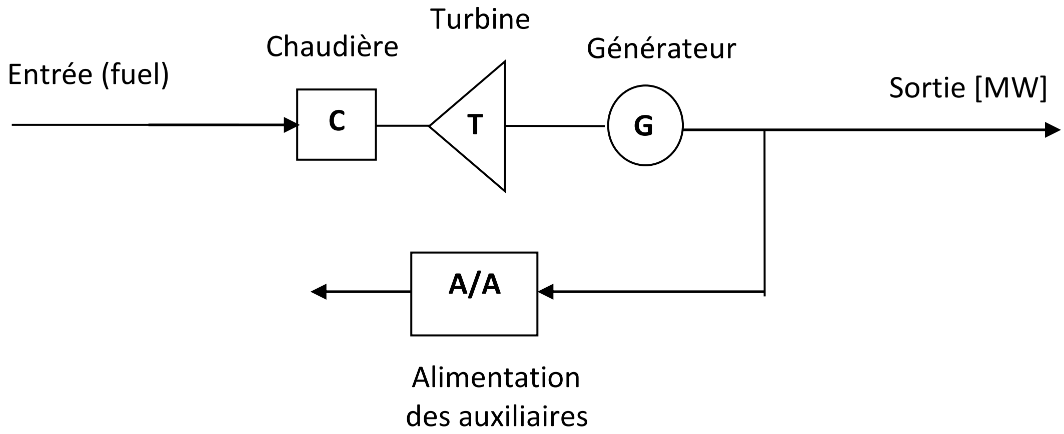

Fig. 1 : Centrale thermique à vapeur

En général, le coût de main d'œuvre et de maintenance est fixe. Une partie de la puissance brute, appliquée à la turbine, alimente à la sortie du générateur les auxiliaires telles que : les pompes du système d'alimentation de la chaudière, les pompes d'eau de refroidissement...etc. La quantité d'énergie brute est caractérisée, soit par unité de mesure du combustible ou par le prix par heure à l'entrée et par la quantité d'énergie électrique en MWh à la sortie. La variation de la quantité du combustible $H_i\ (P_i)$ ou de son coût $F_i\ (P_i)$ à l'entrée en fonction de la puissance nette générée à la sortie de la centrale s'appelle caractéristique entrée - sortie. En pratique, elle est obtenue par un nombre discret de points donnés par une série de tests sur l'unité de production. La Fig. 2 montre une forme usuelle de la caractéristique entrée – sortie, une fonction quadratique de la puissance de sortie. P_{min} est le niveau de sortie pour lequel le fonctionnement de l'unité n'est ni économique ni techniquement faisable. P_{max} est la limite maximale de sortie.
Dans le calcul du coût optimal d'énergie produite, ces caractéristiques sont présentées par des fonctions quadratiques du type :

$$F(P) = a + bP + cP^2 \tag{1}$$

Où les coefficients a, b et c sont propres à chaque unité de production.

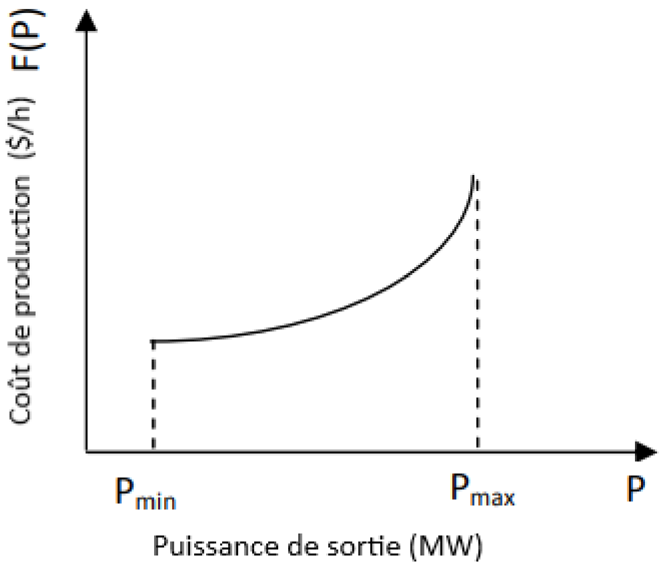

Fig. 2 : Courbe de la caractéristique entrée - sortie d'une unité thermique à vapeur

5 Dispatching économique sans considération des pertes de transport

La Fig. 3 montre la configuration étudiée dans ce type de problème. Ce système comporte N générateurs ou unités de production, liées à une charge, qui a besoin d'une puissance demandée totale P_D. Les entrées des générateurs sont les F_i, qui représentent les coûts de combustible. Les sorties sont les puissances générées P_i .

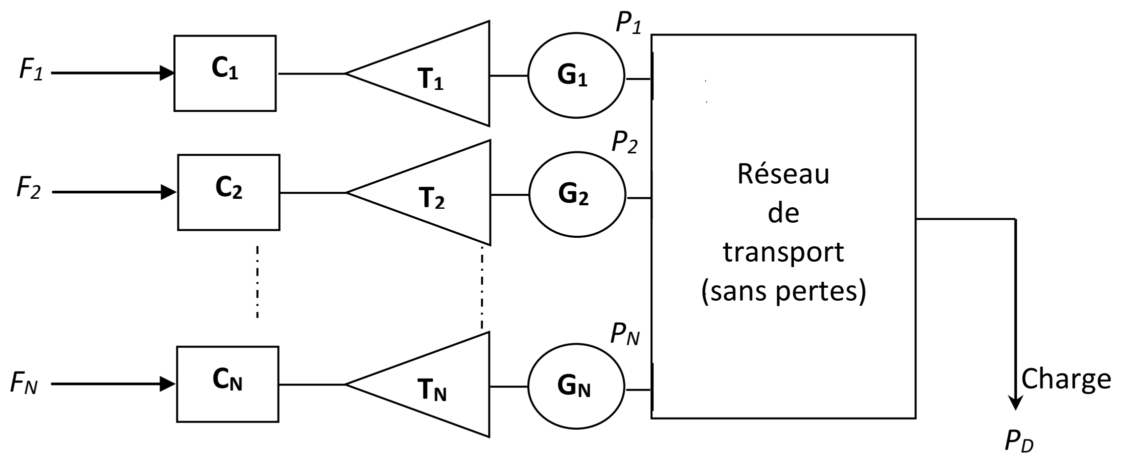

Fig. 3 : Connexion des centrales à un réseau de transport sans pertes

5.1 Fonction Coût

Il n'y a aucun effet concret des productions réactives sur la fonction coût car elles sont commandées par la variation du courant d'excitation des générateurs. Ainsi, la fonction coût totale F_T s'exprime seulement en fonction des puissances générées P_i.

$$F_T = \sum_{i=1}^{N} F_i(P_i) = F_1(P_1) + F_2(P_2) + \cdots + F_N(P_N) \tag{2}$$

où N est le nombre des unités de production.
F_i est le coût, exprimé en [$/MWh] spécifique à la production d'énergie dans l'unité de production numéro i.
On dit que la fonction coût est séparable si elle peut s'écrire sous la forme d'une somme de termes dépendant chacun d'une seule variable.

5.2 Coût incrémental « CI »

Le coût incrémental de la production des générateurs contrôlables de l'unité i est défini par :

$$CI_i = \frac{\partial F_i}{\partial P_i} \tag{3}$$

La Fig. 4 montre la caractéristique du coût en fonction de la puissance générée P_i. Le coût incrémental de l'unité i est la dérivée partielle $\frac{\partial F_i}{\partial P_i}$ qui représente la tangente de la courbe liant le coût à la puissance générée.

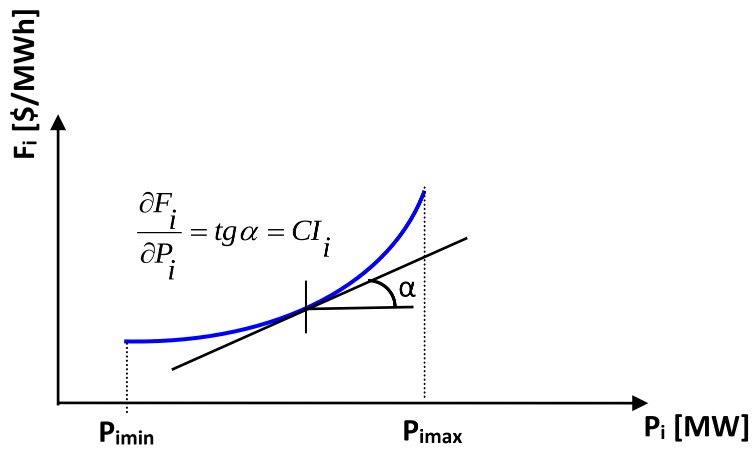

Fig. 4 : Fonction coût et coût incrémental

5.3 Contraintes

Il faut choisir un ensemble de variables P_i pour réduire au maximum la fonction coût. Ce choix ne peut être aléatoire, car, il est nécessaire que les contraintes d'égalités et d'inégalités soient vérifiées.

1) Contrainte d'égalité

En négligeant les pertes de transport, la production totale doit équilibrer la charge totale. L'équilibre énergétique est obtenu lorsque les variables P_i vérifient l'équilibre:

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = P_D \tag{4}$$

La puissance demandée est considérée constante à cause de la variation relativement lente dans la demande pour des périodes de 2 à 3 minutes.

2) Contraintes d'inégalité

Chaque générateur ne doit pas fonctionner au-dessus de sa puissance nominale ou en dessous d'une certaine valeur minimale. Ces conditions sont exprimées, mathématiquement, par l'inégalité suivante :

$$P_{imin} \leq P_i \leq P_{imax} \quad \text{avec} \quad i = 1 \cdots N \tag{5}$$

5.4 Formulation de Lagrange

Le problème posé est de savoir choisir les sorties des générateurs $P_1 \dots P_{N,}$ de sorte que la fonction coût F_T soit minimisée avec la satisfaction de la contrainte d'égalité (4) et des contraintes d'inégalités (5). Ainsi, le problème du dispatching devient un problème d'optimisation non linéaire avec contraintes. Il peut se résoudre par le développement d'une fonction appelée fonction de Lagrange.

Pour obtenir un extremum d'une fonction objective sous contraintes, on doit ajouter la fonction de contrainte à la fonction objective, en la multipliant par un coefficient, dit ''multiplicateur de Lagrange'', préalablement indéterminé. La fonction augmentée de Lagrange du problème est donnée par :

$$\mathcal{L} = F_T + \lambda\phi \quad \text{avec} \ \phi = P_D - \sum_{i=1}^{N} P_i = 0 \tag{6}$$

La condition nécessaire pour avoir l'optimum et que les dérivées premières de la fonction de Lagrange par rapport aux P_i et λ soient égales à zéro. Dans ce cas, on a $N + 1$ variables dont les inconnues sont les N puissances générées et le multiplicateur de Lagrange λ. La dérivée de la fonction de Lagrange par rapport à λ ne donne que la contrainte d'égalité. Autrement dit, les puissances générées optimales sont obtenues quand les dérivées de la fonction coût par rapport aux puissances générées sont égales à zéro, tout en respectant que leur somme soit égale à la puissance totale demandée. Les dérivées premières de l'équation (6) sont données par :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i} = \frac{\partial F_T}{\partial P_i} - \lambda = 0 \tag{7}$$

Par conséquent, sous sa forme simplifiée, l'équation (7) devient :

$$\frac{\partial F_i}{\partial P_i} = \lambda = CI_i \tag{8}$$

La condition d'existence d'un optimum pour la fonction coût des unités de production est que le CI_i de chaque unité i soit égal, pour chaque générateur, à une même valeur préalablement indéterminée qui est λ. La contrainte d'inégalité est que les puissances générées ne dépassent pas ses limites. Ce problème se résume comme suit :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_i}{\partial P_i} = \lambda && N \text{ équations} \\ &P_{imin} \leq P_i \leq P_{imax} && 2N \text{ inéquations} \\ &\sum_{i=1}^{N} P_i = P_D && 1 \text{ équation} \end{aligned} \tag{9}$$

Alors, la variation du coût incrémental dépendra de $[P_{imin}, P_{imax}]$ et sera gérée par l'équation :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_i}{\partial P_i} = \lambda && \text{pour} && P_{imin} \leq P_i \leq P_{imax} \\ &\frac{\partial F_i}{\partial P_i} \leq \lambda && \text{pour} && P_{imax} = P_i \\ &\frac{\partial F_i}{\partial P_i} \geq \lambda && \text{pour} && P_{imin} = P_i \end{aligned} \tag{10}$$

En considérant la forme quadratique (1) de la fonction coût, on obtient :

$$\frac{\partial F_i}{\partial P_i} = b_i + 2c_i P_i = \lambda \tag{11}$$

ou

$$P_i = \frac{\lambda - b_i}{2c_i} \tag{12}$$

En remplaçant dans (4) :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda - b_i}{2c_i} = P_D \tag{13}$$

D'où :

$$\lambda = \frac{P_D + \sum_{i=1}^{N} \frac{(b_i}{2c_i)}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2c_i}} \tag{14}$$

Ayant λ, on peut obtenir les valeurs des P_i à partir de (12).

Exemple :

Deux unités de production d'un système électrique ont les courbes de coût suivantes :

$$F_1(P_1) = 120 + 22P_1 + 0{,}05P_1^2 \qquad (\$/h)$$

$$F_2(P_2) = 120 + 16P_2 + 0{,}06P_2^2 \qquad (\$/h)$$

P_1 et P_2 sont données en MW. Les deux unités fonctionnent en permanence et les limites sur leur production sont 100 MW et 20 MW. Déterminer la répartition économique de puissance pour une charge totale de 80 MW en négligeant les pertes de transmission.

En utilisant (14) :

$$\lambda = \frac{80 + \left(\frac{22}{2 \times 0{,}05}\right) + \left(\frac{16}{2 \times 0{,}06}\right)}{\left(\frac{1}{2 \times 0{,}05}\right) + \left(\frac{1}{2 \times 0{,}06}\right)} = 23{,}64\ \$/MWh$$

Puis en utilisant (12) :

$$P_1 = \frac{23{,}64 - 22}{2 \times 0{,}05} = 16{,}36\ MW$$

$$P_2 = \frac{23{,}64 - 16}{2 \times 0{,}06} = 63{,}64\ MW$$

Mais $P_{1min} = 20\ MW$, alors P_1 doit être fixée à 20 MW et le reste de la charge est fourni par P_2.

$$P_1 = 20\ MW \quad \text{et} \quad P_2 = 80 - 20 = 60\ MW$$

6 Dispatching économique avec considération des pertes

Quand il est nécessaire de transporter l'énergie électrique à de grandes distances où quand on alimente une grande surface avec une concentration relativement petite de charge, il est nécessaire de prendre en considération l'influence des pertes de transmission sur le problème du dispatching économique. La configuration est la même que précédemment mais le réseau de transmission est le siège de pertes de puissance.

Si nous prenons en compte les pertes dans les bilans de puissances, le problème devient plus difficile car, la contrainte d'égalité contient les pertes totales actives de transmission P_L.

L'équation d'équilibre de puissance tenant compte des pertes est donné par :

$$P_D + P_L - \sum_{i=1}^{N} P_i = \phi = 0 \tag{15}$$

Les pertes actives sont fonctions de l'impédance du réseau électrique et du courant électrique des lignes de transport. Par conséquent, le courant électrique est lié seulement aux puissances générées et aux puissances demandées.

La fonction de Lagrange pour ce type de problème devient :

$$\mathcal{L} = F_T + \lambda\phi \quad \text{avec } \phi = P_D + P_L - \sum_{i=1}^{N} P_i \tag{16}$$

La condition de minimisation de la fonction coût est :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i} = \frac{\partial F_T}{\partial P_i} - \lambda\left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_i}\right) = 0 \tag{17}$$

Ou bien :

$$\frac{\partial F_T}{\partial P_i} + \lambda\frac{\partial P_L}{\partial P_i} = \lambda \tag{18}$$

De l'équation (18), on peut tirer :

$$\lambda = \frac{\partial F_i}{\partial P_i} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_i}\right)} \tag{19}$$

Par conséquent :

$$\lambda = CI_i \times \frac{1}{(1 - IPT_i)} \quad \text{avec } IPT_i = \frac{\partial P_L}{\partial P_i} \tag{20}$$

IPT_i : Incrément des pertes de transmission.

Cette dernière équation est la condition nécessaire de l'existence d'un coût minimal de fonctionnement. Le coût incrémental de toutes les unités est le même. A cette condition doivent s'ajouter les contraintes sur les puissances.

L'équation des pertes de transmission peut être donnée par (formule de Kron) :

$$P_L = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P_i B_{ij} P_j + \sum_{i=1}^{N} B_{0i} P_i + B_{00} \tag{21}$$

Les coefficients B_{ij} s'appellent coefficients des pertes ou coefficients B.

La dérivée de la fonction de Lagrange devient alors :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_i} = \frac{\partial F_T}{\partial P_i} - \lambda \left(1 - 2\sum_{j=1}^{N} B_{ij} P_j - B_{i0} \right) \tag{22}$$

Sous sa forme simplifiée, avec $B_{ij} = B_{00} = 0 \ (i \neq j)$, l'équation (21) peut se réduire à :

$$P_L = \sum_{i=1}^{N} \left(B_{ii} {P_i}^2 \right) \tag{23}$$

7 Résolution par la méthode de Lambda itérative

Cette méthode se base sur l'estimation initiale du coût incrémental. Graphiquement, la Fig. 5 montre son principe. On détermine les puissances optimales pour minimiser la fonction coût totale. La première approche est de tracer des droites horizontales du coût incrémental, pour chacun des générateurs, dans le même plan. Pour avoir l'optimum et satisfaire en même temps la demande totale, on doit estimer une valeur du coût incrémental λ sur le graphe et trouver les puissances générées de chaque unité pour cette valeur de λ. Leur somme doit être comparée avec la puissance demandée totale P_D plus les pertes de transmission P_L. Pour la deuxième estimation de λ, on doit augmenter ou diminuer λ, selon que la somme est inférieure ou supérieure à la puissance demandée totale P_D plus les pertes de transmission P_L. Si certains générateurs dépassent la limite, on doit prendre cette limite et continuer le processus de calcul pour les autres.

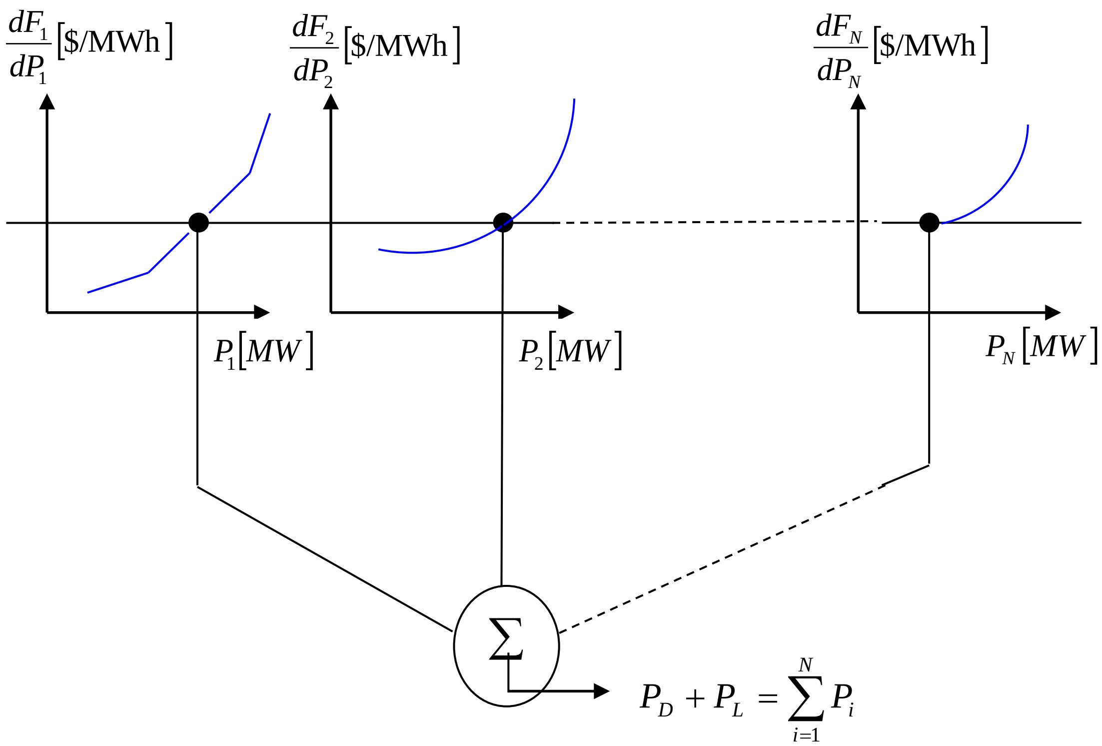

Fig. 5 : Résolution graphique

Avec deux solutions, nous pouvons extrapoler ou interpoler les deux solutions pour obtenir plus près la valeur désirée de la puissance totale générée, comme le montre la Fig. 6. Avec cette méthode, la convergence est très rapide.

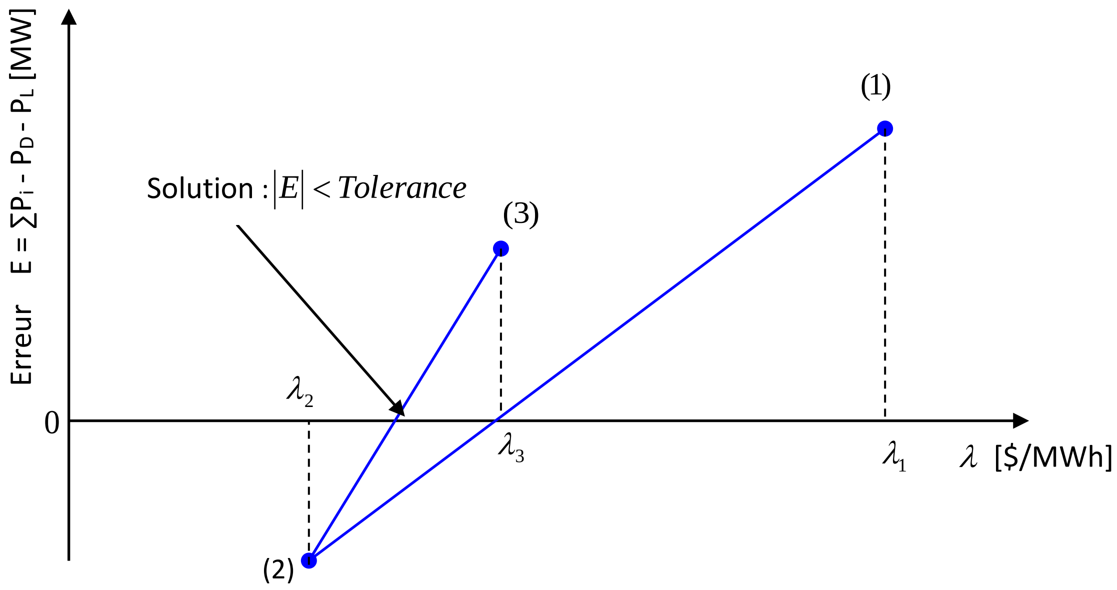

Fig. 6 : Projection de Lambda

La technique la plus utilisée pour aller rapidement à λ_{opt} est la méthode de Newton-Raphson. L'application de la méthode de Newton-Raphson permet la résolution de l'équation :

$$E = 0 = f(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} P_i - P_D - P_L \tag{24}$$

L'exploitation de la fonction quadratique de la fonction coût donnée par (1) et des pertes de transmission formulées par (23) permet de déduire le coût incrémental $\frac{\partial F_i}{\partial P_i}$ de chaque unité i.

$$\frac{\partial F_i}{\partial P_i} = \lambda\left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_i}\right) = b_i + 2c_i P_i \tag{25}$$

Par conséquent :

$$P_i = \frac{\lambda\left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_i}\right) - b_i}{2c_i} = \frac{\lambda(1 - 2B_{ii}P_i) - b_i}{2c_i} \tag{26}$$

L'utilisation de (24) permet d'écrire :

$$E(\lambda^{it}) = \sum_{i=1}^{N} P_i - P_D - P_L = \sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda\left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_i}\right) - b_i}{2c_i} - P_D - P_L \tag{27}$$

L'algorithme de Newton-Raphson donne alors :

$$\lambda^{it+1} = \lambda^{it} - \frac{E(\lambda^{it})}{E'(\lambda^{it})} = \frac{P_D + P_L + \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{2c_i}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1 - 2B_{ii}P_i}{2c_i}} \tag{28}$$

Cette technique converge très rapidement à la solution et permet le calcul des puissances actives générées. La valeur de λ initiale doit être comprise entre λ_{min} et λ_{max} correspondant, respectivement, à P_{imin} et P_{imax}.

Algorithme de calcul

Etape 1 : Données de a_i, b_i, c_i, P_{0i} et B_{ii}

Etape 2 : Donner une valeur initiale λ_0

Etape 3 : Calculer les puissances générées

$$P_i = \frac{\lambda(1 - 2B_{ii}P_i) - b_i}{2c_i}$$

Etape 4 : Calculer les pertes de transmission

$$P_L = \sum_{i=1}^{N} \left(B_{ii}{P_i}^2\right)$$

Etape 5 : Si $P_i < P_{imin}$, poser $P_i = P_{imin}$

Si $P_i > P_{imax}$, poser $P_i = P_{imax}$

Etape 6 : Calculer la somme des puissances générées.

Etape 7 : Calculer l'erreur

$$E = \sum_{i=1}^{N} P_i - P_D - P_L$$

Etape 8 : Si $|E| < \varepsilon$, aller à l'étape 10. Si non, continuer à l'étape 9.

Etape 9 : Calculer λ par

$$\lambda = \frac{P_D + P_L + \sum_{i=1}^{N} \frac{b_i}{2c_i}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1 - 2B_{ii}P_i}{2c_i}}$$

Revenir à l'étape 3

Etape 10 : Afficher les puissances générées et le coût total.

Etape 11 : Fin

8 Résolution par la méthode du Gradient d'ordre 1

C'est une méthode d'énumération directe, utilisant le comportement de la fonction objective comme variable indépendante. Elle se caractérise au démarrage avec une solution faisable puis recherche la solution optimale le long d'une trajectoire qui maintient la solution faisable à tout instant.

L'équation (29) représente le développement de Taylor pour l'expression de F_T et son interpolation sur les points opérationnels faisables. Pour le premier ordre, le changement dans la fonction objective est vu dans l'équation (30). On obtient cette relation, si est seulement si, les termes de la série de Taylor d'ordre supérieur à 1, peuvent être négligés par rapport au premier ordre. Ceci ne peut être possible que par la soustraction du coût opérationnel initial de l'équation perturbée.

$$F_T + \Delta F_T = F_1(P_1) + F_2(P_2) + \cdots + F_N(P_N) + \frac{dF_1}{dP_1}\Delta P_1 + \frac{dF_2}{dP_2}\Delta P_2 + \cdots \tag{29}$$

$$\Delta F_T = \frac{dF_1}{dP_1}\Delta P_1 + \frac{dF_2}{dP_2}\Delta P_2 + \cdots + \frac{dF_N}{dP_N}\Delta P_N \tag{30}$$

L'équation de la contrainte d'égalité s'écrit comme suit :

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta P_i = 0 \tag{31}$$

Dans cette relation, les valeurs initiales sont retranchées. Donc, la somme du changement dans toutes les puissances générées est égale à zéro. Pour résoudre le problème du dispatching économique par cette méthode, on doit choisir une unité comme variable dépendante. En général, la dernière unité est considérée comme unité dépendante ($x = N$).
Le changement dans les puissances générées pour cette unité dépendante est, donc, une somme négative pour les $N - 1$ unités, comme il est montré dans l'équation (32) :

$$\Delta P_x = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^{N} \Delta P_i \tag{32}$$

A partir des équations (30) et (32), on obtient :

$$\Delta F_T = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^{N} \left[\frac{dF_i}{dP_i} - \frac{dF_x}{dP_x}\right] \Delta P_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^{N} \frac{\partial F_T}{\partial P_i} \Delta P_i \tag{33}$$

Algorithme de calcul

Etape 1 : Choisir P_i faisable et calculer $\frac{dF_i}{dP_i}$ avec $i = 1, \dots, N$

Etape 2 : Sélectionner la variable dépendante $x = N$

Etape 3 : Calculer $\frac{dF_T}{dP_i} = \frac{dF_i}{dP_i} - \frac{dF_x}{dP_x}$ avec $i = 1, \dots, N$ et $i \neq x$

Etape 4 : Déterminer la dérivation maximale : $\left[\frac{\partial F_T}{\partial P_i}\right]_{max}$ et son rang i_{max}

Etape 5 : Calculer $P_{i_{max}} = P_{i_{max}} + \Delta P$; $P_x = P_x - \Delta P$

Etape 6 : Si $P_{i_{max}}$ est en dehors des limites P_{imin} et P_{imax}

Ajuster $P_{i_{max}}$ et aller à l'étape 3

Etape 7 : Si P_x est en dehors des limites, ajuster P_x et aller à l'étape 2

Etape 8 : Calculer ΔF_T

Etape 9 : Si $\Delta F_T > \varepsilon$ aller à l'étape 3. Si non aller à l'étape 10.

Etape 10 : Afficher les résultats

9 Résolution par la méthode du Gradient d'ordre 2

La méthode de gradient d'ordre 1 peut être revue efficacement par l'utilisation du terme du deuxième ordre de la série de Taylor dans le coût de production total. La série de Taylor s'écrit :

$$\begin{aligned} F_T + \Delta F_T = F_1(P_1) + F_2(P_2) + \cdots + F_N(P_N) + \frac{dF_1}{dP_1}\Delta P_1 + \frac{dF_2}{dP_2}\Delta P_2 + \cdots + \frac{dF_N}{dP_N}\Delta P_N \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2F_1}{dP_1^2}(\Delta P_1)^2 + \frac{d^2F_2}{dP_2^2}(\Delta P_2)^2 + \cdots + \frac{d^2F_N}{dP_N^2}(\Delta P_N)^2\right) + \cdots \end{aligned} \tag{34}$$

Dans ce cas les termes de la série de Taylor d'ordre supérieur à 2 doivent être négligés. La dérivée seconde partielle des unités est normale et dépend explicitement des termes des puissances générées : $\frac{\partial^2 F_i}{\partial P_i \partial P_j} = 0$ avec $i \neq j$. Les contraintes nous imposent que la somme des puissances générées doit être égale à la demande totale et traitée comme dans l'équation (35) :

$$\sum_{i=1}^{N} \Delta P_i = 0 \tag{35}$$

$$\Delta P_x = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq x}}^{N} \Delta P_i \tag{36}$$

En substituant la relation (36) dans l'équation (34), en prenant les deux premiers termes seulement, on aura :

$$\Delta F_T = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq x}}^{N}\left[\frac{dF_i}{dP_i}-\frac{dF_x}{dP_x}\right]\Delta P_i$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\sum_{\substack{i=1\\ i\neq x}}^{N}\left[\frac{d^2F_1}{dP_1{}^2}(\Delta P_1)^2+\frac{d^2F_2}{dP_2{}^2}(\Delta P_2)^2+\cdots\right]\right. \tag{37}$$
$$\left.+\frac{d^2F_x}{dP_x{}^2}\left(\Delta P_1{}^2+\Delta P_2{}^2+\cdots+2\Delta P_1\Delta P_2+2\Delta P_1\Delta P_3+\cdots\right)\right\}$$

Le meilleur point opérationnel sera accompli quand la dérivée partielle $\frac{\partial \Delta F_T}{\partial \Delta P_i}=0, \forall i$ avec $\mathrm{i} \neq \mathrm{x}$.

$$\frac{\partial \Delta \mathrm{F_T}}{\partial \Delta \mathrm{P_1}} = 0 = \left(\frac{dF_1}{dP_1}-\frac{dF_x}{dP_x}\right)+\frac{d^2F_1}{dP_1^2}\Delta P_1+\frac{d^2F_x}{dP_x^2}\sum_{i\neq x}\Delta P_i$$
$$\frac{\partial \Delta F_T}{\partial \Delta P_2} = 0 = \left(\frac{dF_2}{dP_2}-\frac{dF_x}{dP_x}\right)+\frac{d^2F_2}{dP_2^2}\Delta P_2+\frac{d^2F_x}{dP_x^2}\sum_{i\neq x}\Delta P_i \tag{38}$$
$$\cdots \ldots$$

Avec :
$$F_i' = \frac{dF_i}{dP_i} \quad \text{et} \quad F_i'' = \frac{d^2F_i}{dP_i{}^2} \tag{39}$$

Les deux dérivées peuvent être évaluées pour un point opérationnel initial. Ensuite, les $N-1$ équations peuvent être écrites simultanément sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} F_1''+F_x'' & F_x'' & F_x'' & \cdots \\ F_x'' & F_2''+F_x'' & F_x'' & \cdots \\ F_x'' & F_x'' & F_3''+F_x'' & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta P_1\\ \Delta P_2\\ \Delta P_3\\ \cdots\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}F_1'-F_x'\\ F_2'-F_x'\\ F_3'-F_x'\\ \cdots\end{bmatrix} \tag{40}$$

Par conséquent, de (40), on peut tirer :

$$F_x''\Delta P_1+\cdots+F_x''\Delta P_{i-1}+(F_i''+F_x'')\Delta P_i+F_x''\Delta P_{i+1}+\cdots+F_x''\Delta P_{i+N-1} = -(F_i'-F_x') \tag{41}$$
$$i=1,\cdots,N \quad \text{et} \quad i\neq x$$

$$f_j(\Delta P_j) = F_j''.\Delta P_j+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq x}}^{N-1}F_x''.\Delta P_i+\left(F_j'-F_x'\right)=0 \tag{42}$$
$$j=1,\cdots,N-1 \quad \text{et} \quad j\neq x$$

où
$$F_j = \begin{bmatrix} f_1\\ \cdots\\ f_{N-1}\end{bmatrix}$$

La résolution peut se faire par l'algorithme de Newton-Raphson avec ΔP_i comme variable d'état.

Algorithme de calcul

Etape 1 : Lire les données du système

Etape 2 : Former les matrices F' et F''

Etape 3 : Initialiser ΔP_i^0

Etape 4 : Initialiser le compteur d'itération $\lambda = 1, \dots, m$

Etape 5 : Calculer ΔP_i avec $i = 1, \dots, N-1$ et $F_j = \begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$ ainsi

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Delta P_1} & \dots & \frac{\partial f_{N-1}}{\partial \Delta P_1} \\ \dots & 0 & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial \Delta P_{N-1}} & \dots & \frac{\partial f_{N-1}}{\partial \Delta P_{N-1}} \end{bmatrix}$$

Etape 6 : Si $\left|\Delta P_i^{k+1} - \Delta P_i^k\right| < \varepsilon$ aller à l'étape suivante. Si non, aller à l'étape 3

Etape 7 : Calculer $P_i = P_{i0} + \Delta P_i$ avec $i = 1, \dots, N$

Etape 8 : Calculer $P_x = P_D - \sum_{i=1}^{N-1} P_i$ avec $x = N$

10 Exemple d'application

Considérons un réseau à 3 nœuds générateurs, dont les fonctions coûts exprimées en $ par heure sont données par les expressions suivantes :

$$F_1(P_1) = 0{,}001562 P_1^2 + 7{,}92 P_1 + 561$$

$$F_2(P_2) = 0{,}00194 P_2^2 + 7{,}85 P_1 + 310$$

$$F_3(P_3) = 0{,}00482 P_3^2 + 7{,}97 P_1 + 78$$

Sous les contraintes :

$150 \le P_1 \le 600$ $100 \le P_2 \le 400$ $50 \le P_3 \le 200$

Les valeurs initiales de chaque générateur sont :

$P_{01} = 400\ MW$ $P_{02} = 300\ MW$ $P_{03} = 150\ MW$

L'équation de pertes de transmission est donnée par :

$$P_L = 0{,}00003 P_1^2 + 0{,}00009 P_2^2 + 0{,}00012 P_3^2$$

où les puissances générées et les pertes de transmission sont exprimées en MW. La consommation totale est de 850 MW.

10.1 Application de Lambda itérative

Supposons la valeur initiale $\lambda_0 = 8\ \$/MWh$.

Nous calculons l'Incrément des pertes de transmission :

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_1} = 2(0{,}00003)400 = 0{,}0240$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_2} = 2(0{,}00009)300 = 0{,}0540$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_3} = 2(0{,}00012)150 = 0{,}0360$$

Les pertes totales de transmission sont 15,6 MW.

$$E = \sum_{i=1}^{N} P_i - P_D - P_L = \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda\left(1 - \frac{\partial P_L}{\partial P_i}\right) - b_i}{2c_i} - P_D - P_L$$

$$= \frac{8(1-0{,}024) - 7{,}92}{2.0{,}001562} + \frac{8(1-0{,}054) - 7{,}85}{2.0{,}00194} + \frac{8(1-0{,}036) - 7{,}97}{2.0{,}00482} - 850 - 15{,}6$$

$$= -1000{,}898\ MW$$

$$E' = \sum_{i=1}^{3} \frac{1 - 2B_{ii}P_i}{2c_i} = \frac{8(1-0{,}024)}{2.0{,}001562} + \frac{8(1-0{,}054)}{2.0{,}00194} + \frac{8(1-0{,}036)}{2.0{,}00482} = 656{,}2343\ MW$$

Alors :

$$\lambda^{it+1} = \lambda^{it} - \frac{E(\lambda^{it})}{E'(\lambda^{it})} = 8 - \frac{-1000{,}898}{656{,}2343} = 9{,}5252\ \$/MWh$$

Par conséquent :

$$P_1 = \frac{9{,}5252(1-0{,}024) - 7{,}92}{2.0{,}001562} = 440{,}65\ MW$$

$$P_2 = \frac{9{,}5252(1-0{,}054) - 7{,}85}{2.0{,}00194} = 299{,}185\ MW$$

$$P_3 = \frac{9{,}5252(1-0{,}036) - 7{,}97}{2.0{,}00482} = 125{,}756\ MW$$

Nous calculons l'Incrément des pertes de transmission pour la deuxième itération :

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_1} = 2(0{,}00003)400{,}65 = 0{,}0264$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_2} = 2(0{,}00009)299{,}185 = 0{,}0538$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_3} = 2(0{,}00012)125{,}756 = 0{,}0301$$

Les pertes totales de transmission sont alors 15,78 MW.

$$E=\frac{9{,}5252(1-0{,}0264)-7{,}92}{2.0{,}001562}+\frac{9{,}5252(1-0{,}0538)-7{,}85}{2.0{,}00194}+\frac{9{,}5252(1-0{,}0301)-7{,}97}{2.0{,}00482}-850-15{,}78=-1{,}1845\ MW$$

$$E'=\frac{9{,}5252(1-0{,}0264)}{2.0{,}001562}+\frac{9{,}5252(1-0{,}0538)}{2.0{,}00194}+\frac{9{,}5252(1-0{,}0301)}{2.0{,}00482}=656{,}1296\ MW$$

Alors :

$$\lambda^{it+1}=9{,}5252-\frac{-1{,}1845}{656{,}1296}=9{,}527\ \$/MWh$$

Par conséquent :

$$P_1=\frac{9{,}527(1-0{,}0264)-7{,}92}{2.0{,}001562}=443{,}91\ MW$$
$$P_2=\frac{9{,}527(1-0{,}0538)-7{,}85}{2.0{,}00194}=300{,}11\ MW$$
$$P_3=\frac{9{,}527(1-0{,}0301)-7{,}97}{2.0{,}00482}=131{,}767\ MW$$

Le tableau suivant résume le processus itératif utilisé pour résoudre ce problème.

Itérations	$P_1\ [MW]$	$P_2\ [MW]$	$P_3\ [MW]$	$P_L\ [MW]$	$\lambda\ [\$/MWh]$
0	400	300	150	15.6	9.5252
1	440.65	299.18	125.75	15.78	9.527
2	433.91	300.11	131.76	15.84	9.5285
3	435.87	299.94	130.42	15.83	9.5283
4	435.13	299.99	130.71	15.83	9.5284

10.2 Application du Gradient d'ordre 1

Nous considérons la troisième unité comme unité dépendante. Alors :

$$\Delta F=\left(\frac{dF_1}{dP_1}-\frac{dF_3}{dP_3}\right)\Delta P_1+\left(\frac{dF_2}{dP_2}-\frac{dF_3}{dP_3}\right)\Delta P_2=(-0{,}2464)\Delta P_1+(-0{,}4020)\Delta P_2$$

et $F=8200{,}47\ \$/h$

Nous souhaitons diminuer F (ΔF négatif), de ce fait, on doit augmenter P_2 (ΔP_2 positif) puisque son coefficient est négatif. Donc, on doit ajouter 50 MW à P_2 et diminuer P_3 de 50 MW.

$$\left.\begin{aligned}P_1&=400\ MW\\P_2&=350\ MW\\P_3&=100\ MW\end{aligned}\right\}\ 2^{\text{ème}}\text{ itération}$$

Nous obtenons :

$$\Delta F=(0{,}2356)\Delta P_1+(-0{,}2740)\Delta P_2$$

$$F=8197{,}27\ \$/h$$

Le tableau suivant résume le processus itératif utilisé pour résoudre ce problème.

Itérations	$P_1\ [MW]$	$P_2\ [MW]$	$P_3\ [MW]$	$F\ [\$/h]$	$\Delta P_2\ [MW]$	$\Delta P_3\ [MW]$	$\Delta P_3\ [MW]$
1	400	300	150	8200,47	0	+50	-50
2	400	350	100	8197,27	0	-25	+25
3	400	325	125	8194,63	0	+12,5	-12,5
4	400	337,5	112,5	8194,92	-10	0	+10
5	390	337,5	112,5	8194,38	+5	0	-5
6	395	337,5	171,5	8194,48	0	-2,5	+2,5
7	395	335	120	8194,38			

10.3 Application du Gradient d'ordre 2

Nous calculons les premières dérivées de la fonction F_i :

$$F_1' = 9{,}1696\ \$/MWh \qquad F_1'' = 0{,}003124\ \$/MWh/MW$$

$$F_2' = 9{,}0140\ \$/MWh \qquad F_2'' = 0{,}003880\ \$/MWh/MW$$

$$F_3' = 9{,}4160\ \$/MWh \qquad F_3'' = 0{,}009640\ \$/MWh/MW$$

Nous utilisons l'équation (40) :

$$\begin{bmatrix} F_1'' + F_3'' & F_3'' \\ F_3'' & F_2'' + F_3'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_1' - F_3' \\ F_2' - F_3' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0{,}012764 & 0{,}00964 \\ 0{,}009640 & 0{,}01352 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0{,}2464 \\ -0{,}4020 \end{bmatrix}$$

La solution est :

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6{,}8301 \\ 34{,}6030 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$P_1 = 400 - 6{,}8301 = 393{,}17\ MW$$

$$P_2 = 300 + 34{,}603 = 334{,}60\ MW$$

$$P_3 = 850 - P_1 - P_2 = 122{,}23\ MW$$