

-TD0-Connaisances préalables recommandées

Auteur : -SEKHANE .H-

* Remarque et remerciement : On tient à remercier Mr : A. Fizazi, université de Bechar pour son TD disponible sur le net sous le titre « Rappel sur le calcul vectoriel » ; Ce TD est extrait de ce dernier avec quelques modifications.

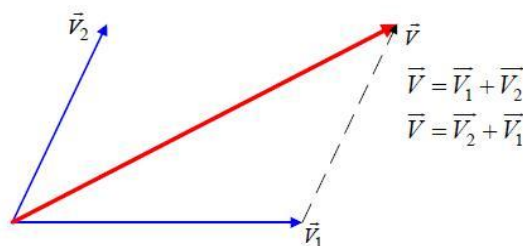
1) Calcul vectoriel:

1-1 Grandeur scalaire: toujours exprimée par une valeur numérique suivie de l'unité correspondante. **Exemple** : volume, masse, température, charge électrique, énergie...etc.

1-2) Grandeur vectorielle : On appelle grandeur vectorielle toute grandeur qui nécessite un sens, une direction, un point d'application en plus de sa valeur numérique appelée intensité ou module. **Exemple** : la vitesse, la force, le champ électrique...etc.

1-3) Somme géométrique des vecteurs : Cette opération fait appel au dessin.

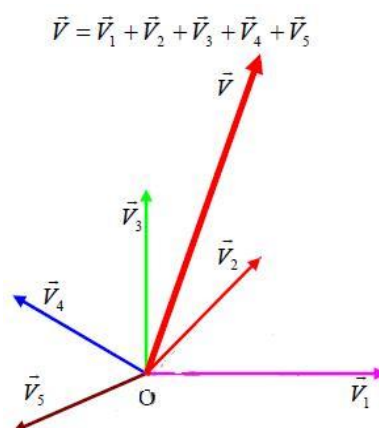
1-3-1) Somme de deux vecteurs :



On calcule le module du vecteur résultant à partir de la **loi des cosinus** :

$$D = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \theta}$$

1-3-2) Somme de plusieurs vecteurs :



1-3-3) Soustraction de deux vecteurs :

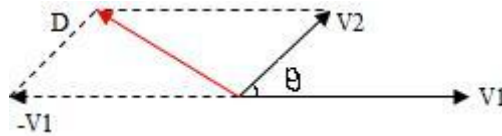


Fig. 3. Soustraction de deux vecteurs.

$$\vec{D} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \Rightarrow \vec{D} = \vec{V}_2 + (-\vec{V}_1)$$

1-4) Composantes d'un vecteur : Chaque vecteur peut être considéré comme étant la somme de 2 vecteurs ou plus (nombre de possibilités illimité). Dans le plan, soit le repère $\mathcal{R}(O; i, j)$

a) En coordonnées rectangulaires : on décompose le vecteur V suivant l'axe des X et l'axe des Y, comme indiqué sur la figure 4.

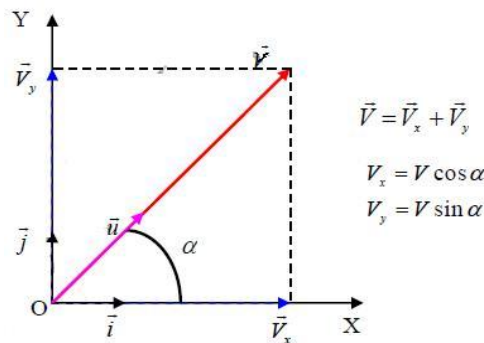


Fig. 4. Composantes d'un vecteur.

En désignant les deux vecteurs unitaires \vec{i} et \vec{j} , respectivement dans les directions des deux axes OX et OY, nous pouvons écrire :

$$\vec{V}_x = \vec{i}V_x, \vec{V}_y = \vec{j}V_y$$

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y; \vec{V} = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y;$$

$$\vec{V} = \vec{i}V \cos \alpha + \vec{j}V \sin \alpha \Rightarrow \vec{V} = V(\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha)$$

$$\text{Où : } V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

En utilisant les coordonnées x et y nous pouvons aussi écrire : $V = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exo 1: Trouver la somme et la différence des deux vecteurs $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}(O; i, j)$.

b) Dans l'espace : dans le repère $\mathcal{R}(O; i, j, k)$ (base orthonormée), nous remarquons que :

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z \Rightarrow \vec{V} = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z$$

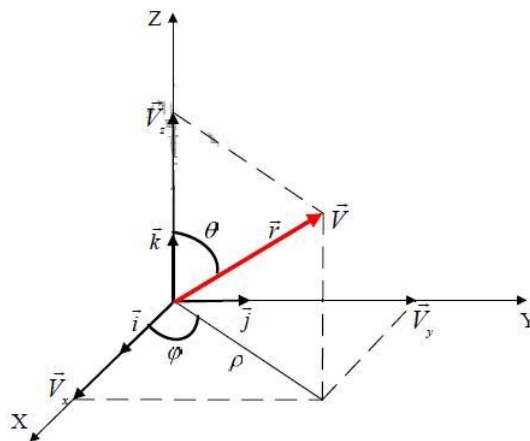


Fig. 5. Composantes d'un vecteur dans l'espace.

Nous pouvons assurer géométriquement que :

$$\cos \theta = \frac{V_z}{r} \Rightarrow V_z = r \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{\rho}{r} \Rightarrow \rho = r \sin \theta$$

$$\cos \varphi = \frac{V_x}{\rho} \Rightarrow V_x = \rho \cos \varphi \Rightarrow V_x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{V_y}{\rho} \Rightarrow V_y = \rho \sin \varphi \Rightarrow V_y = r \sin \theta \sin \varphi$$

En résumé :

$$\begin{aligned} V_x &= V \sin \theta \cos \varphi \\ V_y &= V \sin \theta \sin \varphi \\ V_z &= V \cos \theta \end{aligned}$$

Le module : $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

Ou en coordonnées cartésiennes : $V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Remarque : En notant par α et β les angles respectifs formés par le vecteur \vec{V} avec les axes OX et OY , et de la même façon que nous avons obtenu les équations précédentes il vient :

$$\begin{aligned} V_x &= V \cos \alpha \\ V_y &= V \cos \beta \\ V_z &= V \cos \theta \end{aligned}$$

Nous pouvons déduire l'expression :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \theta = 1$$

Exo 2 : Trouver la distance qui sépare les deux points A(10,-4,4) et B(10,6,8) représentés dans le repère $\mathcal{R}(O; i, j, k)$.

1-5) Produit scalaire : On appelle produit scalaire de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 le nombre réel :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_1 \cdot V_2 \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$$

Exemple : Le travail de la force \vec{F} qui provoque un déplacement \vec{AB} est donné par la formule $W = F \cdot AB \cdot \cos(\vec{F}, \vec{AB})$ (on lit W est le produit scalaire de \vec{F} par \vec{AB}), on écrit :

$$\vec{W} = \vec{F} \cdot \vec{AB} \Leftrightarrow W = F \cdot AB \cdot \cos(\vec{F}, \vec{AB})$$

***Expression analytique du produit scalaire :**

a) En coordonnées rectangulaires : Soit les deux vecteurs $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}(O; i, j)$.

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}) \cdot (x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}) = x_1 \cdot x_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{i} + x_1 \cdot y_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + x_2 \cdot y_1 \cdot \vec{j} \cdot \vec{i} + y_1 \cdot y_2 \cdot \vec{j} \cdot \vec{j}$$

Tel que :

$$\vec{i} \perp \vec{j} \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 ; \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1 ; \text{ alors : } \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

b) Dans l'espace : Soit les deux vecteurs $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}(O; i, j, k)$.

$$\text{On a : } \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{0} ; \vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 ; \text{ alors : } \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

c) Propriétés du produit scalaire :

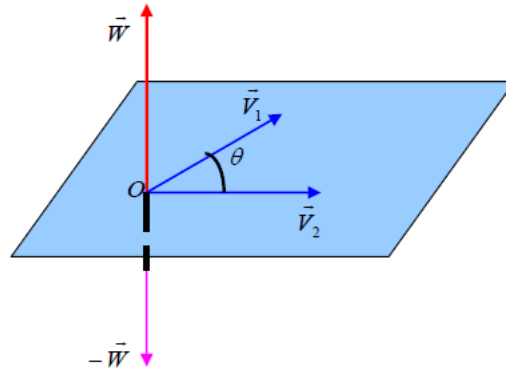
1) **Commutatif :** $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$

2) **Non associatif :** $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3)$ n'existe pas car le résultat serait un vecteur.

3) **Distributif :** (par rapport à la somme vectorielle) $\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3$

Exo 3 : Calculer l'angle compris entre les deux vecteurs : $\vec{V}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{V}_2 = -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

1-6) Produit vectoriel : On appelle produit vectoriel de deux vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 le vecteur \vec{W} perpendiculaire au plan qu'ils constituent. Nous écrivons par convention : $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$



Le module est donné par : $|\vec{W}| = V_1 \cdot V_2 \sin(\angle(\vec{V}_1, \vec{V}_2))$

$\begin{aligned} \vec{i} \wedge \vec{i} &= \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k}; \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j} \wedge \vec{k} = 1 \end{aligned}$
--

Remarque : le module $|\vec{W}| = V_1 \cdot V_2 \sin(\angle(\vec{V}_1, \vec{V}_2))$ représente l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs, ce qui laisse sous entendre la possibilité de lier un vecteur à une certaine surface.

a) Calcul du produit vectoriel de deux vecteurs : Soit $\vec{V}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

En utilisant les coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}(O; i, j, k)$, on peut écrire :

$$\vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{W} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$$

Le module du vecteur est donné par l'expression :

$$|\vec{W}| = \sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}$$

b) Propriétés du produit vectoriel :

1) **Anticommutatif :** $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$

2) **Non associatif :** $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \neq (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \wedge \vec{V}_3$

3) **Distributif :** (par rapport à la somme vectorielle) $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) + (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3)$

Exo 4 : Calculer le vecteur \vec{W} , produit des deux vecteurs : $\vec{V}_1 = (2, 1, -1)$ et $\vec{V}_2 = (1, 0, -2)$, en déduire l'angle θ compris entre eux.

1-7) Produit mixte : Le produit mixte de trois vecteurs \vec{V}_1, \vec{V}_2 et \vec{V}_3 est la quantité scalaire définie par :

$$\vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (y_2 z_3 - y_3 z_2)x_1 - (x_2 z_3 - x_3 z_2)y_1 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)z_1$$

2) Vecteur (opérateur) nabla ($\vec{\nabla}$) : L'opérateur différentiel vectoriel nabla est défini par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$: sont respectivement les dérivées partielles par rapport à x , y et z .

* Nous allons définir le gradient, la divergence et le rotationnel à l'aide de cet opérateur.

3) Gradient : En coordonnées cartésiennes le gradient d'une fonction scalaire f est défini par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Exo 5 : Calculer le gradient de la fonction $f(x, y, z) = 3x^2y^3z$.

4) Divergence : La divergence d'un vecteur \vec{V} est défini par le produit scalaire :

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Exo 6 : Calculer la divergence du vecteur : $\vec{V}(x, y, z) = 2xy\vec{i} - 3yz^2\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$

5) Rotationnel : Le rotationnel d'un vecteur \vec{V} est défini par le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

Exo 7 : Calculer le rotationnel du vecteur : $\vec{V}(x, y, z) = 2xy\vec{i} - 3yz^2\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$

6) Le Laplacien :

$$\vec{\Delta} = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

6-1) Le Laplacien scalaire : Le Laplacien d'une fonction scalaire est égal à la divergence de son gradient :

$$\vec{\Delta} f = \overrightarrow{\text{div}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla}^2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

6-1) Le Laplacien vectoriel: Le Laplacien d'un vecteur \vec{V} est égal à la divergence de son gradient :

$$\vec{\Delta} \wedge \vec{V} = \overrightarrow{\text{div}}(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla}^2(\vec{V}) = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \vec{i} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \vec{j} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \vec{k}$$

7) Relations utiles entre les opérateurs :

$$\overrightarrow{\text{div}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = 0 \quad ; \quad \forall \vec{V}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = 0 \quad ; \quad \forall f$$

$$\overrightarrow{\text{div}}(\lambda \vec{V}) = \lambda \overrightarrow{\text{div}} \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} \lambda \cdot \vec{V}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\lambda \vec{V}) = \lambda \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} \lambda \wedge \vec{V}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{\text{div}} \vec{V}) - \vec{\Delta} \vec{V}$$

$$\overrightarrow{\text{div}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$$

$$\overrightarrow{\text{div}}(\vec{A} + \vec{B}) = \overrightarrow{\text{div}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{div}} \vec{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{div}} \vec{V}) = \overrightarrow{\text{div}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$