Commande intelligente

Partie I : Logique floue

1. Introduction à la logique floue

- L'homme perçoit, raisonne, imagine et décide à partir de modèles ou représentations. Sa pensée n'est pas binaire. L'idée de la logique floue est de « capturer » l'imprécision de la pensée humaine et de l'exprimer avec des outils mathématiques appropriés.
- L'existence d'une logique permettant de traiter des variables non exactes comprise entre « 0 » et « 1 » à permis le réglage et la commande de processus mal maîtrisables par les méthodes classiques.
- La logique floue donne la possibilité de modéliser des modes imprécis (au lieu des modes précis) du raisonnement, ce qui jeu un rôle important dans la prise de décisions rationnelles dans un environnement incertain et imprécis.
- La logique floue est une extension de la logique classique qui permet la modélisation des imperfections des données et se rapproche dans une certaine mesure de la flexibilité du raisonnement humain.
- La logique floue diffère de la logique classique parce qu'elle permet des définitions partielles ou "floues" des règles de contrôle.
- La logique floue est une extension de la logique booléenne créée par Lotfi Zadeh en 1965, en se basant sur sa théorie mathématique des ensembles flous, qui est une généralisation de la théorie des ensembles classiques. En introduisant la notion de degré dans la vérification d'une condition, nous permettons à une condition d'être dans un autre état que vrai ou faux.

- Dans la logique binaire une variable ne peut prendre que deux valeurs vraie **1** ou fausse **0.** Les propositions énoncées en prémisse d'une règle et en conclusion ne peuvent être, dans ce cas, que totalement vraies ou bien totalement fausses ***(si P, alors C).*** Contrairement, la logique floue proche du raisonnement humain ne suit pas la logique basée sur le ***(vrai)*** ou le ***(faux).*** C'est une logique linguistique, floue ou approximative. Les valeurs de vérité sont des mots du langage courant ***plutôt vrai, presque faux,*** etc

- **Qu'est-ce que la logique floue?**

D'après le terme « logique floue » on peut donner deux définitions

- La première est que la logique floue intervient dans la manipulation de connaissances insuffisantes et imprécises. Elle permet la représentation et le traitement de ces dernières, afin de pouvoir traiter des systèmes complexes.
- La seconde représente une extension de la logique classique, dans le but de raisonner sur des connaissances imparfaites.

- **Idée de l'utilisation de la logique floue**

- Comme la science s'appuie sur la notion de mesure, les questions qui se posent : Comment représenter les valeurs non mesurables? Comment représenter ce qui est incertain ou subjectif ? Comment représenter les termes du langage humain ?
- Le flou n'est pas imprécis. Si une donnée n'est pas connue précisément, elle peut être exprimée par un intervalle de confiance précis. Cet intervalle est un ensemble de valeurs possible pour la donnée
- Elle est très utile lorsque: le modèle mathématique du problème à traiter n'existe pas,
- Ou lorsque le modèle mathématique existe mais difficile à implémenter
- Ou lorsque le modèle mathématique est trop complexe pour être évalué assez rapidement pour des opérations en temps réel
- Lorsque des experts humains sont disponibles pour fournir des descriptions subjectives du comportement du système avec des termes en langage naturel.
- Lorsqu'il y a de larges incertitudes et des variations inconnues dans les paramètres et la structure du système

- **Caractéristiques de la logique floue**

- Le modèle mathématique du fonctionnement du processus n'est pas nécessaire. Par exemple, dans l'industrie, les opérateurs résolvent souvent des problèmes complexes de manière relativement simple et sans avoir besoin de modéliser le système. De même, tout le monde sait qu'un modèle mathématique n'est pas nécessaire pour conduire une voiture et pourtant une voiture est un système très complexe.
- L'utilisation des variables linguistiques pluton que des variables numérique

- Caractérisation des relations simples entre les variables par des citations conditionnelles floues vues comme une collection de contraintes
- Caractérisation des relations complexes par des algorithmes flous

➢ **Avantage de la logique floue:**

- Solution de problèmes multivariables complexes,
- Robustesse vis à vis des incertitudes;
- Possibilité d'intégration du savoir de l'expert.

➢ **Domaine d'application de la logique floue**

La première application de la logique floue a été développée en Europe par Mamdani, en 1975 (Commande d'un moteur a vapeur)
La logique est maintenant appliquée dans divers domaines,

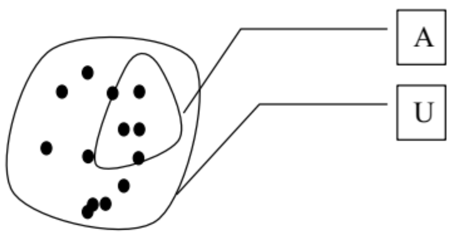
- Transport : véhicule automobiles (transmission automatique, véhicule sans pilote, métro autonome)
- Procédés industriels : Cimenterie, usine de traitement des aux, régulation de la température d'un réacteur chimique, robotiques,
- Systèmes de décision, diagnostic industriel, contrôle de processus, robotiques

➢ **Historique de la logique floue**

- **1965** : le concept de la logique floue est introduit par Pr. Lotfi Zadeh (Berkeley), où il définit les ensembles flous et les opérateurs associés; *Fuzzy Set Theory*
- **1970** : les premières applications étaient basées sur la notion d'expertise qui permet de quantifier le flou à partir de connaissances acquises antérieurement; Systèmes experts pour l'aide à la décision en logique floue et au diagnostic dans le domaine médical, commercial, orientation professionnelle, etc
- **1974-1975:** la première application industrielle apparaît; le professeur Mamdani développait une stratégie pour le contrôle des procédés et les résultats obtenus étaient appliqués sur la conduite d'un moteur à vapeur. Régulation floue d'une chaudière à vapeur réalisée par Mamdani à Londres.
- **1978- 1980:** la société Danoise F.L. Smidth a réalisé le contrôle d'un four à ciment. C'est en ce moment qu'apparaît la première véritable application industrielle de la logique floue.

- Au Japon, la logique floue connaît son véritable essor à la fin des années 80 dont la recherche n'est pas seulement théorique mais également très applicative dans plusieurs secteurs.
- **1985- 1987:** les japonais sont les premiers à introduire des produits grand public, Métro de Sendai Hitachi au Japon. « Fuzzy Logic Inside» (i.e. machine à laver, appareils à photo, etc.).
- **1990-1992:** En Allemagne des applications apparaissent en grand nombre comme la conduite de hauts-fourneaux Dunkerque et au Portugal l'apparition de l'Usine de Papier et de Produits de consommation courante: Aspirateurs, machines à laver, système de climatisation, etc
- Enfin, c'est le grand pas de généralisation de l'utilisation de la logique floue dans les systèmes automobiles embarqués (climatisation, suspension, etc.), système de contrôle/ commande dans la plupart des domaines industriels de production, appareils électroménagers, etc

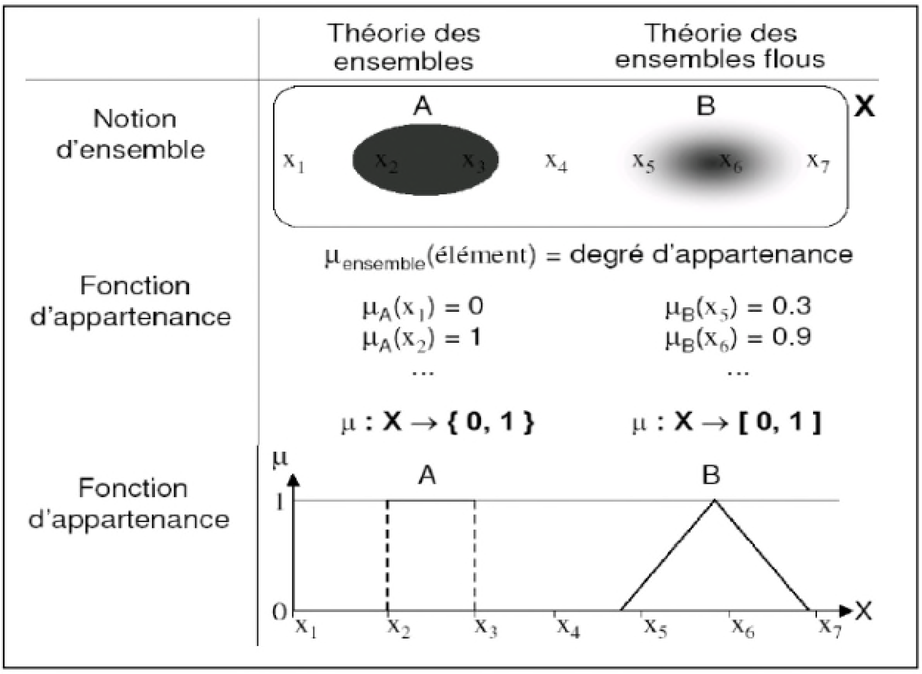
Ensembles flous: Soit l'ensemble U des valeurs de la variable x, appelé l'univers du discours; un sous-ensemble A de U et une fonction $\mu_A(x)$ comprise entre 0 et 1. Cette fonction $\mu_A(x)$ quantifie le degré avec lequel chaque élément x de U appartient à A.



Ensemble flou

- U : l'univers du discours.
- A : sous-ensemble de U.
- -Si $\mu_A(x) = 1$ x appartient complètement au sous-ensemble A_i
- -Si $\mu_A(x) = 0$ x n'appartient pas au sous-ensemble A
- -Si $0 < \mu_A(x) < 1$ x appartient partiellement au sous-ensemble A

Le sous-ensemble A est donc un ensemble flou et $\mu_A(x)$ est appelé fonction d'appartenance



Comparaison ensemble classique – ensemble flou

2.. Exemples introductifs

Exemple 1: Prenons un exemple : comment déterminer si une personne est âgée ou non ? Ce problème est difficile à cerner, une personne qui a 60 ans est-elle âgée ? Et qu'en est-il d'une personne qui a 70 ans, 80 ans ?

En logique classique on va être obligé de définir une frontière qui va déterminer l'ensemble des personnes âgées, disons qu'une personne est dite âgée si elle a 80 ans ou plus. Si par exemple Mohamed a 80 ans et sa femme 79 ans, Mohamed est âgé et sa femme ne l'est pas.

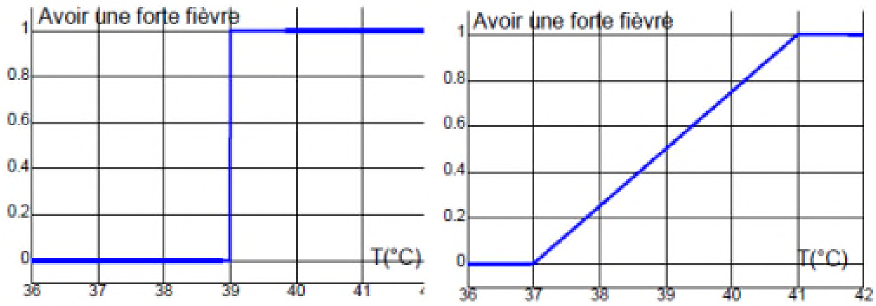
En logique floue Si on utilise un raisonnement flou, on a un jugement bien moins radical, plus nuancé :

- Mohamed est « certainement » âgé.
- Sa femme est « quasiment » âgée.
- Leur petit enfant ne l'est « pas du tout »

Définissons *A* l'ensemble des personnes âgées, on voit que cet ensemble diffère entre logique classique et logique floue comme le montra le tableau suivant:

	Appartenance à l'ensemble A	
Personne	**Logique classique**	**Logique floue**
Mohamed	Vrai	"certainement"
Sa femme	Faux	"quasiment"
Petit enfant	Faux	"pas du tout"

Exemple 2 : A quelle température un patient a-t-il une forte fièvre ?



(a) Logique classique (b) Logique floue

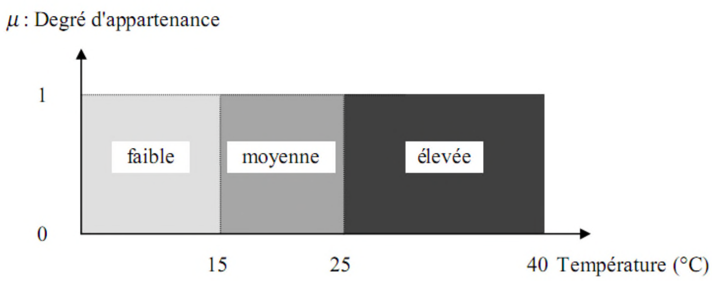
- **<u>La logique classique</u>** détermine qu'un patient ayant 39 ou plus à une forte fièvre, en dessous, il n'a pas du tout de fièvre.
- **<u>La logique floue</u>** permet des degrés de vérification de la condition :
  - La fièvre est considérée comme nulle en dessous de 37 (température normale du corps humain), on dit qu'elle est élevée à 0% en dessous de 37 degrés.
  - La fièvre est considérée comme très forte à partir de 41 degrés. Elle est donc très forte à 100% au-dessus de 41 degrés.
  - La fièvre est très forte à 50% à une température de 39 degrés, elle est très forte à 25% à une température de 38 degrés.

Cette représentation est plus souple que la logique classique, elle permet de mieux traiter et modéliser des situations réelles.

En fait au lieu d'avoir une évaluation numérique de la solution, elle va permettre une évaluation qualitative, plus proche du langage naturel.

Par exemple, le fait de dire que la fièvre est très forte à une température de 39 découlera d'un degré de vérité de 0.5.

Exemple 3 : exemple de la température dans une chambre



En logique booléenne (Logique classique ou de Boole), le degré d'appartenance μ ne peut prendre que deux valeurs « 0 ou 1 » la température peut être :

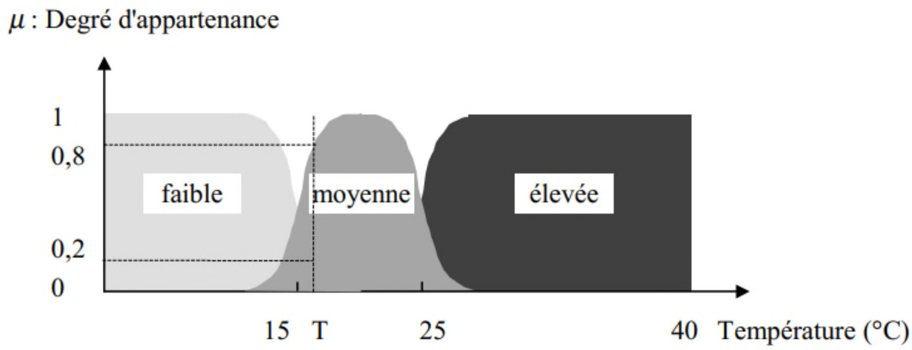
- faible : $\mu_{faible}(T)=1,\ \mu_{moyenne}(T)=0,\ \mu_{élevée}(T)=0$
- moyenne : $\mu_{faible}(T)=0,\ \mu_{moyenne}(T)=1,\ \mu_{élevée}(T)=0$
- élevée : $\mu_{faible}(T)=0,\ \mu_{moyenne}(T)=0,\ \mu_{élevée}(T)=1$

Elle ne peut pas prendre deux qualificatifs à la fois.

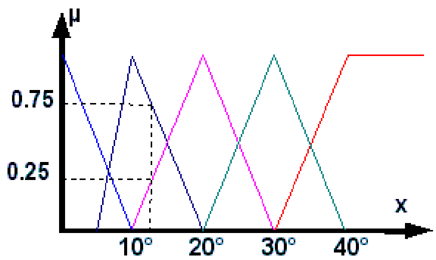
- En logique floue, le degré d'appartenance devient une fonction qui peut prendre une valeur réelle comprise entre 0 et 1.
- $\mu_{Moyenne}(T)$, par exemple, permis de quantifier le fait que la température puisse être considérer comme moyenne.

Dans ce cas, la température 18C° peut être considérée, à la fois, comme faible avec un degré d'appartenance de 0.2 et comme moyenne avec un degré d'appartenance de 0.8 (voir la figure ci-dessous), et on écrit :

$$\mu_{Faible}(T)=0.2,\ \ \mu_{Moyenne}(T)=0.8 \text{ et } \mu_{Elevée}(T)=0$$



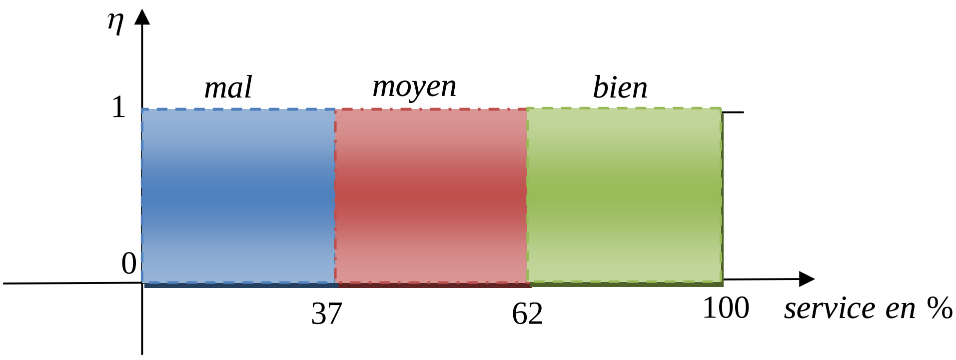
- En logique classique, le passage de Faible à Moyenne serait brusque. Une température de 15° serait par exemple faible, alors qu'une température de 16° serait moyenne. Et ça anormal !
- Parfois, on a besoin d'introduire d'autre ensembles flous par exemple on peut ajouter en plus des variables « faible » « moyenne » « élevée », les variable « très faible » et « très élevée »



Exemple 4 : L'exemple est le service dans un restaurant : un client entre à ce restaurant et il va manger et boire quelque chose, pendant ce temps ce client suit le service, on dit que cette personne va porter à son esprit une idée sur ce restaurant, donc il y a trois probabilités possibles :

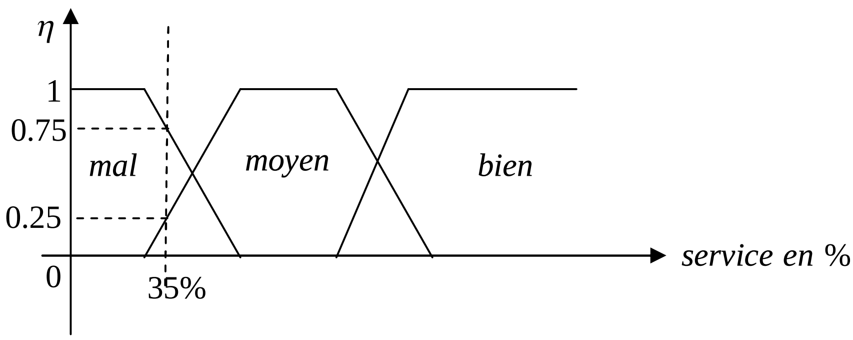
- Soit il dit que le service est mal,
- Soit il dit que le service est moyen,
- Ou soit il dit que le service est bien

- Si on utilise la logique de Boole, on va donner à chaque variable (mal, moyen, bien) soit la valeur 0 ou soit la valeur 1.
- Si on représente ces variables dans un plan, on ne trouve pas d'intersection entre les courbes de ces variables (voir la figure ci-dessous), avec η est le degré d'appartenance.



Présentation du niveau du service dans un restaurent (logique classique)

On remarque que cette représentation ne donne pas beaucoup d'informations sur l'exemple. Mais la logique floue donne plus d'informations (voir la figure ci-dessous)



Présentation du niveau du service dans un restaurent (logique floue)

Par exemple un service de 35% est de 0.25 mal et de 0.75moyen, par contre si on a utilisé la logique classique on obtient seulement 1 pour le service mal et les autres sont nulles, pour cela on remarque bien la différence entre la logique classique et la logique floue.

En conclusion,

- *Intérêt de la logique floue réside dans sa capacité à traiter et à manipuler l'imprécision et l'incertitude de l'information issue de l'aptitude de l'homme à décider, d'une façon pertinente, malgré la nature floue des connaissances disponibles.*
- *En effet, l'opérateur humain peut définir des stratégies de commande de façon linguistique avec un minimum de connaissance sur le processus sous forme de règles énoncées en langage naturel.*
- *Si «Observation», Alors «Décision» où Si «Prémisse», Alors «Conclusion», qui peuvent être utilisées pour l'identification des systèmes comme pour leurs commandes*

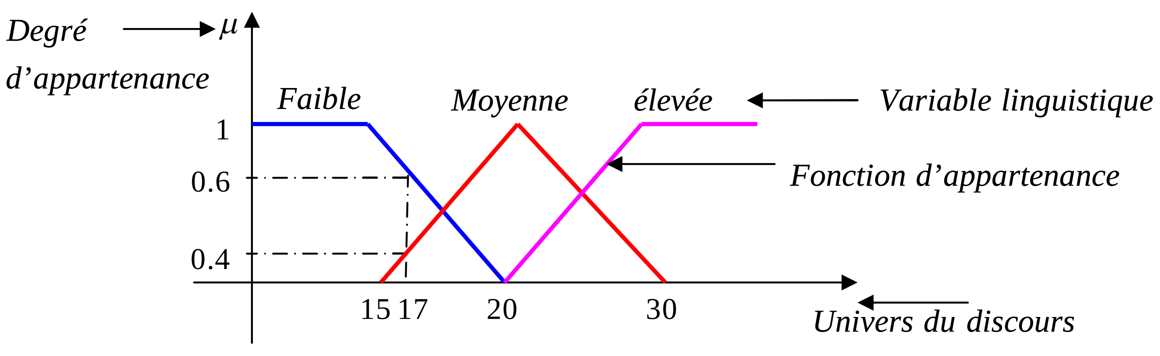
Exemple courant de quelques règles de conduite qu'un conducteur suit avec *Si-Alors*

Si le feu est rouge	si ma vitesse est élevée	et si le feu est proche	alors je freine fort
Si le feu est rouge	si ma vitesse est faible	et si le feu est loin	alors je maintiens ma vitesse
Si le feu est orange	si ma vitesse est moyenne	et si le feu est loin	alors je freine doucement
Si le feu est vert	si ma vitesse est faible	et si le feu est proche	alors j'accélère

3. Notions fondamentales sur la théorie des ensembles flous

Les éléments de base de la logique floue sont:

- Les variables linguistiques.
- Les ensembles flous.
- Les degrés d'appartenance.
- Les fonctions d'appartenance.
- Les règles floues.
- L'univers du discours



Bases générales de la logique floue

3.1. Variable linguistique

Une variable linguistique est une variable dont les valeurs sont des mots ou des phrases exprimées dans une langue naturelle ou une langue artificielle.

On appelle Variable linguistique *un triplet* $\{V, T_V, X_V\}$ *tel que :*

- V *est le nom de la variable linguistique (âge, taille, masse, erreur , température, . . .)*
- X_V c'est le domaine physique associé à la variable V , il est aussi appelé univers de discours, c'est, l'ensemble de toutes les valeurs numériques que peut prendre la variable numérique associée à la variable linguistique V .Exemple : X_V peut être défini comme étant l'intervalle [0…120] pour la variable linguistique *âge*
- T_V *est un ensemble de sous-ensembles flous de* X_V *qui caractérisent V*

Exemple : $X_V = \{faible, moyenne, èlevée\}$ peut être défini pour la variable *température*

Exemple (La taille) *La variable linguistique de la taille (humaine) peut être dé finie, par exemple, par le triplet suivant :* $\{taille, [0; 250], (ftrès\ petit, \ petit, \ moyen, \ grand, \ très\ grandg\ )\}$

3.2. Ensemble flou :

Lorsqu' on divise le domaine de variation d'une variable à des sous domaines, chaque domaine est nommé par un terme spécial et chaque terme forme un ensemble flou.

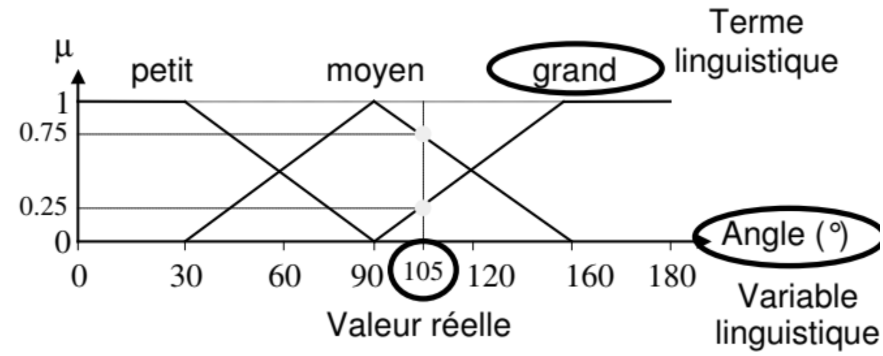
- Si on prend l'exemple précédent (la température), le domaine de variation de la variable température est divisé en trois ensembles flous : $\{faible, moyenne, èlevée\}$.

Un ensemble flou est complètement décrit par sa fonction d'appartenance comme suit :

- $\mu_A(x)$ $A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in U\}$ cas continu
- $U = \{ x_i / i = 1,2,\dots,n \}$, cas discret
- $A = \{ \mu_A(x_1)/ x_1, \mu_A(x_2)/ x_2, \dots, \mu_A(x_n)/ x_n \}$ liste de paires ordonnées

3.3. Degré d'appartenance :

Nous disons qu'un élément x appartient à un ensemble flou A avec un degré d'appartenance η compris entre 0 et 1, donné par une fonction d'appartenance.



$\mu_{moyen}(105) = 0.75,\ \mu_{grand}(105) = 0.25$

Un angle de 105° est appartient à l'ensemble flou 'moyen' avec un degré d'appartenance 0.75 et au même temps à l'ensemble 'grand' avec un degré d'appartenance 0.25.

3.4. Univers du discours :

L'ensemble de toutes les valeurs numériques associées à la variable linguistique. Dans l'exemple précédent, l'intervalle [0…30] représente l'univers du discours de la variable linguistique 'Température'.

3.5. Fonction d'appartenance :

Une fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ est une courbe qui définit comment chaque point dans l'univers du discours est tracé à une valeur d'appartenance entre 0 et 1.

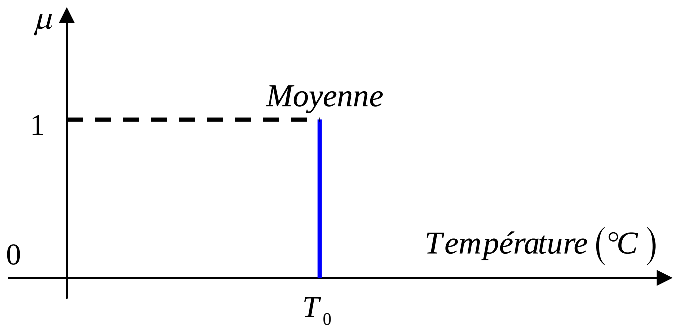
- Dans l'exemple précédent, Il y a trois ensembles floues 'faible', 'moyenne', 'élève', chaque ensemble est représenté par une fonction d'appartenance qui varie entre 0 et 1.

3.5.1. Formes des fonctions d'appartenances :

- La variable linguistique 'Angle' par exemple, dans l'exemple précédent ainsi que les termes petit, moyen, grand, sont définis par des fonctions d'appartenance qui portent respectivement les noms de variable linguistique.
- Les fonctions d'appartenance peuvent théoriquement prendre n'importe quelle forme, toutefois, elles sont souvent définies par des segments de droites, et dites « linéaires par morceaux ».
- Les fonctions d'appartenances des formes singleton, triangulaires, trapézoïdales, ou Gaussiennes sont les plus souvent utilisées à cause de :

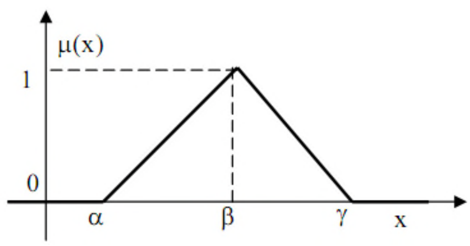
• Elles sont simples • Elles comportent des points permettant de définir les zones où la notion est vraie, les zones où elle est fausse,

- **Fonction d'appartenance singleton :** Les fonctions d'appartenance peuvent être égales à 1 pour une seule valeur de la variable linguistique et égale à 0 ailleurs, et prennent alors le nom de « fonctions d'appartenance singletons ».



Cette fonction est représentée sous cette forme $\mu(x) = \begin{cases} 1 & si\ T = T_0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

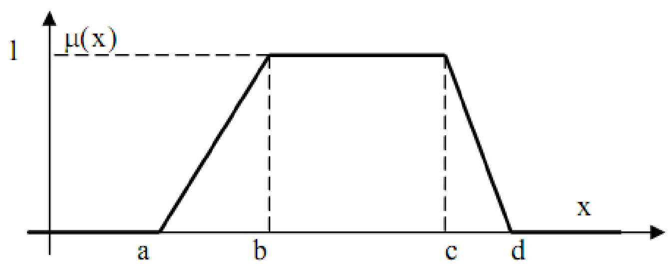
- **Fonction d'appartenance monotone croissante :** Elle est définie par trois paramètres $(\alpha,\ \beta, \gamma)$, qui déterminent les coordonnées des trois sommets.



Mathématique, elle est définie comme suit

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 \ \ si\ \ x \le \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \ \ si\ \ \alpha < x \le \beta \\ \dfrac{\gamma-x}{\gamma-\beta} \ \ si\ \ \beta < x \le \gamma \\ 0 \ \ si\ \ x > \gamma \end{cases} \quad \text{ou encore } \mu(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, \frac{\gamma-x}{\gamma-\beta}\right), 0\right)$$

- **Fonction d'appartenance trapézoïdale :** Elle est définie par quatre paramètres (a, b, c, d), qui déterminent les coordonnées des quatre sommets

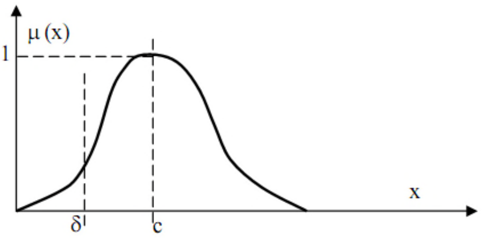


1

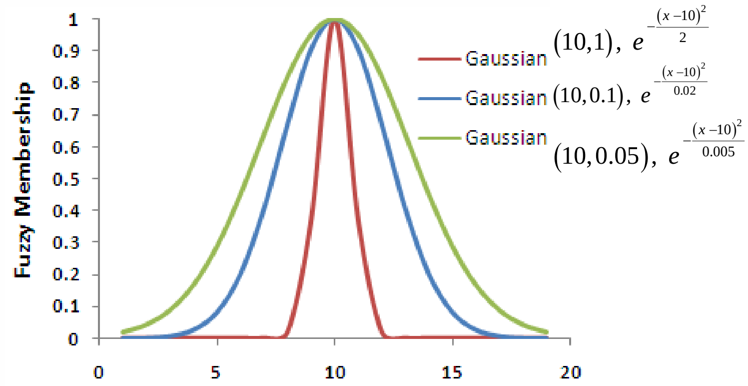
Mathématique, elle est définie comme suit

$$\mu(x)=\begin{cases}0 \;\; si \;\; x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} \;\; si \;\; a<x\le b\\ 1 \;\; si \;\; b<x\le c\\ \dfrac{d-x}{d-c} \;\; si \;\; c<x\le d\\ 0 \;\; si \;\; x>d\end{cases} \qquad \text{ou encore } \mu(x)=\max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a},1,\frac{d-x}{d-c}\right),0\right)$$

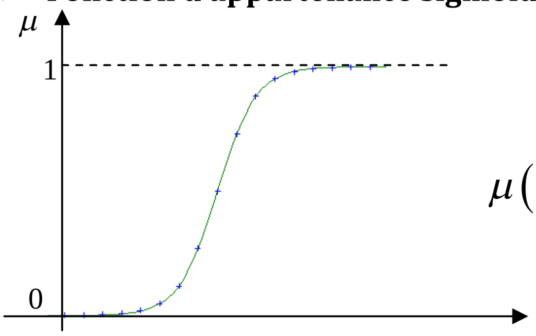
- **Fonction d'appartenance gaussienne :** est une fonction symétrique, elle dépende de deux paramètres, c et δ (la position du centre et la largeur de la forme de la courbe gaussienne respectivement) :



Mathématique, elle est définie par la fonction suivante : $\mu(x)=e^{-\frac{(x-c)^2}{2\delta^2}}$

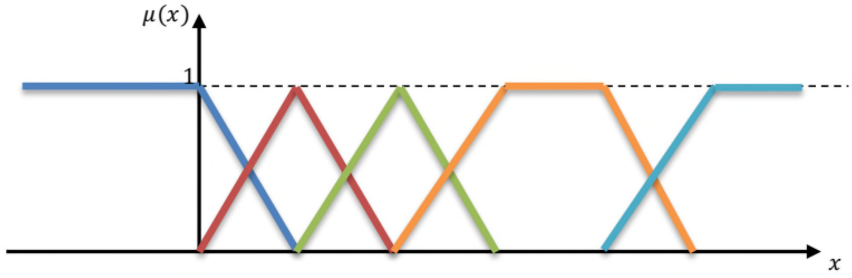


- **Fonction d'appartenance sigmoïde :** Elle est définie par deux paramètres a et c



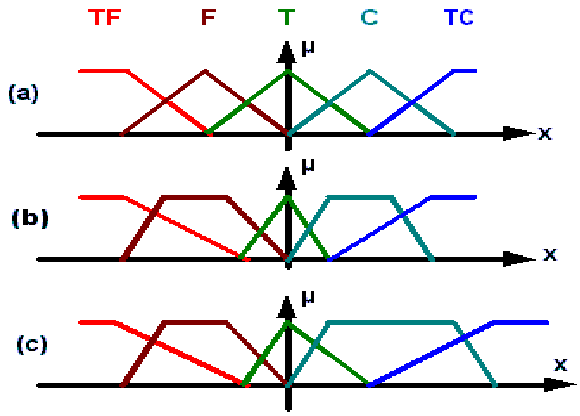
$$\mu(x)=\frac{1}{1+e^{-a(x-c)}}$$

Remarque : on peut tracer plusieurs ensembles flous sur le même graphe :



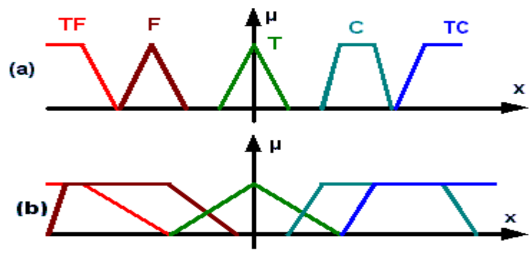
3.5.2. Considérations générales sur les fonctions d'appartenances:

- Les fonctions d'appartenances peuvent être symétriques et distribuées de manière équidistante
- Une forme est définie symétrique lorsque les fonctions d'appartenance sont symétriques par rapport x=0.
- Une forme est définie équidistante lorsque les maxima des fonctions d'appartenances des différents ensembles sont écartées de manière équidistante.



(a) Fonction d'appartenance symétrique et équidistante.
(b) Fonction d'appartenance symétrique et non équidistante.
(c) Fonction d'appartenance non symétrique et non équidistante.

- Il est important d’éviter les lacunes ou des chevauchements insuffisants de deux ensembles voisins, cela provoque des zones mortes (non-intervention des régulateurs).
- De même, on doit éviter un chevauchement trop important, surtout avec μ=1 entre deux ensembles voisins.

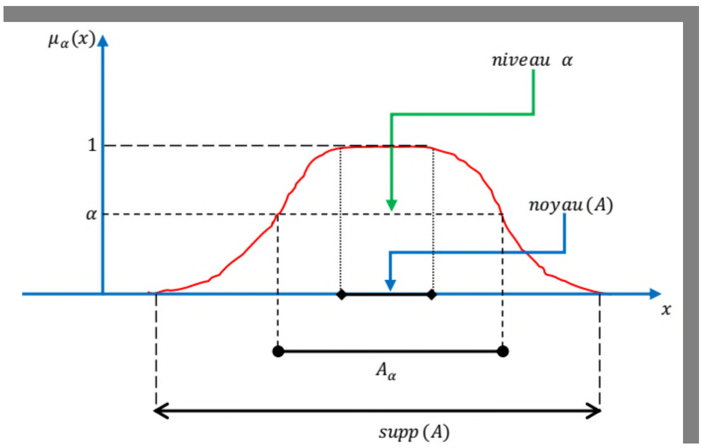


(a) Fonction d'appartenance avec lacunes ou chevauchement insuffisant
(b) Fonction d'appartenance avec chevauchement trop important

3.6. Propriétés des ensembles flous

Afin d'étudier un fondement mathématique permettant de calculer et de manipuler des ensembles flous, un certain nombre de propriétés doit être défini.

Parmi les définitions on peut citer la hauteur, le support, le noyau, l'écrêtage et la cardinalité d'un ensemble flou. On peut ajouter aussi les propriétés de normalité et convexité d'un ensemble flou.



3.6.1. La hauteur de F

L'appartenance d'un élément à un ensemble flou est mesurée par un degré.

La hauteur d'un ensemble flou F (notée $h(F)$) est égale au plus grand valeur (degré d'appartenance) prise par la fonction d'appartenance.

$$h(F) = \sup_{x \in X}\left(\mu_F(x)\right)$$

Avec : $h(F)$ est la hauteur d'un ensemble flou F

- Un ensemble flou est normal s'il existe au moins un élément $x \in X$ tel que $\mu_F(x) = 1$
- Les ensembles flous qui ne sont pas normaux sont appelés sous-normaux.

L'opérateur $norm(F)$ est utilisé pour normaliser un ensemble flou, est défini par :

$$F_{normalisé} = norm(F) \Leftrightarrow \mu_{F_{normalisé}}(x) = \frac{\mu_F(x)}{h(F)}, \; \forall x \in X$$

3.6.2. Support de F

Le support d'un ensemble flou F est égal au sous-ensemble de l'univers X dont les éléments ont des degrés non nuls :

$$\sup por(F) = \{x \in X \;/\; \mu_F(x) > 0\}$$

Dans le cas où le support de l'ensemble floue F est un point unique dans X tel que $\mu_F(x) = 1$, F appelé singleton flou.

3.6.3. Noyau de

Le noyau d'un ensemble flou F, noté $noy(F)$, est l'ensemble des éléments de X pour lesquels la fonction d'appartenance de F égal à 1.

$$noy(F) = \{x \in X \;/\; \mu_F(x) = 1\}$$

3.6.4. Ecrêtage $\alpha - cut$ ou $\alpha - coupe$

L'écrêtage ou $\alpha - cut$, noté F_α, d'un ensemble floue F est égale au sous-ensemble de X dont les éléments possèdent un degré d'appartenance supérieur ou égale à α pour $\alpha \in [0,1]$:

$$F_\alpha = \{x \in X \;/\; \mu_F(x) \geq \alpha\}, \; \alpha \in [0,1]$$

La valeur de α est appelée, le niveau d'écrêtage α

2.7. Inférence floue (opérateur d'agrégation des règles).

- Une règle floue est une affirmation (**SI** prémisse **ALORS** conclusion (ou conséquence)) dont la prémisse et la conséquence sont des propositions flous ou des combinaisons de propositions flous par des connecteurs logiques (souvent **ET** et le **OU**)
- Par exemple, la règle floue « SI x_1 est A_1 ET x_2 est A_2 ALORS y est B » est formée d'une prémisse composée de deux propositions floues $(SI\ x_1 est\ \ A_1)$ ET $(SI\ x_2 est\ \ A_2)$ combinées par le connecteur logique **ET**, et une conséquence formée par une proposition floue simple (y est B)

Exemple de règles floues :

- S’il fait très chaud alors ouvrir la fenêtre
- Si vous être obèse alors faire du sport
- Si la maison et neuve et si elle n’est pas loin de la mer alors son coût est très élevé.

L’inférence est un mécanisme permettant de condenser l’information d’un système à travers d’un ensemble de règles linguistiques définies pour la représentation d’un problème quelconque.

- Chaque règle linguistique délivre une conclusion partielle qui est ensuite agrégée aux autres règles pour fournir une conclusion (agrégation).

On peut distinguer deux types :

2.7.1 : Inférence avec une seule règle

- Le cas d'une inférence avec une seule règle se présente lorsqu'il faut comparer plusieurs concurrents (objets ou personnes) dans une certaine situation et en choisir l'optimum.
- Les variables qui déterminent la situation sont des variables floues.
- On trouve cette problématique essentiellement dans les domaines non techniques, où il faut prendre une décision, comme par exemple l'achat d'un appareil, le recrutement d'un employer,etc.

la règle à une inférence est formuler comme suit :

$$Y = [x_1 \;\; OU \;\; (x_2 \;\; ET \;\;\; x_3) \;\; OU .....] \;\; ET \;\; x_n$$

Il faut choisir le concurrent dont le facteur d’appartenance est maximal.

2.5.2 Inférence avec plusieurs règles

Elle est utilisée pour la prise de décision différente suivant des conditions sur les valeurs des variables linguistiques.

Si condition 1, ALORS opération 1, OU

Si condition 2, ALORS opération 2, OU

⋮

⋮

Si condition n, ALORS opération n

Exemple :

$$\mathcal{R}_1: \ \boldsymbol{si} \ \ le\, débit\, d'\, O_2\, est\, faible\ \ \boldsymbol{alors}\ \ la\, puissance\, est\ \ faible$$

$$\mathcal{R}_2: \ \boldsymbol{si} \ \ le\, débit\, d'\, O_2\, est\, bon\ \ \boldsymbol{alors}\ \ la\, puissance\, est\ \ haute$$

$$\mathcal{R}_3: \ \boldsymbol{si} \ \ le\, débit\, d'\, O_2\, est\, haut\ \ \boldsymbol{alors}\ \ la\, puissance\, est\ \ faible$$

- Les conditions peuvent dépendre d'une ou plusieurs variables. Dans le deuxième cas, les variables sont liées entre elles par des opérateurs de la logique floue de forme Et et OU.
- A chaque variable sont attribuée des fonctions d'appartenance, tenant compte des ensembles flous formés par ces variables.

Exemple

SI x est A_1 ET y est B_1 ALORS z est C_1
SI x est A_2 ET y est B_2 ALORS z est C_2
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
SI x est A_n ET y est B_n ALORS z est C_n

Avec x , y et z sont variables linguistiques qui représentent les variables d'état du processus et les variables A_i , B_i et C_i , sont les ensembles flous des variables x , y et .

7. Les opérateurs de la logique floue :

Afin de mieux comprendre les différents opérateurs de la logique floue, nous allons prendre la règle suivante comme exemple :

SI l'air est froid ET SI le vent est fort ALORS il faut fermer la porte.

Notons

x et **y** les variables linguistiques caractérisant la température de l'air et la force du vent

μ_A(x) : fonction d'appartenance associée à la propriété «l'air est froid»,

μB(y) : fonction d'appartenance associée à la propriété «le vent est fort»,

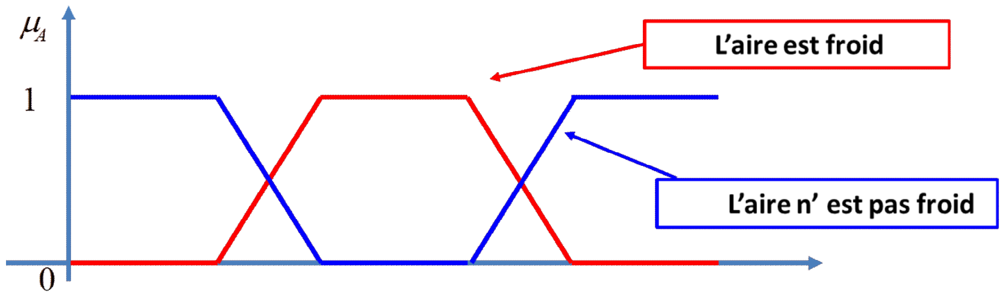
μE(z) : fonction d'appartenance associée à la propriété «l'air est froid et le vent est fort», **μO(z) :** fonction d'appartenance associée à la propriété «l'air est froid ou le vent est fort»,

μC(z) : fonction d'appartenance associée à la propriété «l'air n'est pas froid».

7.1. Opérateur NON (Complément, négation ou inverse):

L'opérateur logique correspond au complément d'un ensemble flou est la négation, il est défini comme suit : $\mu\left(Non\ A\right) = 1 - \mu\ \left(A\right)$

La propriété «l'air n'est pas froid» peut être caractérisée de façon évidente par la fonction d'appartenance $\mu_C\left(z\right) = 1 - \mu_A\left(x\right)$



A noter qu'il s'agit de l'opérateur NON, appelée aussi «complément», «négation» ou «inverse».

7.2. Opérateur ET: (intersection) :

L'opérateur ET désigne les éléments appartenants à la fois à deux ensembles A et B et on écrit :

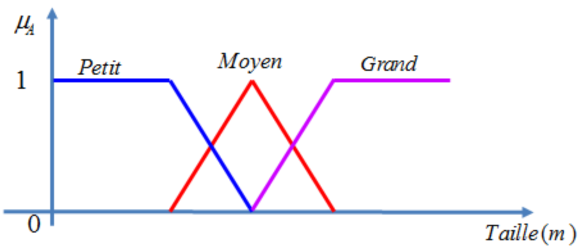
$C = A \cap B = A \ ET \ B$

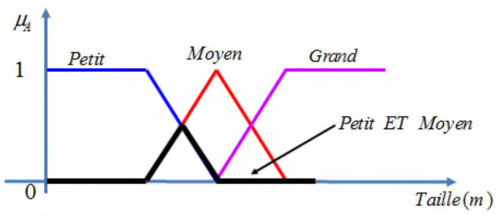
Cet opérateur est réalisé, en logique floue, par la formulation du minimum de la façon suivante :

$\mu_E(z) = \mu_{A \ et \ B}(z) = \min \{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$

Le degré de vérité de la proposition «$A \ ET \ B$» est le minimum des degrés de A et de B

- Cet opérateur est utilisé pour caractériser la satisfaction simultanée de deux propriétés.
- il est possible que la fonction d'appartenance résultante $\mu_E(z)$ n'atteigne pas la valeur 1.
- On peut facilement vérifier que l'opérateur minimum est commutatif, c'est à dire qu'il est possible d'invertir $\mu_A(x)$ et $\mu_B(y)$ sans que le résultat change.
- Cet opérateur peut être appliqué à plus de deux ensembles



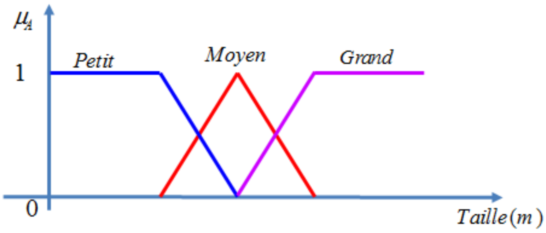


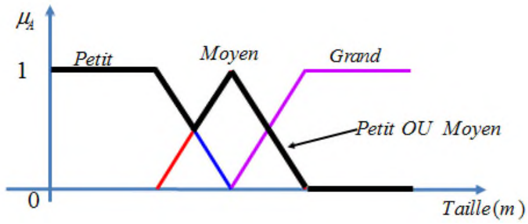
7.3. Opérateur OU (Union) :

La réalisation de l'opérateur **OU** en logique floue se fait, en général, par la formulation du maximum, appliquée aux fonctions d'appartenance $\mu_A(x)$ et $\mu_B(y)$ des deux ensembles A et B. On a donc l'opérateur maximum.

$$\mu_O(z) = \mu_{A \text{ OU } B}(z) = \max \{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

- L'opérateur maximum est aussi commutatif et associatif





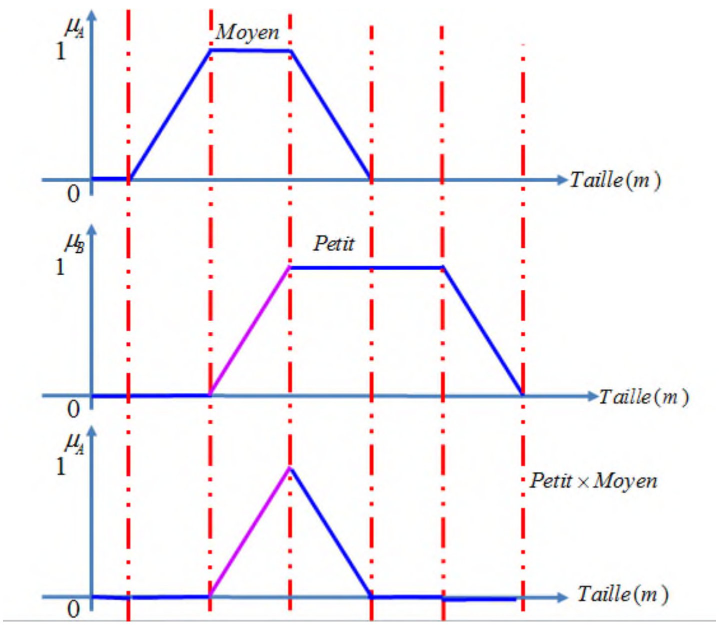
Remarque : La formulation du minimum et du maximum sont réalisées les opérateurs ET et OU. Dans la plupart des cas, ces opérateurs donnent des résultats convenables, surtout pour le réglage et la commande par logique floue. Cependant, dans certaines circonstances, il peut être judicieux d'utiliser d'autres opérateurs, soit pour simplifier le traitement numérique, soit pour mieux tenir compte des opérations floues.

7.4. Opérateur ET, réalisé par opérateur arithmétique.

L'opérateur **ET** est réalisé par la formation du produit appliqué aux fonctions d'appartenance, d'après la relation suivante/

$$\mu_E(z) = \mu_{A\ et\ B}(z) = \mu_A(x).\mu_B(y)$$

- La fonction d'appartenance résultante est toujours est inférieure ou égale à 1. Elle reste donc à l'intérieur de l'intervalle défini par $\mu \in [0,1]$.
- La relation précédente peut être étendue à plus de deux termes dans le produit lorsqu'il faut combiner trois ou plusieurs ensembles. L'opérateur produit est souvent utilisé dans le domaine de réglage et de commande par logique floue comme alternative de l'opérateur minimum.

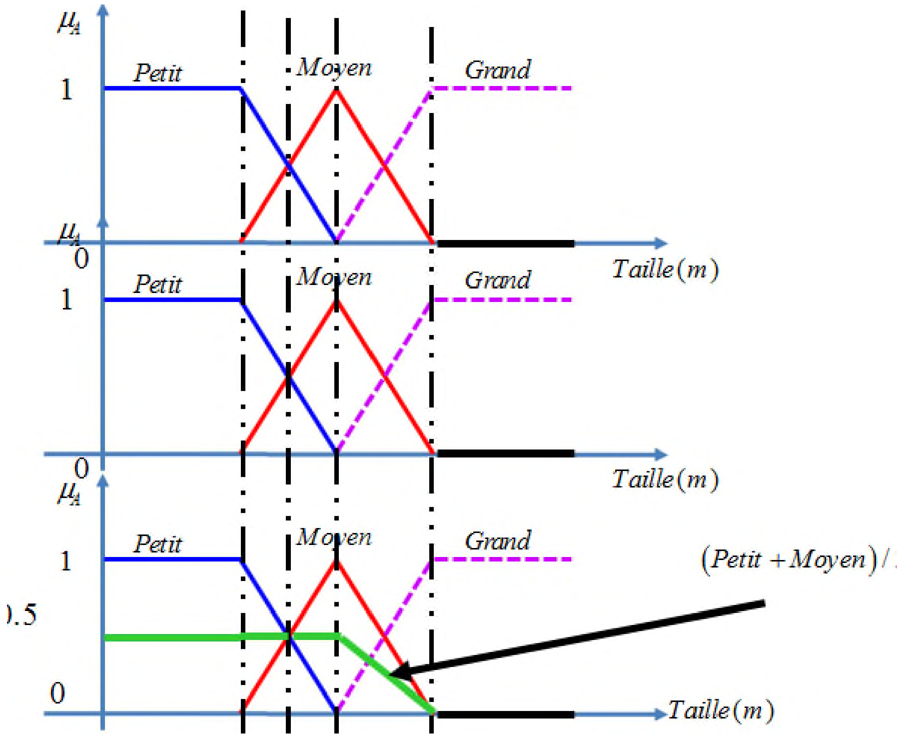


7.5. Opérateur OU, réalisé par opérateur arithmétique

Il correspond à la valeur moyenne des fonctions, selon la relation suivante :

$$\mu_O(z) = \mu_{A\ ou\ B}(z) = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(y)}{2} \quad ,$$

- Il est fort possible que la somme [$\mu_A(x)+\mu_B(y)$] dépasse le domaine admissible [0,1]. Afin que cette somme reste dans le domaine défini, on peut la normaliser.
- Dans ce cas aussi, il est possible d'étendre la règle de calcul précédente à plusieurs termes. Il faut alors diviser la somme par le nombre de termes, afin d'obtenir une normalisation simple.



7.6. Opérateurs ET flou :

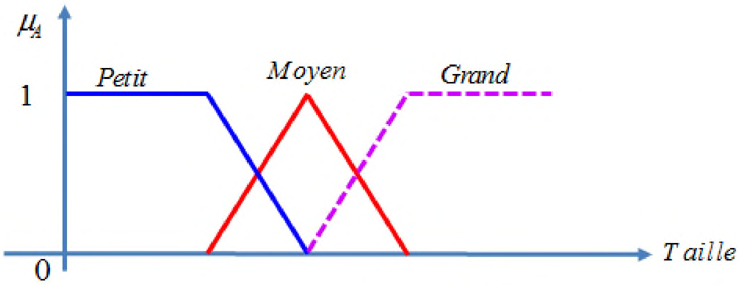
Cet opérateur est une combinaison entre l'opérateur minimum et la moyenne arithmétique. La combinaison est formulée comme suit :

$$\mu_E(z) = \mu_{A\ et\ B}(z) = ß \ \min\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right] + (1 - ß)\frac{\mu_A(x) + \mu_B(y)}{2}$$

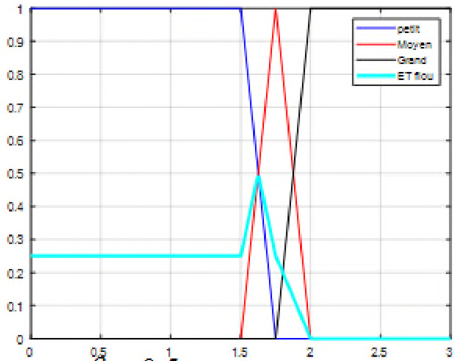
avec $0 \le ß \le 1$

Pour *ß=1*, l'opérateur ET flou correspond à l'opérateur min

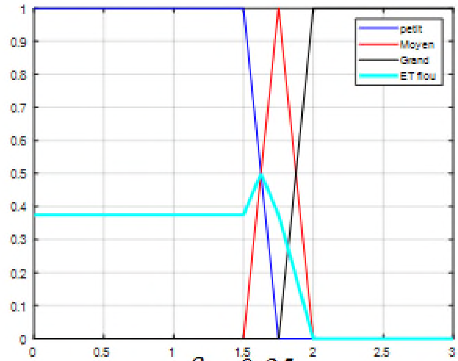
Pour *ß=0*, l'opérateur ET flou correspond à la moyenne arithmétique



$$ET\_flou = \beta \ \min\left[P, M\right] + (1-\beta)\frac{P+M}{2}$$



$\beta = 0.5$



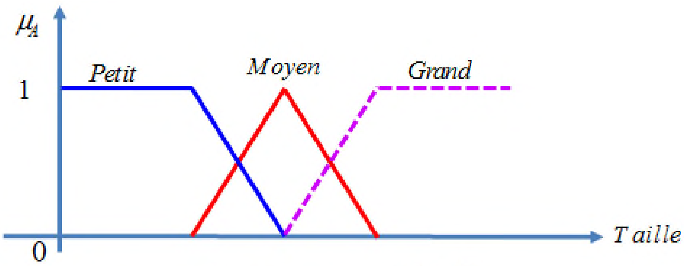
$\beta = 0.25$

7.7. Opérateurs OU flou :

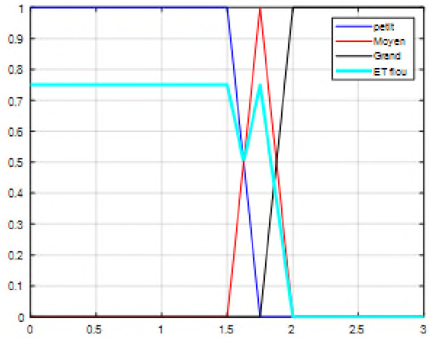
Cet opérateur est une combinaison entre l'opérateur maximum et la moyenne arithmétique, il peut être formulé comme suit :

$$\mu_E(z) = \mu_{A\ \mathrm{OU}\ B}(z) = ß \ \max\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right] + (1-ß)\frac{\mu_A(x)+\mu_B(y)}{2}$$

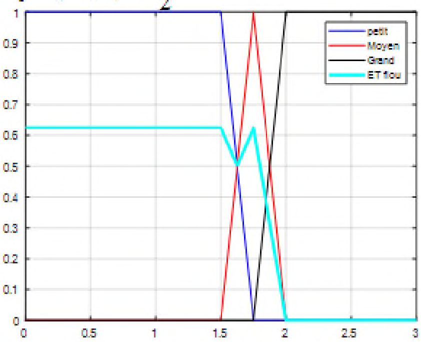
Pour ß=1, l'opérateur OU flou correspond à l'opérateur MAX
Pour ß=0, l'opérateur OU flou correspond à la moyenne arithmétique



$$OU\_flou = \beta \ \max\left[P, M\right] + (1-\beta)\frac{P+M}{2}$$



$\beta = 0.5$



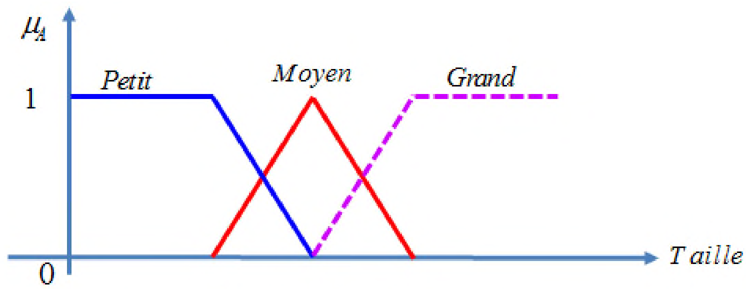
$\beta = 0.25$

7.8. L'opérateur min-max et l'opérateur ß

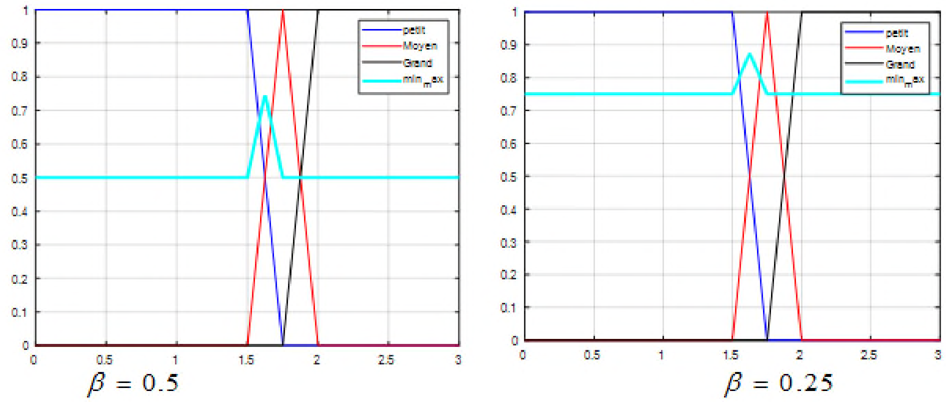
L'opérateur min-max est défini par la combinaison des opérateurs minimum et maximum, selon

$$\mu_E(z) = ß \ \min\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right] + (1-ß)\max\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right]$$

- Le facteur $\beta \in [0,1]$, permet de pondérer les deux opérateurs.
- Pour *ß=1*, on obtient l'opérateur ET, réalisé par la formulation du minimum,
- Pour *ß=0,* on aboutit à l'opérateur OU, réalisé par la formulation du maximum. Par contre,
- Pour *ß=0,5* conduit à l'opérateur OU, réalisé par la formation de la somme.



$$OU\_flou = \beta \ \min[P, M] + (1-\beta)\max[P, M]$$

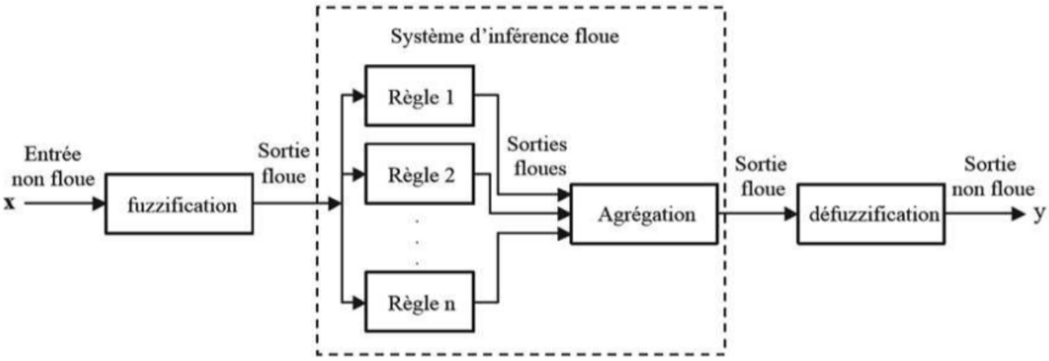


L'opérateur ß est défini de la manière suivante

$$\mu(z) = [\mu_A(x), \mu_B(y)]^{1-\beta} + \{(1- [1-\mu_A(x)][1-\mu_B(y)]\}^{\beta}$$

8. Structure interne d'un système d'inférence flou

Un système d'inférence floue (SIF) est formé de trois blocs comme indiqué sur la figure suivante :



Système d'Inférence Floue

8.1. La fuzzification :

- L'opération de fuzzification permet de passer du domaine réel au domaine du flou.
- Elle consiste à définir des ensembles flous pour les variables d'entrée et de sortie, cependant on doit connaître leurs domaines de définitions.
- Cette opération permet de fournir les degrés d'appartenances de la variable floue à ses ensembles flous en fonction de la valeur réelle des variables d'entrées, on réalise ainsi le passage des grandeurs physiques (grandeurs déterminées) en variables linguistiques (variables floues) qui peuvent alors être traites par les inférences.
- En général, on utilise des formes triangulaires ou trapézoïdales pour les fonctions d'appartenance,

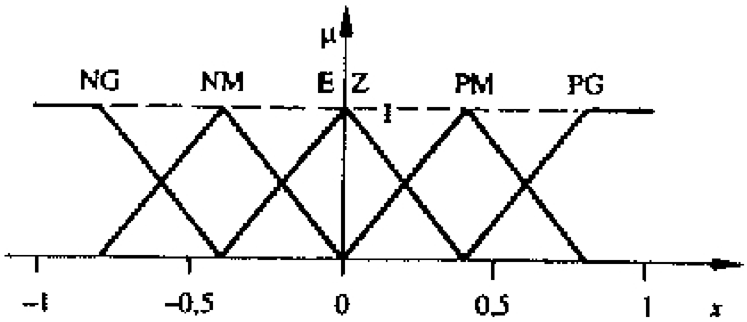
Comment fuzzifier ?

1. *Donner l'univers du discours : plage de variations possibles de l'entrée considérée.*
2. *Une partition en classe floue de cet univers.*
3. *Les fonctions d'appartenances de chacune de ces classes.*

Exemple1 : Chauffer une salle.

Selon les valeurs des entrées, le système flou indiquera qu'en sortie la puissance de chauffe devra prendre les valeurs de sortie « faible » ou « moyenne » ou « forte ».

Exemple : Soit une grandeur x (appartenant à [-1 , 1]) définie par 5 sous-ensembles flous NG (négatif grand), NM (négatif moyen), EZ (environ zéro), PM (positif moyen) et PG (positif grand).



Pour x = 0.5 , on associe $\mu_{PM}(0.5) = 0.75$ et $\mu_{PG}(0.5) = 0.25$

Pour x = – 0.1 , on associe $\mu_{EZ}(-0.1) = 0.9$ et $\mu_{PM}(-0.1) = 0.1$

Donc à chaque variable linguistique d'entrée (x), on fait correspondre une valeur linguistique (Négatif Grand, Négatif Moyen, …) avec un degré d'appartenance.

Remarque :

- Il n'existe pas de règle précise pour la définition des fonctions d'appartenance pour une variable d'entrée ou de sortie, les valeurs fréquemment utilisées sont au nombre de sept :

  NG : négatif grand NM : négatif moyen NP : négatif petit

  PG : positif grand PM : positif moyen PP : positif petit

  EZ : environ de zéro

- En générale, on introduit pour une variable x trois, cinq ou sept ensembles des ensembles précédents.

8.2. L'Inférence floue :

- L'inférence consiste à lier les grandeurs mesurées, qui sont les variables d'entrée (transformées en variables linguistiques à l'aide de la fuzzification) à la variable de sortie.
- L'inférence est l'étape où l'on établit les règles floues qui permettent d'aboutir à la commande en fonction des valeurs des entrées.
- L'inférence dans les systèmes flous à base de règles est le processus qui consiste à déterminer

  l'ensemble flou de sortie à partir des règles et des entrées.
- Donc le mécanisme d'inférence consiste à déterminer les règles floues activées.

Description des inférences de règles

Nous allons considérer un système flou avec "n" règles linguistiques suivant.

$$\begin{cases} \textbf{Si } x \text{ est } A_1 \ \textit{ET} \ y \text{ est } B_1 \ \textbf{alors } z \text{ est } C_1 \\ \textbf{Si } x \text{ est} A_2 \ \textit{ET} \ y \text{ est } B_2 \ \textbf{alors } z \text{ est } C_2 \\ \dots \\ \textbf{Si } x \text{ est } A_n \ \textit{ET} \ y \text{ est } B_n \ \textbf{alors } z \text{ est } C_n \end{cases}$$

Où x, y et z sont des variables linguistiques qui représentent les variables d'état du processus et les variables. Ai, Bi et Ci (i=1,…, n) sont les ensembles flous définis dans les ensembles de référence pour x, y, z respectivement. Qui peuvent être PP, PG,EZ,…

Exemple : Soit deux entrées x1 et x2 et une sortie xR, toutes trois définies par les 5 sous-ensembles de l'exemple précédent.

Description d'une base de règles possible :

Si (x1 NG **ET** x2 EZ), **Alors** xR PG **ou**
Si (x1 NG **ET** x2 PM), **Alors** xR PM **ou**
Si (x1 NM **ET** x2 EZ), **Alors** xR PM **ou**
Si (x1 NM **ET** x2 PM), **Alors** xR EZ **ou**
Si (x1 NM **ET** x2 PG), **Alors** xR NM **ou**

…

Si (x1 PG **ET** x2 EZ), **Alors** xR **NG**

On peut aussi l'exprimée sous forme de tableau ou matrice :

x_R		x_1				
		NG	NM	EZ	PM	PG
x_2	NG			PG	PM	
	NM			PM	EZ	NM
	EZ	PG	PM	EZ	NM	NG
	PG	PM	EZ	NM		
	PG		NM	NG		

Remarque :

- Il est a remarqué qu'on n’est pas obligé de compléter toute la table. Les règles sont élaborées par un expert et sa connaissance du problème. Si ce dernier estime qu'il n'est pas nécessaire de remplir la table, c'est qu'il sait que les cas non considérés n'interviendront pas lors de la mise en application.
- degré d’activation de chaque règle représente:
  a) l'activation des règles qui consiste à appliquer une norme triangulaire (ou T-normes) pour obtenir le degré d'activation de chacune d’elles.
  b) une valeur comprise dans un intervalle.
  c) la recherche de la fonction d’appartenance pour la sortie de chaque règle.
  d) l’agrégation ou la recherche de la fonction d’appartenance résultante globale

Méthode d’inférence floue

Il existe plusieurs possibilités pour réaliser les opérateurs qui combinent les valeurs d’entrée et les valeurs de sortie, c’est ce qu’on appelle la ***méthode d’inférence.***

Les méthodes les plus utilisées sont

Méthode d’inférence MAX-MIN

Méthode d’inférence MAX- PROD

Méthode d’inférence SOMME- PROD

Pour illustrer le mieux possible ces méthodes. Supposons que l’on ait deux entrées x1 et x2 et une sortie xR, toutes trois définies par les sous-ensembles suivants (chacune est composée en trois ensembles NG EZ PG):

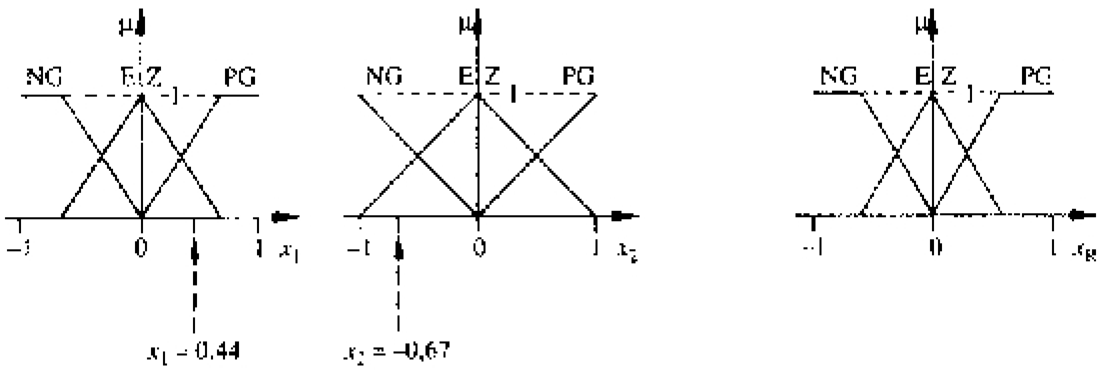


Fig. 3.17 Fonctions d’appartenance pour l’exemple servant à la description des méthodes d’inférence.

Supposons que x1 = 0.44 , x2 = – 0.67

L’inférence est composée de deux règles suivantes:

Si (x1 PG **ET** x2 EZ), **Alors** xR EZ **OU**
Si (x1 EZ **OU** x2 NG), **Alors** xR NG

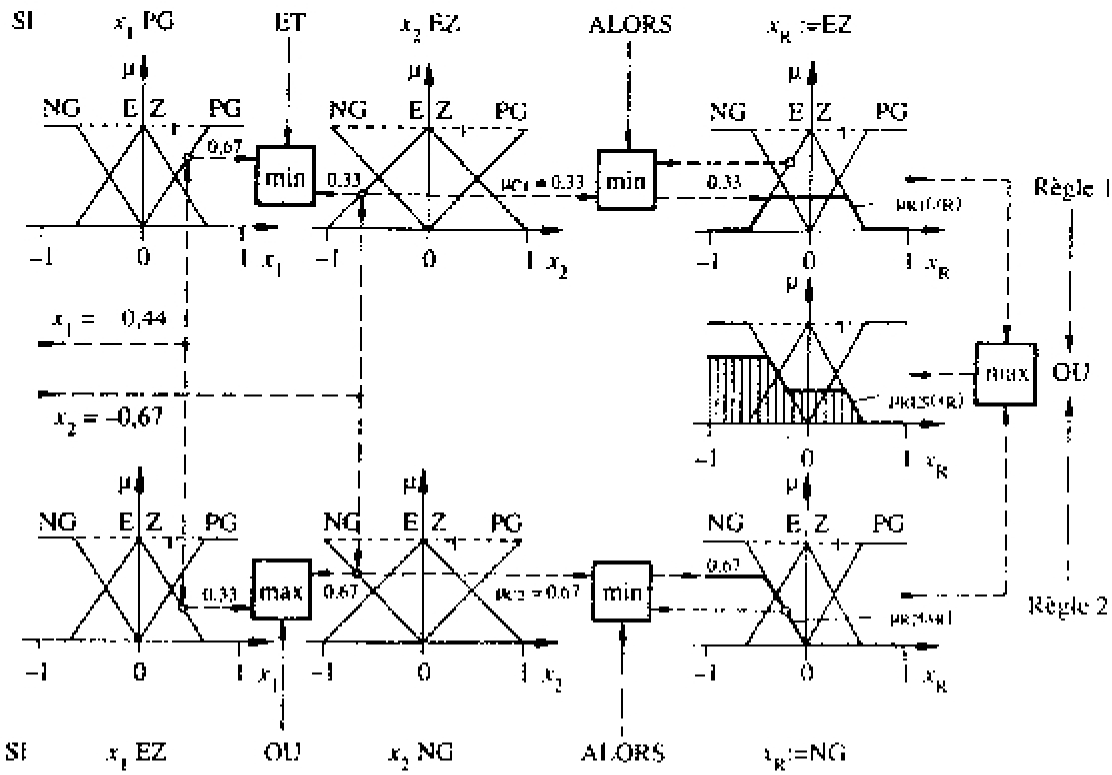
La prochaine étape consiste à « traduire » les opérateurs ET, OU et l'implication par ces fonction équivalentes.

8.2.1. Méthode d'inférence MAX-MIN

- Au niveau de la condition : **ET** est représenté par la fonction **Min**
OU est représenté par la fonction **Max**

- Au niveau de la conclusion : **ou** est représenté par la fonction **Max**
Alors est représenté par la fonction **Min**

(d'où la désignation)



La première règle donne :

1. x1 = 0,44 est PG avec un degré de 0,67 et x2 = -0,67 est EZ avec un degré de 0,33
2. (x1 PG **ET** x2 EZ) équivaut à min(0,67 ; 0,33) ce qui donne 0,33
3. Alors = min équivaut à tronquer la fonction d'appartenance de xR est EZ par 0,33

La deuxième règle donne :

1. x1 = 0,44 est PG avec un degré de 0,67 et x2 = -0,67 est EZ avec un degré de 0,33

2. (x1 EZ **OU** x2 NG) équivaut à max(0,67 ; 0,33) ce qui donne 0,67
3. Alors = min équivaut à tronquer la fonction d'appartenance de xR est NG par 0,67

Résultat :

Une fonction d'appartenance résultante donnée par la surface hachurée (qui sera traitée lors de la défuzzification).

8.2.2. Méthode MAX-PROD

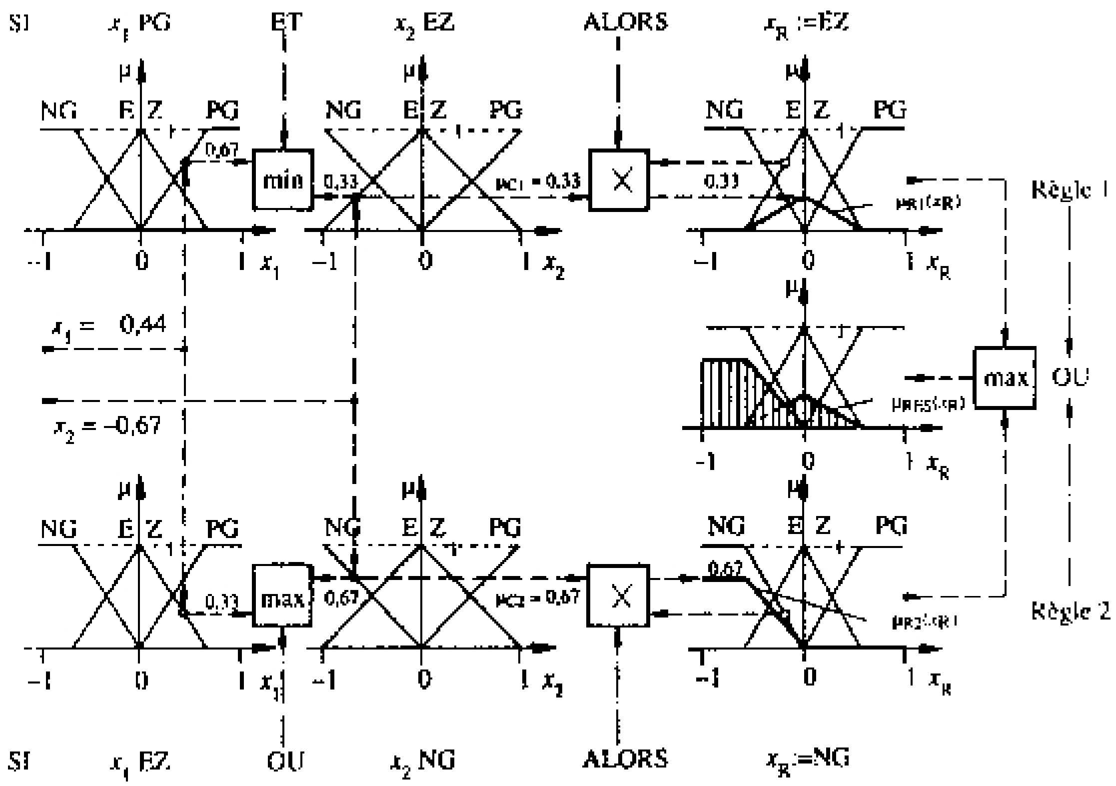
- Au niveau de la condition : **ET** est représenté par la fonction **Min**

OU est représenté par la fonction **Max**

- Au niveau de la conclusion : **ou** est représenté par la fonction **Max**

Alors est représenté par la fonction **Prod**

(d'où la désignation)



La première règle donne :

1. x1 = 0,44 est PG avec un degré de 0,67 et x2 = -0,67 est EZ avec un degré de 0,33
2. (x1 PG **ET** x2 EZ) équivaut à min(0,67 ; 0,33) ce qui donne 0,33
3. Alors = prod équivaut à muliplier la fonction d'appartenance de xR est EZ par 0,33

La deuxième règle donne :

1. x1 = 0,44 est PG avec un degré de 0,67 et x2 = -0,67 est EZ avec un degré de 0,33
2. (x1 EZ **OU** x2 NG) équivaut à max(0,67 ; 0,33) ce qui donne 0,67
3. Alors = min équivaut à multiplier la fonction d'appartenance de xR est NG par 0,67

Résultat :

Une fonction d'appartenance résultante donnée par la surface hachurée (qui sera traitée lors de la défuzzification).

8.2.3. Méthode SOMME-PROD

Il s'agit de la Somme Pondérée (ou Moyenne) : $\mu_{A,E}(x,y) = \dfrac{\mu_A(x)+\mu_E(y)}{2}$

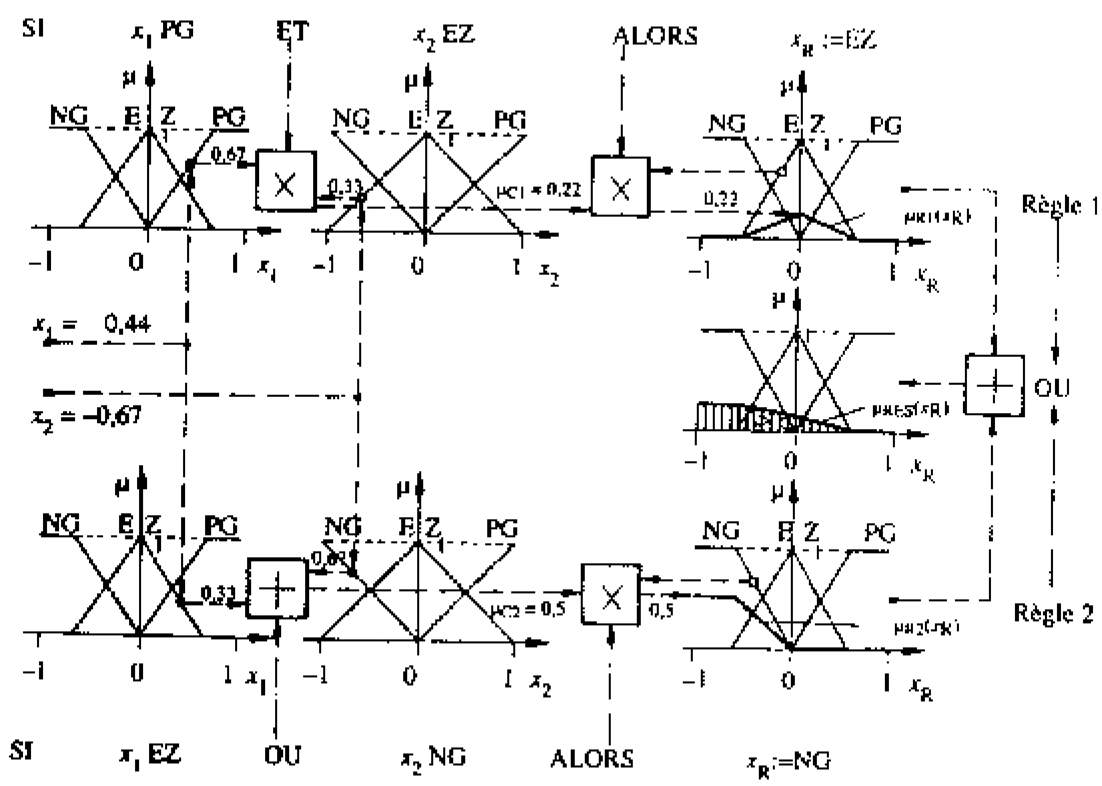
- Au niveau de la condition : **ET** est représenté par la fonction **Prod**

OU est représenté par la fonction **Somme**

- Au niveau de la conclusion : **ou** est représenté par la fonction **Somme**

Alors est représenté par la fonction **Prod**

(d'où la désignation)



La première règle donne :

1. x1 = 0,44 est PG avec un degré de 0,67 et x2 = -0,67 est EZ avec un degré de 0,33
2. (x1 PG **ET** x2 EZ) équivaut à prod(0,67 ; 0,33) = 0,67 * 0,33 ce qui donne 0,22
3. Alors = prod équivaut à muliplier la fonction d'appartenance de xR est EZ par 0,22

La deuxième règle donne :

1. x1 = 0,44 est PG avec un degré de 0,67 et x2 = -0,67 est EZ avec un degré de 0,33
2. (x1 EZ **OU** x2 NG) équivaut à somme(0,67 ; 0,33) = (0,67+0,33)/2 ce qui donne 0,5
3. Alors = min équivaut à multiplier la fonction d'appartenance de xR est NG par 0,5

Résultat :

Une fonction d'appartenance résultante donnée par la surface hachurée (qui sera traitée lors de la défuzzification).

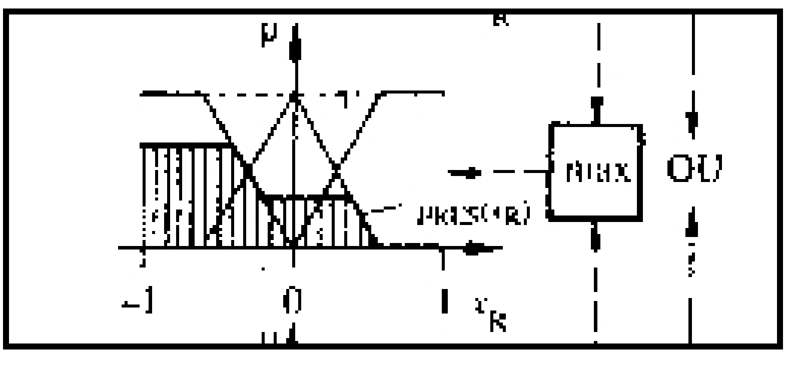
8.3. Défuzzification

- Les méthodes d'inférence fournissent une fonction d'appartenance résultante pour la variable de sortie. Il s'agit donc d'une information floue qu'il faut transformer en grandeur physique (valeur réelle) à partir des surfaces obtenues dans l'étape d'inférence, cette opération est appelée la Défuzzification . Les méthodes les plus couramment utilisées sont:

8.3.1. Défuzzification par centre de gravité

Elle consiste en la détermination du centre de gravité de la fonction d'appartenance résultante $\mu_{RES}(Xr)$. Dans ce contexte, il suffit de calculer l'abscisse Xr^* à l'aide de la relation générale suivante.

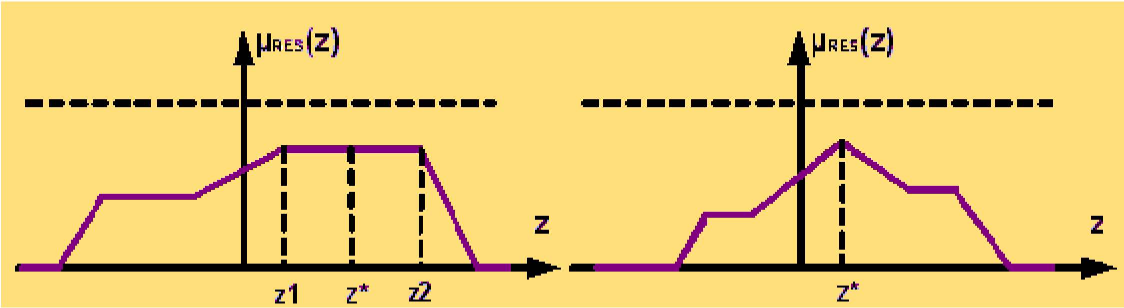
$$\frac{\int_{-1}^{1} X_r \mu_{res}(X_r) dX_r}{\int_{-1}^{1} \mu_{res}(X_r) dX_r}$$



Défuzzification par centre de gravité

8.3.2. Défuzzification par valeurs maximale

Comme signal de sortie z^*, on choisit l'abscisse de la valeur maximale de la fonction d'appartenance résultante μ_{RES} (z) comme le montre la figure 3.5.3(b).



(b) **(a)**

Défuzzification par valeur maximum.

Lorsque μ_{RES} (z) est écrêté, toute valeur entre z1 et z2 peut être utilisée. Afin d'éviter cette indétermination, on prend la moyenne des abscisses du maximum.

- **Dans le cas discret :**

Lorsque la fonction d'appartenance μ_{res} est discrète, le centre de gravité est donné par :

$$z^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}$$

Avec z_i représente la valeur de sortie pour le niveau i et μ_i la fonction d'appartenance.

II- Système d'inférence flou de type Takagi-Sugeno

- Dans ces systèmes, les prémisses des règles sont exprimées symboliquement et les conclusions sont par des fonctions linéaires.
- Notons par $x_i = \left[x_1, x_2, \ldots, x_p\right]$ les entrées du contrôleur flou, et par y sa sortie.

Règle i du procédé :

SI $x_1(t)$ est F_1^i et … et $x_p(t)$ est F_p^i ALORS $y = f(x_i)$

En général $f(x_i)$ est une fonction polynomiale en fonction des variables d'entrées $x_i(t)$

$$f(x_i) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i(t)$$

- Chaque règle possède une conclusion numérique, et de cette manière, le temps consommé par la procédure de défuzzification est réduit.
- A chaque règle floue est attribué un poids $\mu_i(x)$ qui dépend du degré d'appartenance de la variable flou $x_i(t)$ aux sous-ensembles flous F_j^i et du choix de la modélisation de l'opérateur logique reliant les prémisses (ET ou OU).
- L'opérateur logique ' ET' est souvent choisi comme le produit,

Les degrés d'appartenance est donnés comme suit :

:
$$\mu_i(x) = \prod_{j=1}^{p} F_i^j(x_j(t))$$

$F_i^j(x_j(t))$ est le degré d'appartenance de x_j à l'ensemble flou F_i^j et $\forall t \geq 0$: avec

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} \mu_i\left(x(t)\right) > 0 \\ \mu_i\left(x(t)\right) \geq 0 \end{cases},$$

Alors la sortie du contrôleur flou est donnée par la relation suivante :

$$x_r^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) x_{ri}}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)}$$

Exemple d'application :

Soit les trois règles floues suivantes :

Règle 1 : SI x_1 est **PG** **ET** x_2 est **EZ** **ALORS** $x_{r1} = x_1 - x_2$
Règle 2 : SI x_1 est **EZ** **ET** x_2 est **NG** **ALORS** $x_{r2} = 2x_1 + x_2$
Règle 3 : SI x_1 est **PG** **ET** x_2 est **NG** **ALORS** $x_{r3} = x_1 + 4x_2$

Pour $x_1 = 0.44$ *et* $x_2 = -0.67$
La première règle donne :

- $x_1 = 0.44$ est PG avec un degré de 0.67
- $x_2 = -0.67$ est EZ avec un degré de 0.33
- x_1 PG ET x_2 EZ équivalant $\mu_1 = min\left(0.33\,,\ 0.67\right) = 0.33$
- $x_{r1} = x_1 - x_2 = 0.44 + 0.67 = 1.11$

La deuxième règle donne :

- $x_1 = 0.44$ est EZ avec un degré de 0.33
- $x_2 = -0.67$ est NG avec un degré de 0.67
- x_1 EZ ET x_2 NG équivalant $\mu_2 = min\left(0.33\ ,\ 0.67\right) = 0.33$
- $x_{r2} = 2x_1 + x_2 = 2\times 0.44 - 0.67 = 0.21$

La troisième règle donne :

- $x_1 = 0.44$ est PG avec un degré de 0.67
- $x_2 = -0.67$ est NG avec un degré de 0.67
- x_1 PG ET x_2 NG équivalant $\mu_3 = min\left(0.67\ ,\ 0.67\right) = 0.67$
- $x_{r3} = x_1 + 4x_2 = 0.44 - 4\times 0.67 = -2.24$

et on a $x_r^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{3} \mu_i(x) x_{ri}}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)} = \dfrac{0.33\times\left(1.11\right) + 0.33\times 0.21 - 0.67\times 2.24}{0.33 + 0.33 + 0.67} = -0.8$

Commande intelligente

Partie I : Logique floue

1. Introduction à la logique floue

- L'homme perçoit, raisonne, imagine et décide à partir de modèles ou représentations. Sa pensée n'est pas binaire. L'idée de la logique floue est de « capturer » l'imprécision de la pensée humaine et de l'exprimer avec des outils mathématiques appropriés.
- L'existence d'une logique permettant de traiter des variables non exactes comprise entre « 0 » et « 1 » à permis le réglage et la commande de processus mal maîtrisables par les méthodes classiques.
- La logique floue donne la possibilité de modéliser des modes imprécis (au lieu des modes précis) du raisonnement, ce qui jeu un rôle important dans la prise de décisions rationnelles dans un environnement incertain et imprécis.
- La logique floue est une extension de la logique classique qui permet la modélisation des imperfections des données et se rapproche dans une certaine mesure de la flexibilité du raisonnement humain.
- La logique floue diffère de la logique classique parce qu'elle permet des définitions partielles ou "floues" des règles de contrôle.
- La logique floue est une extension de la logique booléenne créée par Lotfi Zadeh en 1965, en se basant sur sa théorie mathématique des ensembles flous, qui est une généralisation de la théorie des ensembles classiques. En introduisant la notion de degré dans la vérification d'une condition, nous permettons à une condition d'être dans un autre état que vrai ou faux.

➢ Dans la logique binaire une variable ne peut prendre que deux valeurs vraie **1** ou fausse **0.** Les propositions énoncées en prémisse d'une règle et en conclusion ne peuvent être, dans ce cas, que totalement vraies ou bien totalement fausses ***(si P, alors C).*** Contrairement, la logique floue proche du raisonnement humain ne suit pas la logique basée sur le ***(vrai)*** ou le ***(faux).*** C'est une logique linguistique, floue ou approximative. Les valeurs de vérité sont des mots du langage courant ***plutôt vrai, presque faux,*** etc

Qu'est-ce que la logique floue?

D'après le terme « logique floue » on peut donner deux définitions

- La première est que la logique floue intervient dans la manipulation de connaissances insuffisantes et imprécises. Elle permet la représentation et le traitement de ces dernières, afin de pouvoir traiter des systèmes complexes.
- La seconde représente une extension de la logique classique, dans le but de raisonner sur des connaissances imparfaites.

Idée de l'utilisation de la logique floue

- Comme la science s'appuie sur la notion de mesure, les questions qui se posent : Comment représenter les valeurs non mesurables? Comment représenter ce qui est incertain ou subjectif ? Comment représenter les termes du langage humain ?
- Le flou n'est pas imprécis. Si une donnée n'est pas connue précisément, elle peut être exprimée par un intervalle de confiance précis. Cet intervalle est un ensemble de valeurs possible pour la donnée
- Elle est très utile lorsque: le modèle mathématique du problème à traiter n'existe pas,
- Ou lorsque le modèle mathématique existe mais difficile à implémenter
- Ou lorsque le modèle mathématique est trop complexe pour être évalué assez rapidement pour des opérations en temps réel
- Lorsque des experts humains sont disponibles pour fournir des descriptions subjectives du comportement du système avec des termes en langage naturel.
- Lorsqu'il y a de larges incertitudes et des variations inconnues dans les paramètres et la structure du système

Caractéristiques de la logique floue

- Le modèle mathématique du fonctionnement du processus n'est pas nécessaire. Par exemple, dans l'industrie, les opérateurs résolvent souvent des problèmes complexes de manière relativement simple et sans avoir besoin de modéliser le système. De même, tout le monde sait qu'un modèle mathématique n'est pas nécessaire pour conduire une voiture et pourtant une voiture est un système très complexe.
- L'utilisation des variables linguistiques pluton que des variables numérique

- Caractérisation des relations simples entre les variables par des citations conditionnelles floues vues comme une collection de contraintes
- Caractérisation des relations complexes par des algorithmes flous

➢ **Avantage de la logique floue:**

- Solution de problèmes multivariables complexes,
- Robustesse vis à vis des incertitudes;
- Possibilité d'intégration du savoir de l'expert.

➢ **Domaine d'application de la logique floue**

La première application de la logique floue a été développée en Europe par Mamdani, en 1975 (Commande d'un moteur a vapeur)

La logique est maintenant appliquée dans divers domaines,

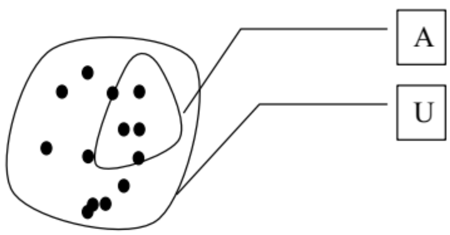
- Transport : véhicule automobiles (transmission automatique, véhicule sans pilote, métro autonome)
- Procédés industriels : Cimenterie, usine de traitement des aux, régulation de la température d'un réacteur chimique, robotiques,
- Systèmes de décision, diagnostic industriel, contrôle de processus, robotiques

➢ **Historique de la logique floue**

- **1965** : le concept de la logique floue est introduit par Pr. Lotfi Zadeh (Berkeley), où il définit les ensembles flous et les opérateurs associés; *Fuzzy Set Theory*
- **1970** : les premières applications étaient basées sur la notion d'expertise qui permet de quantifier le flou à partir de connaissances acquises antérieurement; Systèmes experts pour l'aide à la décision en logique floue et au diagnostic dans le domaine médical, commercial, orientation professionnelle, etc
- **1974-1975:** la première application industrielle apparaît; le professeur Mamdani développait une stratégie pour le contrôle des procédés et les résultats obtenus étaient appliqués sur la conduite d'un moteur à vapeur. Régulation floue d'une chaudière à vapeur réalisée par Mamdani à Londres.
- **1978- 1980:** la société Danoise F.L. Smidth a réalisé le contrôle d'un four à ciment. C'est en ce moment qu'apparaît la première véritable application industrielle de la logique floue.

- Au Japon, la logique floue connaît son véritable essor à la fin des années 80 dont la recherche n'est pas seulement théorique mais également très applicative dans plusieurs secteurs.
- **1985- 1987:** les japonais sont les premiers à introduire des produits grand public, Métro de Sendai Hitachi au Japon. « Fuzzy Logic Inside» (i.e. machine à laver, appareils à photo, etc.).
- **1990-1992:** En Allemagne des applications apparaissent en grand nombre comme la conduite de hauts-fourneaux Dunkerque et au Portugal l'apparition de l'Usine de Papier et de Produits de consommation courante: Aspirateurs, machines à laver, système de climatisation, etc
- Enfin, c'est le grand pas de généralisation de l'utilisation de la logique floue dans les systèmes automobiles embarqués (climatisation, suspension, etc.), système de contrôle/ commande dans la plupart des domaines industriels de production, appareils électroménagers, etc

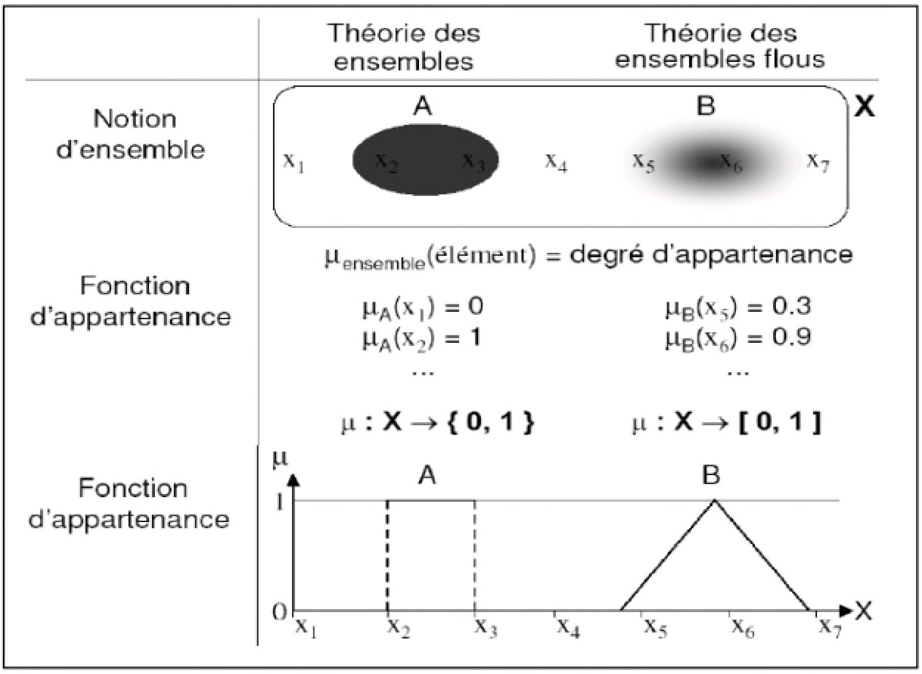
Ensembles flous: Soit l'ensemble U des valeurs de la variable x, appelé l'univers du discours; un sous-ensemble A de U et une fonction $\mu_A(x)$ comprise entre 0 et 1. Cette fonction $\mu_A(x)$ quantifie le degré avec lequel chaque élément x de U appartient à A.



Ensemble flou

- U : l'univers du discours.
- A : sous-ensemble de U.
- -Si $\mu_A(x) = 1$ x appartient complètement au sous-ensemble A_i
- -Si $\mu_A(x) = 0$ x n'appartient pas au sous-ensemble A
- -Si $0 < \mu_A(x) < 1$ x appartient partiellement au sous-ensemble A

Le sous-ensemble A est donc un ensemble flou et $\mu_A(x)$ est appelé fonction d'appartenance



Comparaison ensemble classique – ensemble flou

2.. Exemples introductifs

Exemple 1: Prenons un exemple : comment déterminer si une personne est âgée ou non ? Ce problème est difficile à cerner, une personne qui a 60 ans est-elle âgée ? Et qu'en est-il d'une personne qui a 70 ans, 80 ans ?

En logique classique on va être obligé de définir une frontière qui va déterminer l'ensemble des personnes âgées, disons qu'une personne est dite âgée si elle a 80 ans ou plus. Si par exemple Mohamed a 80 ans et sa femme 79 ans, Mohamed est âgé et sa femme ne l'est pas.

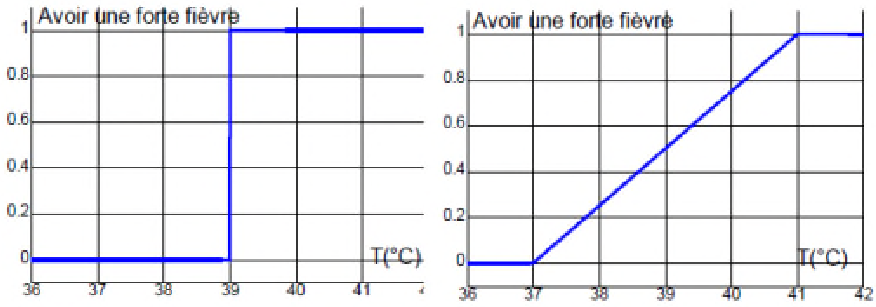
En logique floue Si on utilise un raisonnement flou, on a un jugement bien moins radical, plus nuancé :

- Mohamed est « certainement » âgé.
- Sa femme est « quasiment » âgée.
- Leur petit enfant ne l'est « pas du tout »

Définissons *A* l'ensemble des personnes âgées, on voit que cet ensemble diffère entre logique classique et logique floue comme le montra le tableau suivant:

	Appartenance à l'ensemble A	
Personne	**Logique classique**	**Logique floue**
Mohamed	Vrai	"certainement"
Sa femme	Faux	"quasiment"
Petit enfant	Faux	"pas du tout"

Exemple 2 : A quelle température un patient a-t-il une forte fièvre ?



(a) Logique classique (b) Logique floue

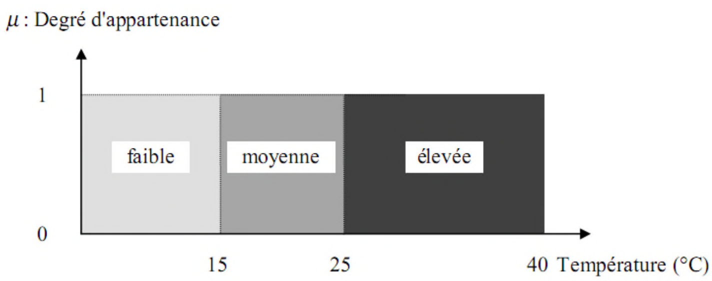
- **La logique classique** détermine qu'un patient ayant 39 ou plus à une forte fièvre, en dessous, il n'a pas du tout de fièvre.
- **La logique floue** permet des degrés de vérification de la condition :
    - La fièvre est considérée comme nulle en dessous de 37 (température normale du corps humain), on dit qu'elle est élevée à 0% en dessous de 37 degrés.
    - La fièvre est considérée comme très forte à partir de 41 degrés. Elle est donc très forte à 100% au-dessus de 41 degrés.
    - La fièvre est très forte à 50% à une température de 39 degrés, elle est très forte à 25% à une température de 38 degrés.

Cette représentation est plus souple que la logique classique, elle permet de mieux traiter et modéliser des situations réelles.

En fait au lieu d'avoir une évaluation numérique de la solution, elle va permettre une évaluation qualitative, plus proche du langage naturel.

Par exemple, le fait de dire que la fièvre est très forte à une température de 39 découlera d'un degré de vérité de 0.5.

Exemple 3 : exemple de la température dans une chambre



En logique booléenne (Logique classique ou de Boole), le degré d'appartenance μ ne peut prendre que deux valeurs « 0 ou 1 » la température peut être :

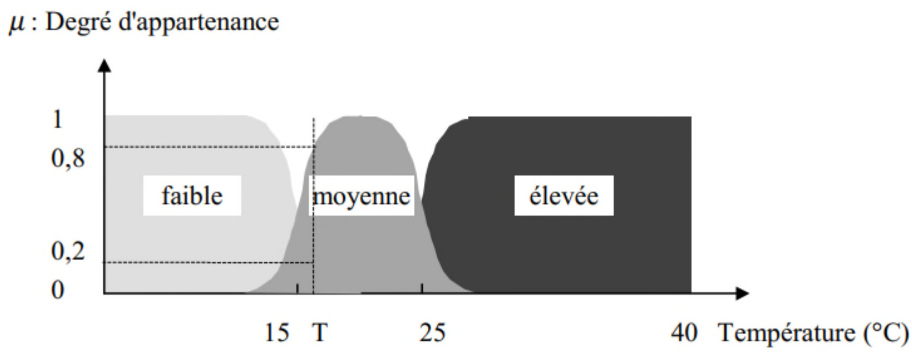
- faible : $\mu_{faible}(T)=1,\ \mu_{moyenne}(T)=0,\ \mu_{élevée}(T)=0$
- moyenne : $\mu_{faible}(T)=0,\ \mu_{moyenne}(T)=1,\ \mu_{élevée}(T)=0$
- élevée : $\mu_{faible}(T)=0,\ \mu_{moyenne}(T)=0,\ \mu_{élevée}(T)=1$

Elle ne peut pas prendre deux qualificatifs à la fois.

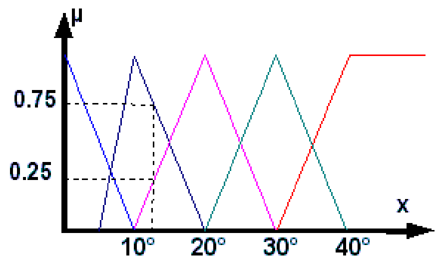
- En logique floue, le degré d'appartenance devient une fonction qui peut prendre une valeur réelle comprise entre 0 et 1.
- $\mu_{Moyenne}(T)$, par exemple, permis de quantifier le fait que la température puisse être considérer comme moyenne.

Dans ce cas, la température 18C° peut être considérée, à la fois, comme faible avec un degré d'appartenance de 0.2 et comme moyenne avec un degré d'appartenance de 0.8 (voir la figure ci-dessous), et on écrit :

$$\mu_{Faible}(T)=0.2,\quad \mu_{Moyenne}(T)=0.8 \text{ et } \mu_{Elevée}(T)=0$$



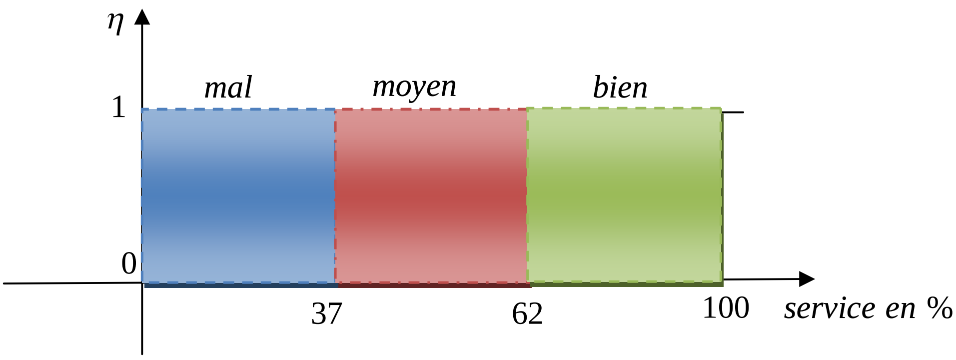
- En logique classique, le passage de Faible à Moyenne serait brusque. Une température de 15° serait par exemple faible, alors qu'une température de 16° serait moyenne. Et ça anormal !
- Parfois, on a besoin d'introduire d'autre ensembles flous par exemple on peut ajouter en plus des variables « faible » « moyenne » « élevée », les variable « très faible » et « très élevée »



Exemple 4 : L'exemple est le service dans un restaurant : un client entre à ce restaurant et il va manger et boire quelque chose, pendant ce temps ce client suit le service, on dit que cette personne va porter à son esprit une idée sur ce restaurant, donc il y a trois probabilités possibles :

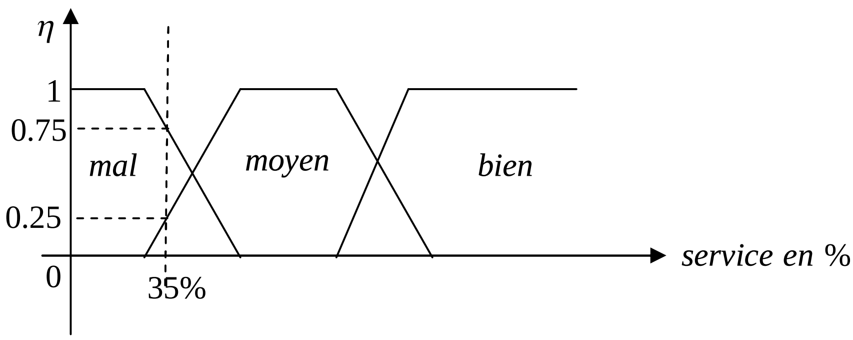
- Soit il dit que le service est mal,
- Soit il dit que le service est moyen,
- Ou soit il dit que le service est bien

- Si on utilise la logique de Boole, on va donner à chaque variable (mal, moyen, bien) soit la valeur 0 ou soit la valeur 1.
- Si on représente ces variables dans un plan, on ne trouve pas d'intersection entre les courbes de ces variables (voir la figure ci-dessous), avec η est le degré d'appartenance.



Présentation du niveau du service dans un restaurent (logique classique)

On remarque que cette représentation ne donne pas beaucoup d'informations sur l'exemple. Mais la logique floue donne plus d'informations (voir la figure ci-dessous)



Présentation du niveau du service dans un restaurent (logique floue)

Par exemple un service de 35% est de 0.25 mal et de 0.75moyen, par contre si on a utilisé la logique classique on obtient seulement 1 pour le service mal et les autres sont nulles, pour cela on remarque bien la différence entre la logique classique et la logique floue.

En conclusion,

- *Intérêt de la logique floue réside dans sa capacité à traiter et à manipuler l'imprécision et l'incertitude de l'information issue de l'aptitude de l'homme à décider, d'une façon pertinente, malgré la nature floue des connaissances disponibles.*
- *En effet, l'opérateur humain peut définir des stratégies de commande de façon linguistique avec un minimum de connaissance sur le processus sous forme de règles énoncées en langage naturel.*
- *Si «Observation», Alors «Décision» où Si «Prémisse», Alors «Conclusion», qui peuvent être utilisées pour l'identification des systèmes comme pour leurs commandes*

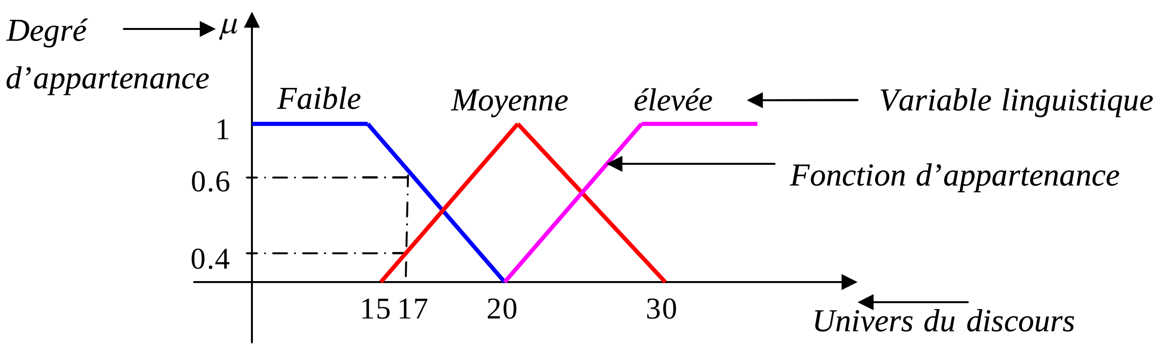
Exemple courant de quelques règles de conduite qu'un conducteur suit avec *Si-Alors*

Si le feu est rouge	si ma vitesse est élevée	et si le feu est proche	alors je freine fort
Si le feu est rouge	si ma vitesse est faible	et si le feu est loin	alors je maintiens ma vitesse
Si le feu est orange	si ma vitesse est moyenne	et si le feu est loin	alors je freine doucement
Si le feu est vert	si ma vitesse est faible	et si le feu est proche	alors j'accélère

3. Notions fondamentales sur la théorie des ensembles flous

Les éléments de base de la logique floue sont:

- Les variables linguistiques.
- Les ensembles flous.
- Les degrés d'appartenance.
- Les fonctions d'appartenance.
- Les règles floues.
- L'univers du discours



Bases générales de la logique floue

3.1. Variable linguistique

Une variable linguistique est une variable dont les valeurs sont des mots ou des phrases exprimées dans une langue naturelle ou une langue artificielle.

On appelle Variable linguistique *un triplet* $\{V, T_V, X_V\}$ *tel que :*

- V *est le nom de la variable linguistique (âge, taille, masse, erreur , température, . . .)*
- X_V c'est le domaine physique associé à la variable V , il est aussi appelé univers de discours, c'est, l'ensemble de toutes les valeurs numériques que peut prendre la variable numérique associée à la variable linguistique V .Exemple : X_V peut être défini comme étant l'intervalle [0…120] pour la variable linguistique *âge*
- T_V *est un ensemble de sous-ensembles flous de* X_V *qui caractérisent V*

Exemple : $X_V = \{faible, moyenne, èlevée\}$ peut être défini pour la variable *température*

Exemple (La taille) *La variable linguistique de la taille (humaine) peut être dé finie, par exemple, par le triplet suivant :* $\{taille, [0; 250], (ftrès\ petit,\ petit,\ moyen,\ grand,\ très\ grandg\ )\}$

3.2. Ensemble flou :

Lorsqu' on divise le domaine de variation d'une variable à des sous domaines, chaque domaine est nommé par un terme spécial et chaque terme forme un ensemble flou.

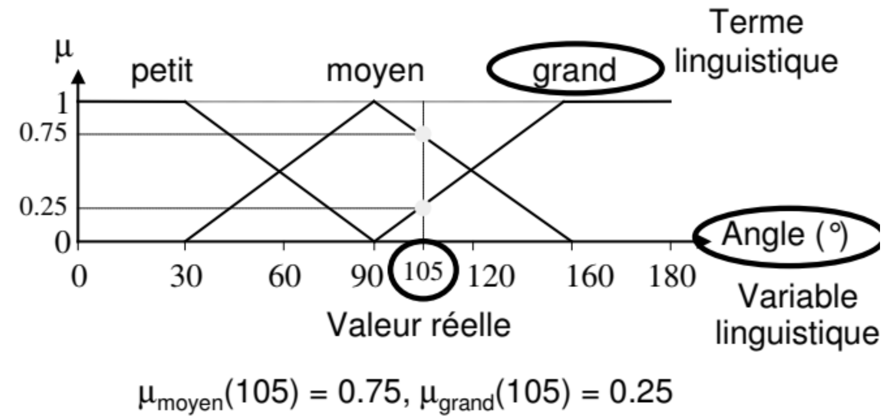
- Si on prend l'exemple précédent (la température), le domaine de variation de la variable température est divisé en trois ensembles flous : $\{faible, moyenne, èlevée\}$.

Un ensemble flou est complètement décrit par sa fonction d'appartenance comme suit :

- $\mu_A(x)$ $A = \{(x, \mu_A(x)) / x \in U\}$ cas continu
- $U = \{ x_i / i = 1,2,…,n \}$, cas discret
- $A = \{ \mu_A(x_1)/ x_1, \mu_A(x_2)/ x_2,…, \mu_A(x_n)/ x_n \}$ liste de paires ordonnées

3.3. Degré d'appartenance :

Nous disons qu'un élément x appartient à un ensemble flou A avec un degré d'appartenance η compris entre 0 et 1, donné par une fonction d'appartenance.



Un angle de 105° est appartient à l'ensemble flou 'moyen' avec un degré d'appartenance 0.75 et au même temps à l'ensemble 'grand' avec un degré d'appartenance 0.25.

3.4. Univers du discours :

L'ensemble de toutes les valeurs numériques associées à la variable linguistique. Dans l'exemple précédent, l'intervalle [0…30] représente l'univers du discours de la variable linguistique 'Température'.

3.5. Fonction d'appartenance :

Une fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ est une courbe qui définit comment chaque point dans l'univers du discours est tracé à une valeur d'appartenance entre 0 et 1.

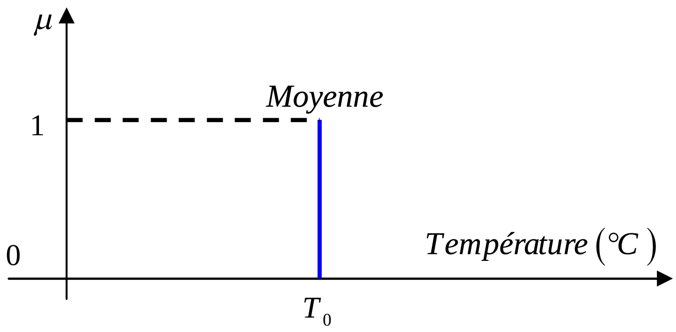
- Dans l'exemple précédent, Il y a trois ensembles floues 'faible', 'moyenne', 'élève', chaque ensemble est représenté par une fonction d'appartenance qui varie entre 0 et 1.

3.5.1. Formes des fonctions d'appartenances :

- La variable linguistique 'Angle' par exemple, dans l'exemple précédent ainsi que les termes petit, moyen, grand, sont définis par des fonctions d'appartenance qui portent respectivement les noms de variable linguistique.
- Les fonctions d'appartenance peuvent théoriquement prendre n'importe quelle forme, toutefois, elles sont souvent définies par des segments de droites, et dites « linéaires par morceaux ».
- Les fonctions d'appartenances des formes singleton, triangulaires, trapézoïdales, ou Gaussiennes sont les plus souvent utilisées à cause de :

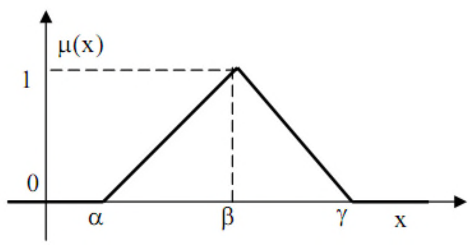
• Elles sont simples • Elles comportent des points permettant de définir les zones où la notion est vraie, les zones où elle est fausse,

- **Fonction d'appartenance singleton :** Les fonctions d'appartenance peuvent être égales à 1 pour une seule valeur de la variable linguistique et égale à 0 ailleurs, et prennent alors le nom de « fonctions d'appartenance singletons ».



Cette fonction est représentée sous cette forme $\mu(x) = \begin{cases} 1 & si\ T = T_0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

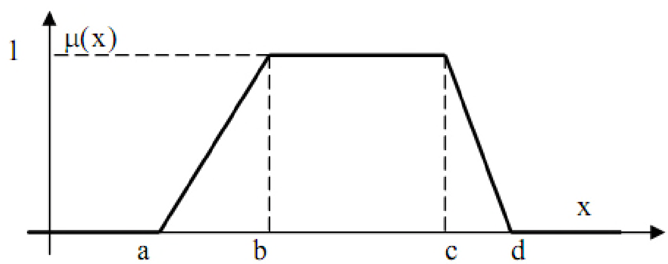
- **Fonction d'appartenance monotone croissante :** Elle est définie par trois paramètres (α, β, γ), qui déterminent les coordonnées des trois sommets.



Mathématique, elle est définie comme suit

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & si\ \alpha < x \le \beta \\ \dfrac{\gamma-x}{\gamma-\beta} & si\ \beta < x \le \gamma \\ 0 & si\ x > \gamma \end{cases} \quad \text{ou encore } \mu(x) = \max\left(\min\left(\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, \frac{\gamma-x}{\gamma-\beta}\right), 0\right)$$

- **Fonction d'appartenance trapézoïdale :** Elle est définie par quatre paramètres (a, b, c, d), qui déterminent les coordonnées des quatre sommets

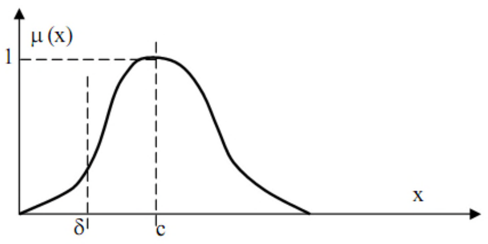


1

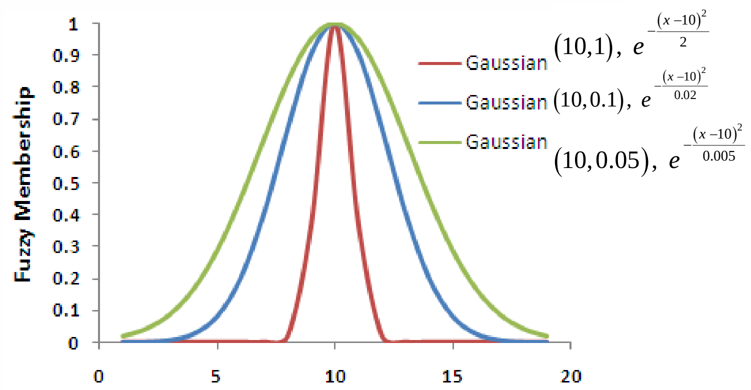
Mathématique, elle est définie comme suit

$$\mu(x)=\begin{cases}0 \quad si \quad x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} \quad si \quad a<x\le b\\ 1 \quad si \quad b<x\le c\\ \dfrac{d-x}{d-c} \quad si \quad c<x\le d\\ 0 \quad si \quad x>d\end{cases} \qquad \text{ou encore } \mu(x)=\max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a},1,\frac{d-x}{d-c}\right),0\right)$$

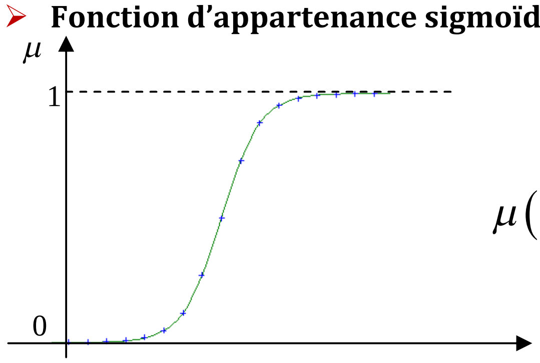
- **Fonction d'appartenance gaussienne :** est une fonction symétrique, elle dépende de deux paramètres, c et δ (la position du centre et la largeur de la forme de la courbe gaussienne respectivement) :



Mathématique, elle est définie par la fonction suivante : $\mu(x)=e^{-\frac{(x-c)^2}{2\delta^2}}$

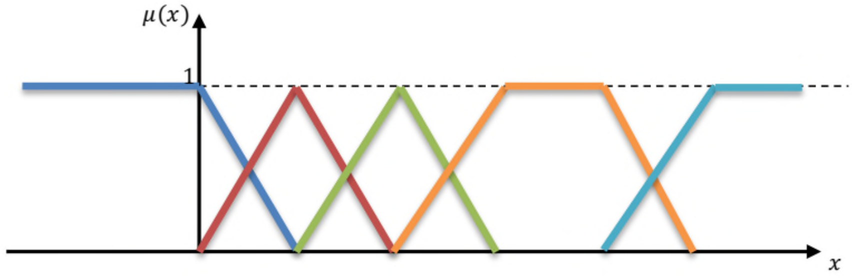


- **Fonction d'appartenance sigmoïde :** Elle est définie par deux paramètres a et c



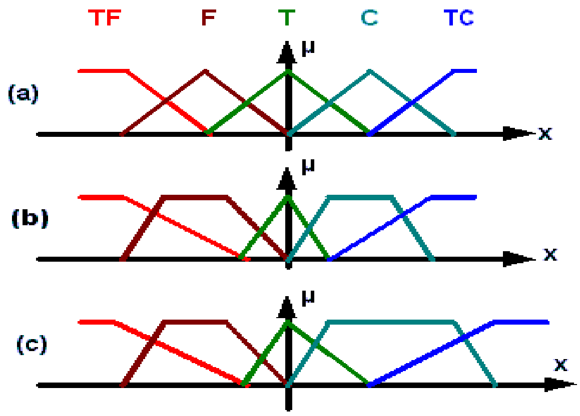
$$\mu(x)=\frac{1}{1+e^{-a(x-c)}}$$

Remarque : on peut tracer plusieurs ensembles flous sur le même graphe :



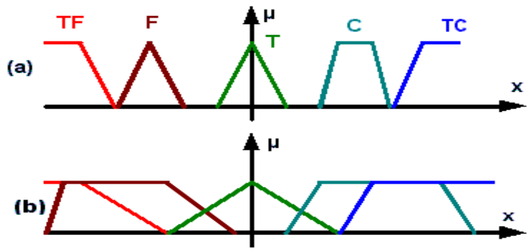
3.5.2. Considérations générales sur les fonctions d'appartenances:

- Les fonctions d'appartenances peuvent être symétriques et distribuées de manière équidistante
- Une forme est définie symétrique lorsque les fonctions d'appartenance sont symétriques par rapport x=0.
- Une forme est définie équidistante lorsque les maxima des fonctions d'appartenances des différents ensembles sont écartées de manière équidistante.



(a) Fonction d'appartenance symétrique et équidistante.
(b) Fonction d'appartenance symétrique et non équidistante.
(c) Fonction d'appartenance non symétrique et non équidistante.

- Il est important d'éviter les lacunes ou des chevauchements insuffisants de deux ensembles voisins, cela provoque des zones mortes (non-intervention des régulateurs).
- De même, on doit éviter un chevauchement trop important, surtout avec μ=1 entre deux ensembles voisins.

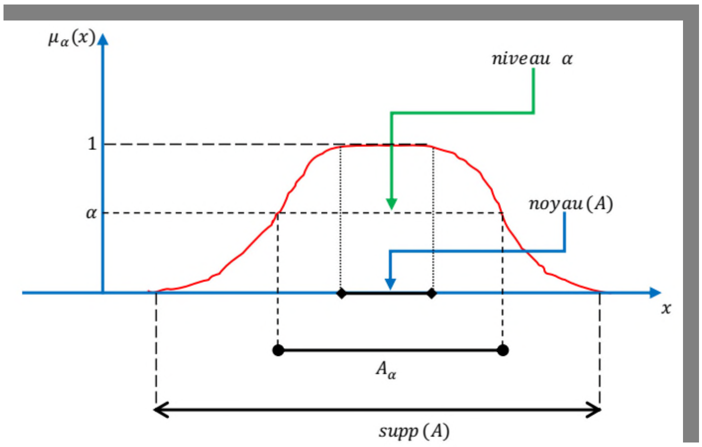


(a) Fonction d'appartenance avec lacunes ou chevauchement insuffisant
(b) Fonction d'appartenance avec chevauchement trop important

3.6. Propriétés des ensembles flous

Afin d'étudier un fondement mathématique permettant de calculer et de manipuler des ensembles flous, un certain nombre de propriétés doit être défini.

Parmi les définitions on peut citer la hauteur, le support, le noyau, l'écrêtage et la cardinalité d'un ensemble flou. On peut ajouter aussi les propriétés de normalité et convexité d'un ensemble flou.



3.6.1. La hauteur de F

L'appartenance d'un élément à un ensemble flou est mesurée par un degré.

La hauteur d'un ensemble flou F (notée $h(F)$) est égale au plus grand valeur (degré d'appartenance) prise par la fonction d'appartenance.

$$h(F) = \sup_{x \in X}(\mu_F(x))$$

Avec : $h(F)$ est la hauteur d'un ensemble flou F

- Un ensemble flou est normal s'il existe au moins un élément $x \in X$ tel que $\mu_F(x) = 1$
- Les ensembles flous qui ne sont pas normaux sont appelés sous-normaux.

L'opérateur $norm(F)$ est utilisé pour normaliser un ensemble flou, est défini par :

$$F_{normalisé} = norm(F) \Leftrightarrow \mu_{F_{normalisé}}(x) = \frac{\mu_F(x)}{h(F)}, \ \forall x \in X$$

3.6.2. Support de F

Le support d'un ensemble flou F est égal au sous-ensemble de l'univers X dont les éléments ont des degrés non nuls :

$$\sup por(F) = \{x \in X \ / \ \mu_F(x) > 0\}$$

Dans le cas où le support de l'ensemble floue F est un point unique dans X tel que $\mu_F(x) = 1$, F appelé singleton flou.

3.6.3. Noyau de

Le noyau d'un ensemble flou F, noté $noy(F)$, est l'ensemble des éléments de X pour lesquels la fonction d'appartenance de F égal à 1.

$$noy(F) = \{x \in X \ / \ \mu_F(x) = 1\}$$

3.6.4. Ecrêtage $\alpha - cut$ ou $\alpha - coupe$

L'écrêtage ou $\alpha - cut$, noté F_α, d'un ensemble floue F est égale au sous-ensemble de X dont les éléments possèdent un degré d'appartenance supérieur ou égale à α pour $\alpha \in [0,1]$:

$$F_\alpha = \{x \in X \ / \ \mu_F(x) \geq \alpha\}, \ \alpha \in [0,1]$$

La valeur de α est appelée, le niveau d'écrêtage α

2.7. Inférence floue (opérateur d'agrégation des règles).

- Une règle floue est une affirmation (**SI** prémisse **ALORS** conclusion (ou conséquence)) dont la prémisse et la conséquence sont des propositions flous ou des combinaisons de propositions flous par des connecteurs logiques (souvent **ET** et le **OU**)
- Par exemple, la règle floue « SI x_1 est A_1 ET x_2 est A_2 ALORS y est B » est formée d'une prémisse composée de deux propositions floues $(SI\ x_1 est\ \ A_1)$ ET $(SI\ x_2 est\ \ A_2)$ combinées par le connecteur logique **ET**, et une conséquence formée par une proposition floue simple (y est B)

Exemple de règles floues :

- S'il fait très chaud alors ouvrir la fenêtre
- Si vous être obèse alors faire du sport
- Si la maison et neuve et si elle n'est pas loin de la mer alors son coût est très élevé.

L'inférence est un mécanisme permettant de condenser l'information d'un système à travers d'un ensemble de règles linguistiques définies pour la représentation d'un problème quelconque.

- Chaque règle linguistique délivre une conclusion partielle qui est ensuite agrégée aux autres règles pour fournir une conclusion (agrégation).

On peut distinguer deux types :

2.7.1 : Inférence avec une seule règle

- Le cas d'une inférence avec une seule règle se présente lorsqu'il faut comparer plusieurs concurrents (objets ou personnes) dans une certaine situation et en choisir l'optimum.
- Les variables qui déterminent la situation sont des variables floues.
- On trouve cette problématique essentiellement dans les domaines non techniques, où il faut prendre une décision, comme par exemple l'achat d'un appareil, le recrutement d'un employer,etc.

la règle à une inférence est formuler comme suit :

$Y = [x_1 \ \ OU \ \ (x_2 \ \ ET \ \ \ x_3) \ \ OU .....] \ \ ET \ \ x_n$

Il faut choisir le concurrent dont le facteur d'appartenance est maximal.

2.5.2 Inférence avec plusieurs règles

Elle est utilisée pour la prise de décision différente suivant des conditions sur les valeurs des variables linguistiques.

Si condition 1, ALORS opération 1, OU

Si condition 2, ALORS opération 2, OU

⋮

⋮

Si condition n, ALORS opération n

Exemple :

$$\mathcal{R}_1: \ \boldsymbol{si} \ \ le\,débit\,d'\,O_2\,est\,faible\ \ \boldsymbol{alors}\ \ la\,puissance\,est\ \ faible$$

$$\mathcal{R}_2: \ \boldsymbol{si} \ \ le\,débit\,d'\,O_2\,est\,bon\ \ \boldsymbol{alors}\ \ la\,puissance\,est\ \ haute$$

$$\mathcal{R}_3: \ \boldsymbol{si} \ \ le\,débit\,d'\,O_2\,est\,haut\ \ \boldsymbol{alors}\ \ la\,puissance\,est\ \ faible$$

- Les conditions peuvent dépendre d'une ou plusieurs variables. Dans le deuxième cas, les variables sont liées entre elles par des opérateurs de la logique floue de forme Et et OU.
- A chaque variable sont attribuée des fonctions d'appartenance, tenant compte des ensembles flous formés par ces variables.

Exemple

SI x est A_1 ET y est B_1 ALORS z est C_1
SI x est A_2 ET y est B_2 ALORS z est C_2
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
SI x est A_n ET y est B_n ALORS z est C_n

Avec x , y et z sont variables linguistiques qui représentent les variables d'état du processus et les variables A_i , B_i et C_i , sont les ensembles flous des variables x , y et .

7. Les opérateurs de la logique floue :

Afin de mieux comprendre les différents opérateurs de la logique floue, nous allons prendre la règle suivante comme exemple :

SI l'air est froid ET SI le vent est fort ALORS il faut fermer la porte.

Notons

x et **y** les variables linguistiques caractérisant la température de l'air et la force du vent

μ_A(x) : fonction d'appartenance associée à la propriété «l'air est froid»,

µB(y) : fonction d'appartenance associée à la propriété «le vent est fort»,

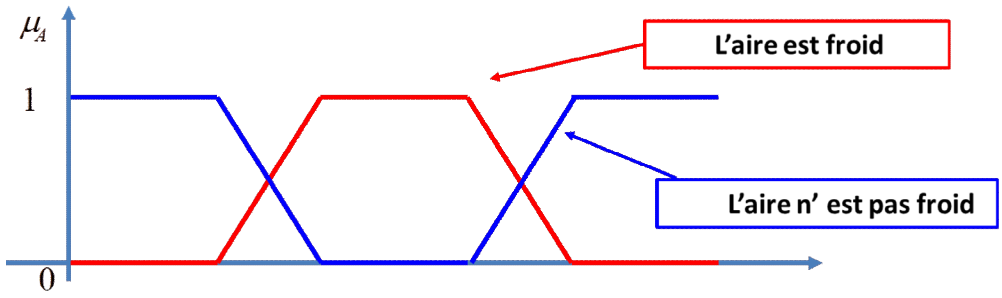
µE(z) : fonction d'appartenance associée à la propriété «l'air est froid et le vent est fort», **µO(z) :** fonction d'appartenance associée à la propriété «l'air est froid ou le vent est fort»,

µC(z) : fonction d'appartenance associée à la propriété «l'air n'est pas froid».

7.1. Opérateur NON (Complément, négation ou inverse):

L'opérateur logique correspond au complément d'un ensemble flou est la négation, il est défini comme suit : $\mu\left(Non\ A\right) = 1-\mu\ \left(A\right)$

La propriété «l'air n'est pas froid» peut être caractérisée de façon évidente par la fonction d'appartenance $\mu_C\left(z\right)=1-\mu_A\left(x\right)$



A noter qu'il s'agit de l'opérateur NON, appelée aussi «complément», «négation» ou «inverse».

7.2. Opérateur ET: (intersection) :

L'opérateur ET désigne les éléments appartenants à la fois à deux ensembles A et B et on écrit :

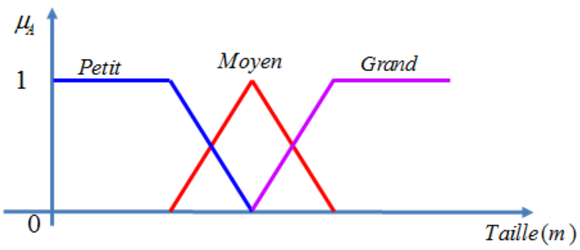
$C = A \cap B = A\ ET\ B$

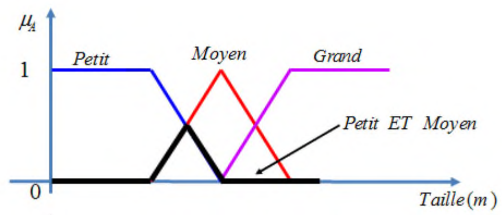
Cet opérateur est réalisé, en logique floue, par la formulation du minimum de la façon suivante :

$\mu_E(z) = \mu_{A\ et\ B}(z) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$

Le degré de vérité de la proposition «$A\ ET\ B$» est le minimum des degrés de A et de B

- Cet opérateur est utilisé pour caractériser la satisfaction simultanée de deux propriétés.
- il est possible que la fonction d'appartenance résultante $\mu_E(z)$ n'atteigne pas la valeur 1.
- On peut facilement vérifier que l'opérateur minimum est commutatif, c'est à dire qu'il est possible d'invertir $\mu_A(x)$ et $\mu_B(y)$ sans que le résultat change.
- Cet opérateur peut être appliqué à plus de deux ensembles



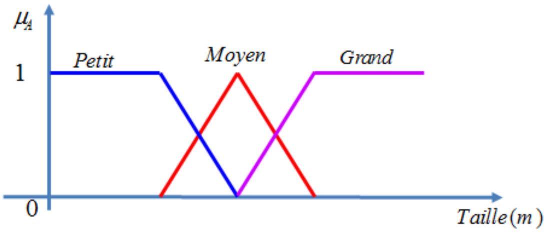


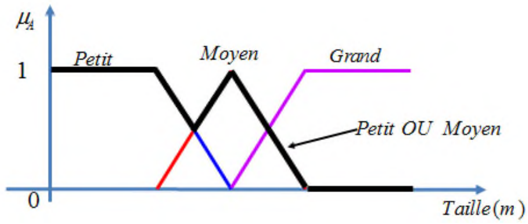
7.3. Opérateur OU (Union) :

La réalisation de l'opérateur **OU** en logique floue se fait, en général, par la formulation du maximum, appliquée aux fonctions d'appartenance $\mu_A(x)$ et $\mu_B(y)$ des deux ensembles A et B. On a donc l'opérateur maximum.

$$\mu_O(z) = \mu_{A\ \mathrm{OU}\ B}(z) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(y)\}$$

- L'opérateur maximum est aussi commutatif et associatif





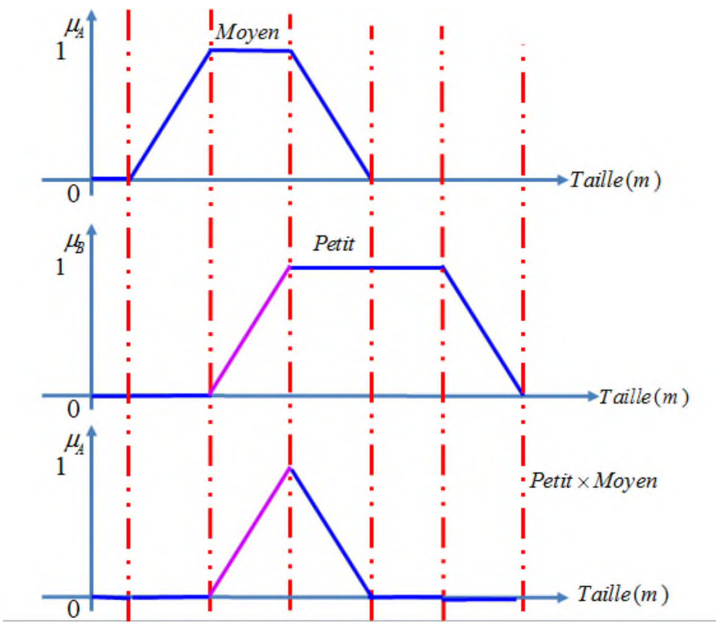
Remarque : La formulation du minimum et du maximum sont réalisées les opérateurs ET et OU. Dans la plupart des cas, ces opérateurs donnent des résultats convenables, surtout pour le réglage et la commande par logique floue. Cependant, dans certaines circonstances, il peut être judicieux d'utiliser d'autres opérateurs, soit pour simplifier le traitement numérique, soit pour mieux tenir compte des opérations floues.

7.4. Opérateur ET, réalisé par opérateur arithmétique.

L'opérateur **ET** est réalisé par la formation du produit appliqué aux fonctions d'appartenance, d'après la relation suivante/

$$\boldsymbol{\mu}_E\left(\mathbf{z}\right)=\boldsymbol{\mu}_{A\ et\ B}\left(\mathbf{z}\right)=\boldsymbol{\mu}_A\left(\mathbf{x}\right).\boldsymbol{\mu}_B\left(\mathbf{y}\right)$$

- La fonction d'appartenance résultante est toujours est inférieure ou égale à 1. Elle reste donc à l'intérieur de l'intervalle défini par $\mu\in\left[0,1\right]$.
- La relation précédente peut être étendue à plus de deux termes dans le produit lorsqu'il faut combiner trois ou plusieurs ensembles. L'opérateur produit est souvent utilisé dans le domaine de réglage et de commande par logique floue comme alternative de l'opérateur minimum.

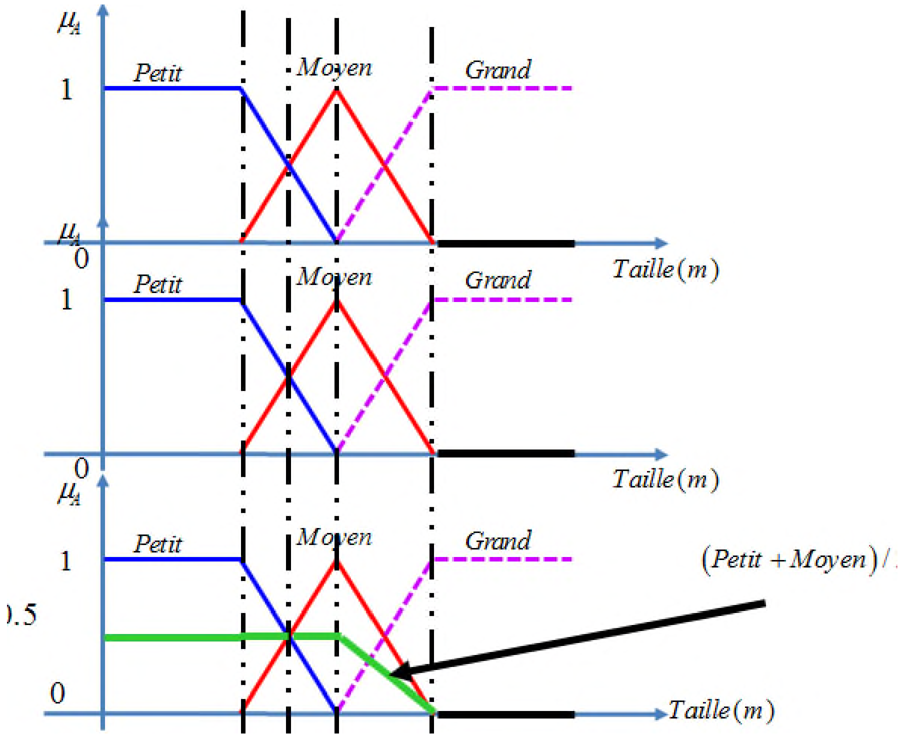


7.5. Opérateur OU, réalisé par opérateur arithmétique

Il correspond à la valeur moyenne des fonctions, selon la relation suivante :

$$\mu_O(z) = \mu_{A\ ou\ B}(z) = \frac{\mu_A(x) + \mu_B(y)}{2} \quad ,$$

- Il est fort possible que la somme [$\mu_A(x)+\mu_B(y)$] dépasse le domaine admissible [0,1]. Afin que cette somme reste dans le domaine défini, on peut la normaliser.
- Dans ce cas aussi, il est possible d'étendre la règle de calcul précédente à plusieurs termes. Il faut alors diviser la somme par le nombre de termes, afin d'obtenir une normalisation simple.



7.6. Opérateurs ET flou :

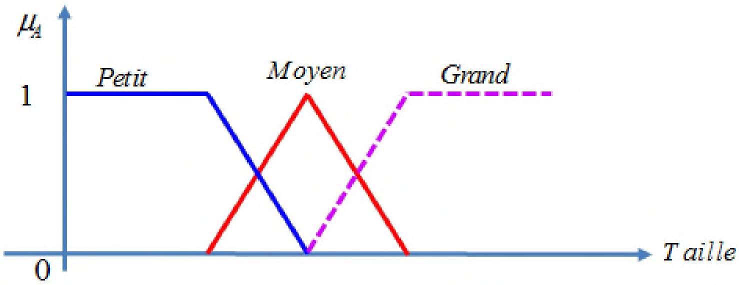
Cet opérateur est une combinaison entre l'opérateur minimum et la moyenne arithmétique. La combinaison est formulée comme suit :

$$\mu_E(z) = \mu_{A\ et\ B}(z) = ß\ \min\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right] + (1-ß)\frac{\mu_A(x) + \mu_B(y)}{2}$$

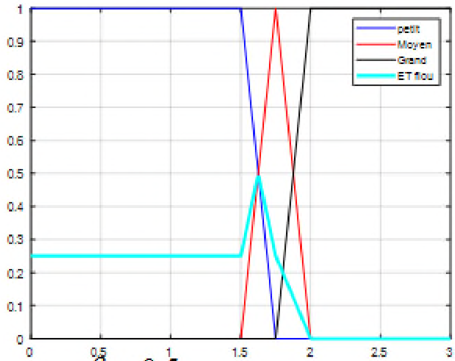
avec $0 \le ß \le 1$

Pour *ß=1*, l'opérateur ET flou correspond à l'opérateur min

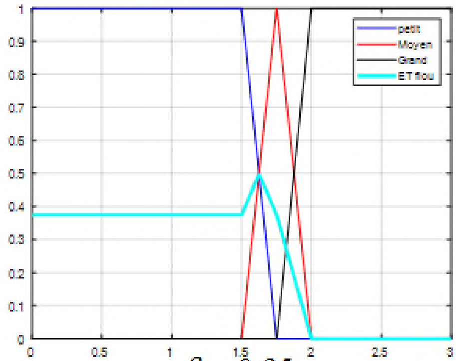
Pour *ß=0*, l'opérateur ET flou correspond à la moyenne arithmétique



$$ET\_flou = \beta \ \min[P, M] + (1-\beta)\frac{P+M}{2}$$



$\beta = 0.5$



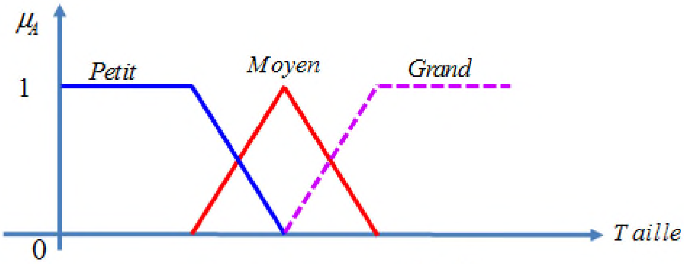
$\beta = 0.25$

7.7. Opérateurs OU flou :

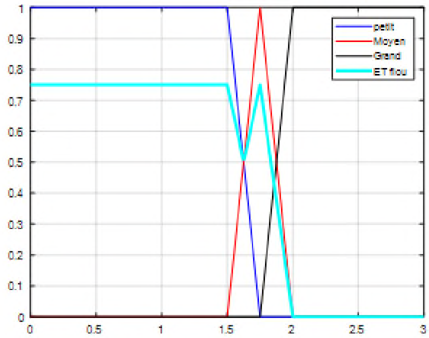
Cet opérateur est une combinaison entre l'opérateur maximum et la moyenne arithmétique, il peut être formulé comme suit :

$$\mu_E(z) = \mu_{A \text{ OU } B}(z) = ß \ \max[\mu_A(x), \mu_B(y)] + (1-ß)\frac{\mu_A(x)+\mu_B(y)}{2}$$

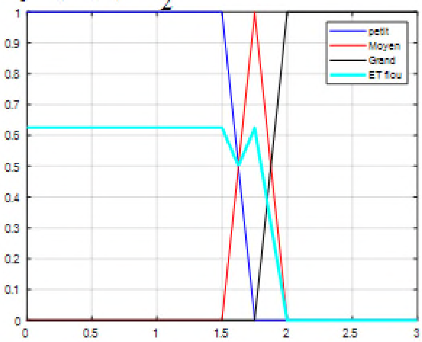
Pour ß=1, l'opérateur OU flou correspond à l'opérateur MAX
Pour ß=0, l'opérateur OU flou correspond à la moyenne arithmétique



$$OU\_flou = \beta \ \max[P, M] + (1-\beta)\frac{P+M}{2}$$



$\beta = 0.5$



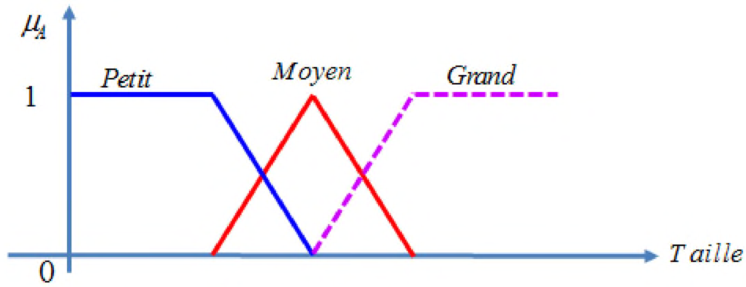
$\beta = 0.25$

7.8. L'opérateur min-max et l'opérateur ß

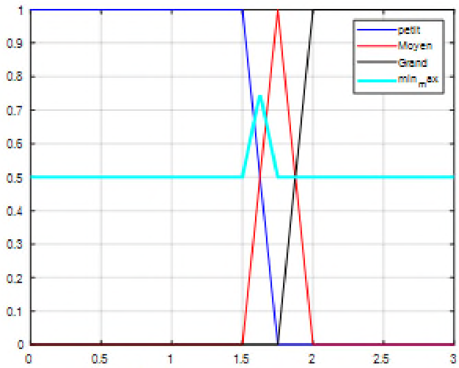
L'opérateur min-max est défini par la combinaison des opérateurs minimum et maximum, selon

$$\mu_E(z) = ß \;\min\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right] + (1-ß)\max\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right]$$

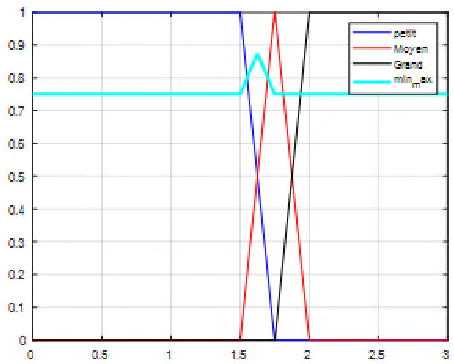
- Le facteur $\beta \in [0,1]$, permet de pondérer les deux opérateurs.
- Pour *ß=1*, on obtient l'opérateur ET, réalisé par la formulation du minimum,
- Pour *ß=0*, on aboutit à l'opérateur OU, réalisé par la formulation du maximum. Par contre,
- Pour *ß=0,5* conduit à l'opérateur OU, réalisé par la formation de la somme.



$$OU\_flou = \beta \;\min[P,M] + (1-\beta)\max[P,M]$$



$\beta = 0.5$



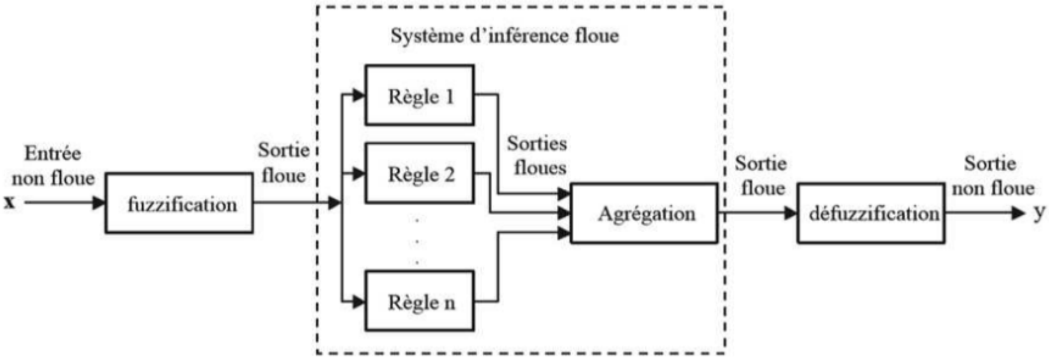
$\beta = 0.25$

L'opérateur ß est défini de la manière suivante

$$\mu(z) = [\mu_A(x), \mu_B(y)]^{1-\beta} + \{(1- [1-\mu_A(x)][1-\mu_B(y)]\}^{\beta}$$

8. Structure interne d'un système d'inférence flou

Un système d'inférence floue (SIF) est formé de trois blocs comme indiqué sur la figure suivante :



Système d'Inférence Floue

8.1. La fuzzification :

- L'opération de fuzzification permet de passer du domaine réel au domaine du flou.
- Elle consiste à définir des ensembles flous pour les variables d'entrée et de sortie, cependant on doit connaître leurs domaines de définitions.
- Cette opération permet de fournir les degrés d'appartenances de la variable floue à ses ensembles flous en fonction de la valeur réelle des variables d'entrées, on réalise ainsi le passage des grandeurs physiques (grandeurs déterminées) en variables linguistiques (variables floues) qui peuvent alors être traites par les inférences.
- En général, on utilise des formes triangulaires ou trapézoïdales pour les fonctions d'appartenance,

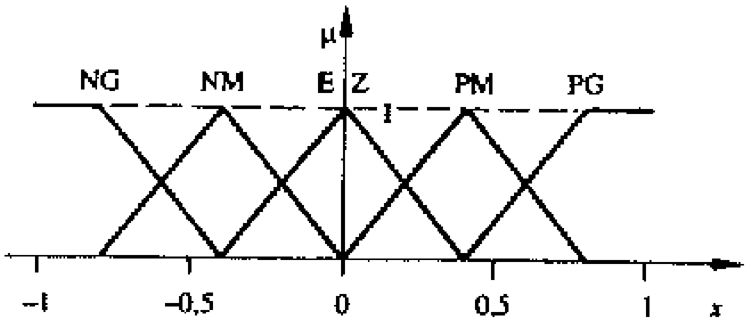
Comment fuzzifier ?

1. *Donner l'univers du discours : plage de variations possibles de l'entrée considérée.*
2. *Une partition en classe floue de cet univers.*
3. *Les fonctions d'appartenances de chacune de ces classes.*

Exemple1 : Chauffer une salle.

Selon les valeurs des entrées, le système flou indiquera qu'en sortie la puissance de chauffe devra prendre les valeurs de sortie « faible » ou « moyenne » ou « forte ».

Exemple : Soit une grandeur x (appartenant à [-1 , 1]) définie par 5 sous-ensembles flous NG (négatif grand), NM (négatif moyen), EZ (environ zéro), PM (positif moyen) et PG (positif grand).



Pour x = 0.5 , on associe $\mu_{PM}\left(0.5\right)=0.75$ et $\mu_{PG}\left(0.5\right)=0.25$

Pour x = – 0.1 , on associe $\mu_{EZ}\left(-0.1\right)=0.9$ et $\mu_{PM}\left(-0.1\right)=0.1$

Donc à chaque variable linguistique d'entrée (x), on fait correspondre une valeur linguistique (Négatif Grand, Négatif Moyen, …) avec un degré d'appartenance.

Remarque :

- Il n'existe pas de règle précise pour la définition des fonctions d'appartenance pour une variable d'entrée ou de sortie, les valeurs fréquemment utilisées sont au nombre de sept :

  NG : négatif grand NM : négatif moyen NP : négatif petit

  PG : positif grand PM : positif moyen PP : positif petit

  EZ : environ de zéro

- En générale, on introduit pour une variable x trois, cinq ou sept ensembles des ensembles précédents.

8.2. L'Inférence floue :

- L'inférence consiste à lier les grandeurs mesurées, qui sont les variables d'entrée (transformées en variables linguistiques à l'aide de la fuzzification) à la variable de sortie.
- L'inférence est l'étape où l'on établit les règles floues qui permettent d'aboutir à la commande en fonction des valeurs des entrées.
- L'inférence dans les systèmes flous à base de règles est le processus qui consiste à déterminer

  l'ensemble flou de sortie à partir des règles et des entrées.
- Donc le mécanisme d'inférence consiste à déterminer les règles floues activées.

Description des inférences de règles

Nous allons considérer un système flou avec "n" règles linguistiques suivant.

$$\begin{cases} \textbf{Si } x \text{ est } A_1 \; \textit{ET} \; y \text{ est } B_1 \; \textbf{alors } z \text{ est } C_1 \\ \textbf{Si } x \text{ est} A_2 \; \textit{ET} \; y \text{ est } B_2 \; \textbf{alors } z \text{ est } C_2 \\ \ldots \\ \textbf{Si } x \text{ est } A_n \; \textit{ET} \; y \text{ est } B_n \; \textbf{alors } z \text{ est } C_n \end{cases}$$

Où x, y et z sont des variables linguistiques qui représentent les variables d'état du processus et les variables. Ai, Bi et Ci (i=1,…, n) sont les ensembles flous définis dans les ensembles de référence pour x, y, z respectivement. Qui peuvent être PP, PG,EZ,…

Exemple : Soit deux entrées x1 et x2 et une sortie xR, toutes trois définies par les 5 sous-ensembles de l'exemple précédent.

Description d'une base de règles possible :

Si (x1 NG **ET** x2 EZ), **Alors** xR PG **ou**
Si (x1 NG **ET** x2 PM), **Alors** xR PM **ou**
Si (x1 NM **ET** x2 EZ), **Alors** xR PM **ou**
Si (x1 NM **ET** x2 PM), **Alors** xR EZ **ou**
Si (x1 NM **ET** x2 PG), **Alors** xR NM **ou**

…

Si (x1 PG **ET** x2 EZ), **Alors** xR **NG**

On peut aussi l'exprimée sous forme de tableau ou matrice :

x_R		x_1				
		NG	NM	EZ	PM	PG
x_2	NG			PG	PM	
	NM			PM	EZ	NM
	EZ	PG	PM	EZ	NM	NG
	PG	PM	EZ	NM		
	PG		NM	NG		

Remarque :

- Il est a remarqué qu'on n'est pas obligé de compléter toute la table. Les règles sont élaborées par un expert et sa connaissance du problème. Si ce dernier estime qu'il n'est pas nécessaire de remplir la table, c'est qu'il sait que les cas non considérés n'interviendront pas lors de la mise en application.
- degré d'activation de chaque règle représente:
  a) l'activation des règles qui consiste à appliquer une norme triangulaire (ou T-normes) pour obtenir le degré d'activation de chacune d'elles.
  b) une valeur comprise dans un intervalle.
  c) la recherche de la fonction d'appartenance pour la sortie de chaque règle.
  d) l'agrégation ou la recherche de la fonction d'appartenance résultante globale

Méthode d'inférence floue

Il existe plusieurs possibilités pour réaliser les opérateurs qui combinent les valeurs d'entrée et les valeurs de sortie, c'est ce qu'on appelle la ***méthode d'inférence.***

Les méthodes les plus utilisées sont

Méthode d'inférence MAX-MIN

Méthode d'inférence MAX- PROD

Méthode d'inférence SOMME- PROD

Pour illustrer le mieux possible ces méthodes. Supposons que l'on ait deux entrées x1 et x2 et une sortie xR, toutes trois définies par les sous-ensembles suivants (chacune est composée en trois ensembles NG EZ PG):

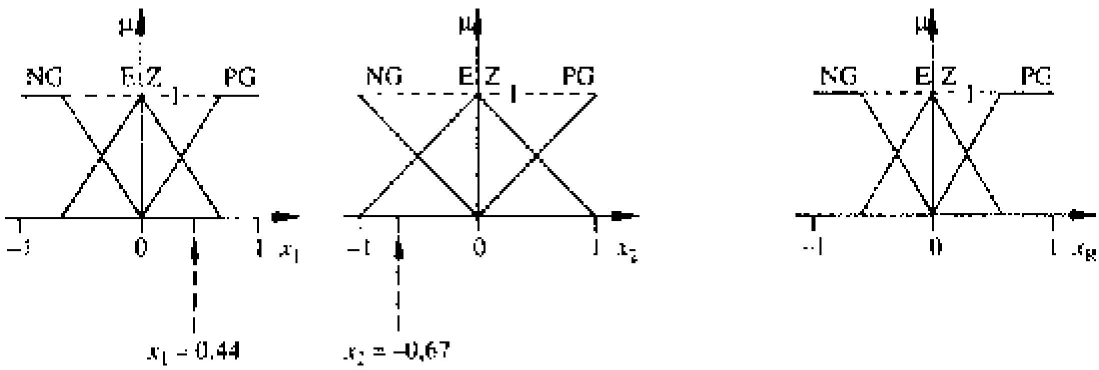


Fig. 3.17 Fonctions d'appartenance pour l'exemple servant à la description des méthodes d'inférence.

Supposons que x1 = 0.44 , x2 = – 0.67

L'inférence est composée de deux règles suivantes:

Si (x1 PG **ET** x2 EZ), **Alors** xR EZ **OU**
Si (x1 EZ **OU** x2 NG), **Alors** xR NG

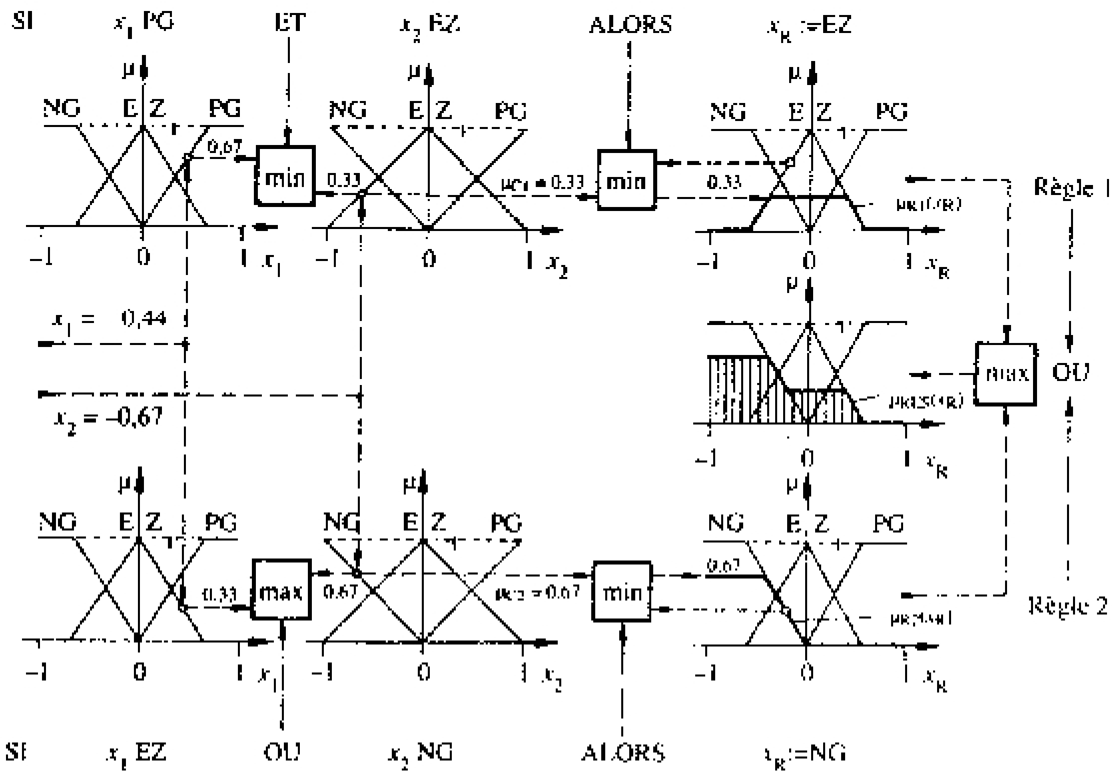
La prochaine étape consiste à « traduire » les opérateurs ET, OU et l'implication par ces fonction équivalentes.

8.2.1. Méthode d'inférence MAX-MIN

- Au niveau de la condition : **ET** est représenté par la fonction **Min**
  OU est représenté par la fonction **Max**

- Au niveau de la conclusion : **ou** est représenté par la fonction **Max**
  Alors est représenté par la fonction **Min**

(d'où la désignation)



La première règle donne :

1. x1 = 0,44 est PG avec un degré de 0,67 et x2 = -0,67 est EZ avec un degré de 0,33
2. (x1 PG **ET** x2 EZ) équivaut à min(0,67 ; 0,33) ce qui donne 0,33
3. Alors = min équivaut à tronquer la fonction d'appartenance de xR est EZ par 0,33

La deuxième règle donne :

1. x1 = 0,44 est PG avec un degré de 0,67 et x2 = -0,67 est EZ avec un degré de 0,33

2. (x1 EZ **OU** x2 NG) équivaut à max(0,67 ; 0,33) ce qui donne 0,67
3. Alors = min équivaut à tronquer la fonction d'appartenance de xR est NG par 0,67

Résultat :

Une fonction d'appartenance résultante donnée par la surface hachurée (qui sera traitée lors de la défuzzification).

8.2.2. Méthode MAX-PROD

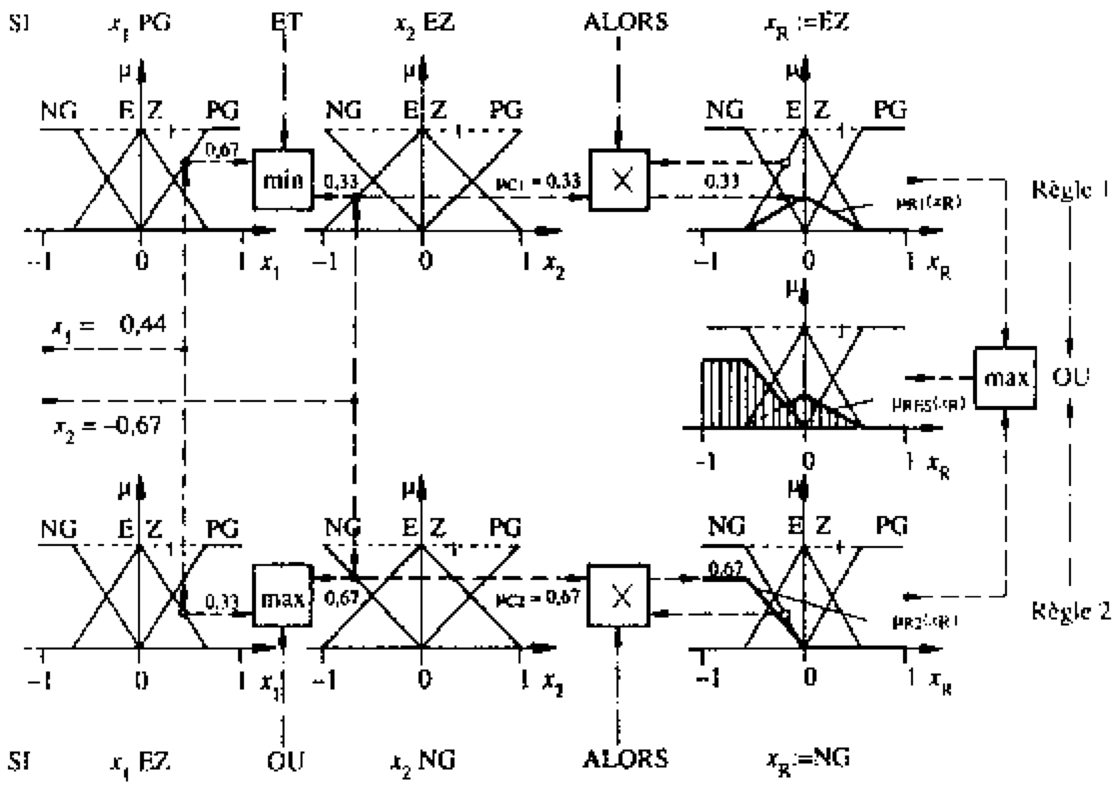
- Au niveau de la condition : **ET** est représenté par la fonction **Min**

OU est représenté par la fonction **Max**

- Au niveau de la conclusion : **ou** est représenté par la fonction **Max**

Alors est représenté par la fonction **Prod**

(d'où la désignation)



La première règle donne :

1. x1 = 0,44 est PG avec un degré de 0,67 et x2 = -0,67 est EZ avec un degré de 0,33
2. (x1 PG **ET** x2 EZ) équivaut à min(0,67 ; 0,33) ce qui donne 0,33
3. Alors = prod équivaut à muliplier la fonction d'appartenance de xR est EZ par 0,33

La deuxième règle donne :

1. x1 = 0,44 est PG avec un degré de 0,67 et x2 = -0,67 est EZ avec un degré de 0,33
2. (x1 EZ **OU** x2 NG) équivaut à max(0,67 ; 0,33) ce qui donne 0,67
3. Alors = min équivaut à multiplier la fonction d'appartenance de xR est NG par 0,67

Résultat :

Une fonction d'appartenance résultante donnée par la surface hachurée (qui sera traitée lors de la défuzzification).

8.2.3. Méthode SOMME-PROD

Il s'agit de la Somme Pondérée (ou Moyenne) : $\mu_{A,E}(x,y)=\dfrac{\mu_A(x)+\mu_E(y)}{2}$

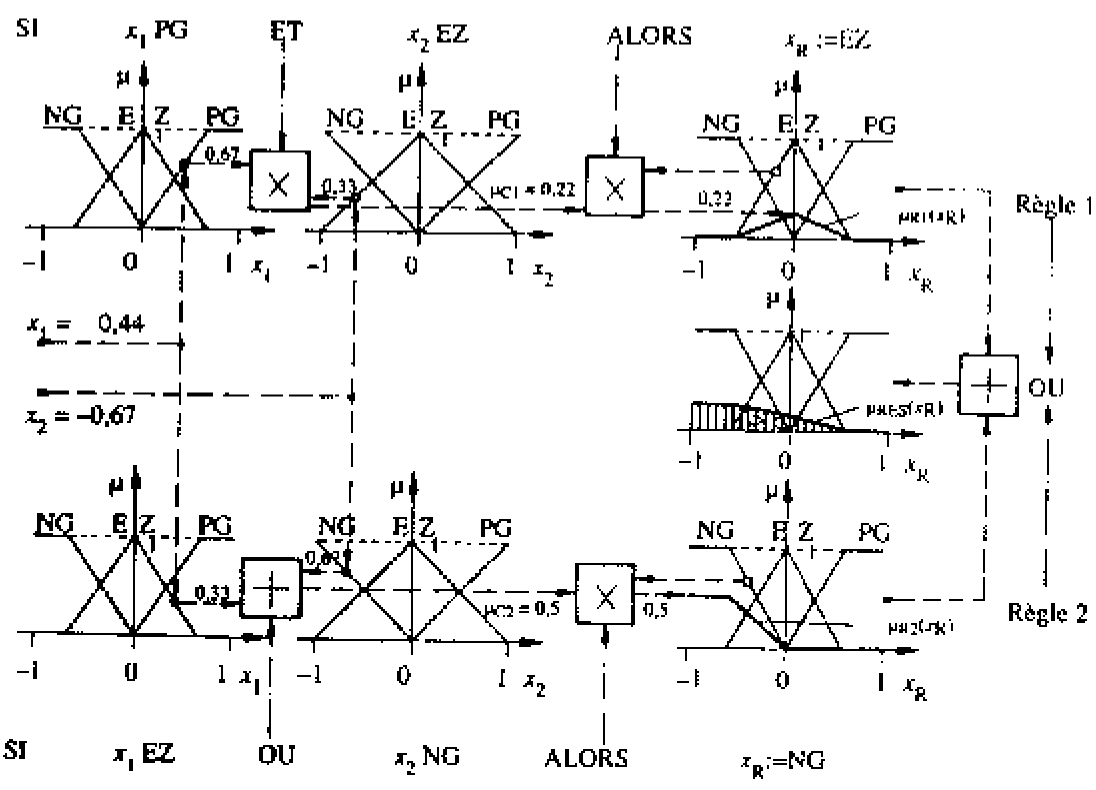
- Au niveau de la condition : **ET** est représenté par la fonction **Prod**

OU est représenté par la fonction **Somme**

- Au niveau de la conclusion : **ou** est représenté par la fonction **Somme**

Alors est représenté par la fonction **Prod**

(d'où la désignation)



La première règle donne :

1. x1 = 0,44 est PG avec un degré de 0,67 et x2 = -0,67 est EZ avec un degré de 0,33
2. (x1 PG **ET** x2 EZ) équivaut à prod(0,67 ; 0,33) = 0,67 * 0,33 ce qui donne 0,22
3. Alors = prod équivaut à muliplier la fonction d'appartenance de xR est EZ par 0,22

La deuxième règle donne :

1. x1 = 0,44 est PG avec un degré de 0,67 et x2 = -0,67 est EZ avec un degré de 0,33
2. (x1 EZ **OU** x2 NG) équivaut à somme(0,67 ; 0,33) = (0,67+0,33)/2 ce qui donne 0,5
3. Alors = min équivaut à multiplier la fonction d'appartenance de xR est NG par 0,5

Résultat :

Une fonction d'appartenance résultante donnée par la surface hachurée (qui sera traitée lors de la défuzzification).

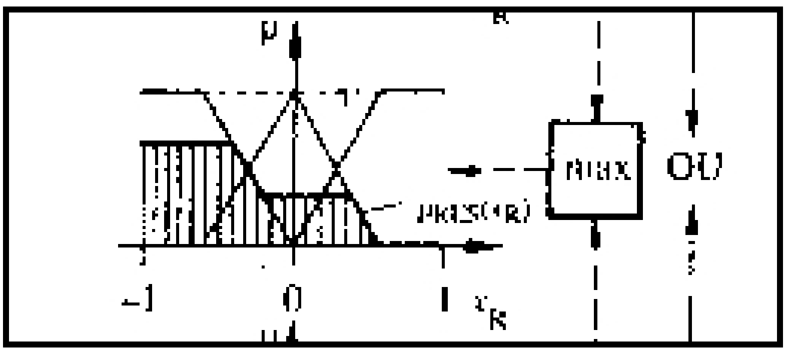
8.3. Défuzzification

- Les méthodes d'inférence fournissent une fonction d'appartenance résultante pour la variable de sortie. Il s'agit donc d'une information floue qu'il faut transformer en grandeur physique (valeur réelle) à partir des surfaces obtenues dans l'étape d'inférence, cette opération est appelée la Défuzzification . Les méthodes les plus couramment utilisées sont:

8.3.1. Défuzzification par centre de gravité

Elle consiste en la détermination du centre de gravité de la fonction d'appartenance résultante $\mu_{RES}(Xr)$. Dans ce contexte, il suffit de calculer l'abscisse Xr^* à l'aide de la relation générale suivante.

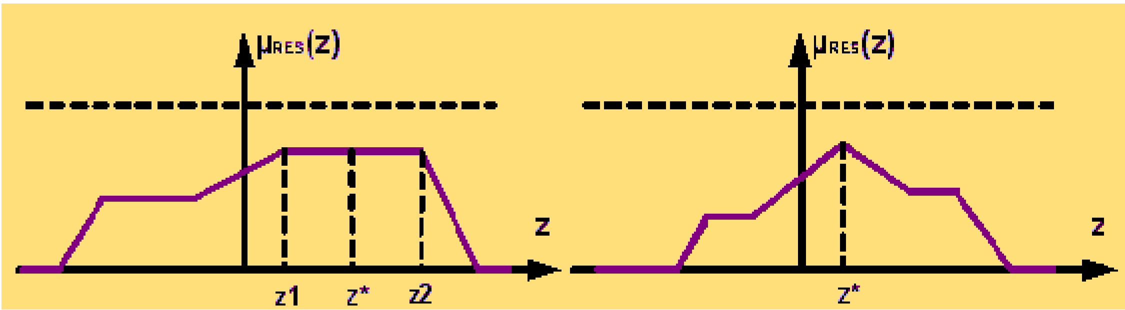
$$\frac{\int_{-1}^{1} X_r \mu_{res}(X_r) dX_r}{\int_{-1}^{1} \mu_{res}(X_r) dX_r}$$



Défuzzification par centre de gravité

8.3.2. Défuzzification par valeurs maximale

Comme signal de sortie z^*, on choisit l'abscisse de la valeur maximale de la fonction d'appartenance résultante μ_{RES} (z) comme le montre la figure 3.5.3(b).



(b) (a)

Défuzzification par valeur maximum.

Lorsque μ_{RES} (z) est écrêté, toute valeur entre z1 et z2 peut être utilisée. Afin d'éviter cette indétermination, on prend la moyenne des abscisses du maximum.

- **Dans le cas discret :**

Lorsque la fonction d'appartenance μ_{res} est discrète, le centre de gravité est donné par :

$$z^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}$$

Avec z_i représente la valeur de sortie pour le niveau i et μ_i la fonction d'appartenance.

II- Système d'inférence flou de type Takagi-Sugeno

- Dans ces systèmes, les prémisses des règles sont exprimées symboliquement et les conclusions sont par des fonctions linéaires.
- Notons par $x_i = \left[x_1, x_2, ..., x_p\right]$ les entrées du contrôleur flou, et par y sa sortie.

Règle i du procédé :

SI $x_1(t)$ est F_1^i et … et $x_p(t)$ est F_p^i ALORS $y = f(x_i)$

En général $f(x_i)$ est une fonction polynomiale en fonction des variables d'entrées $x_i(t)$

$$f(x_i) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i(t)$$

- Chaque règle possède une conclusion numérique, et de cette manière, le temps consommé par la procédure de défuzzification est réduit.
- A chaque règle floue est attribué un poids $\mu_i(x)$ qui dépend du degré d'appartenance de la variable flou $x_i(t)$ aux sous-ensembles flous F_j^i et du choix de la modélisation de l'opérateur logique reliant les prémisses (ET ou OU).
- L'opérateur logique ' ET' est souvent choisi comme le produit,

Les degrés d'appartenance est donnés comme suit :

:
$$\mu_i(x) = \prod_{j=1}^{p} F_i^j(x_j(t))$$

$F_i^j(x_j(t))$ est le degré d'appartenance de x_j à l'ensemble flou F_i^j et $\forall t \geq 0$: avec

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{p} \mu_i\left(x(t)\right) > 0 \\ \mu_i\left(x(t)\right) \geq 0 \end{cases},$$

Alors la sortie du contrôleur flou est donnée par la relation suivante :

$$x_r^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) x_{ri}}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)}$$

Exemple d'application :

Soit les trois règles floues suivantes :

Règle 1 : SI x_1 est **PG** **ET** x_2 est **EZ** **ALORS** $x_{r1} = x_1 - x_2$
Règle 2 : SI x_1 est **EZ** **ET** x_2 est **NG** **ALORS** $x_{r2} = 2x_1 + x_2$
Règle 3 : SI x_1 est **PG** **ET** x_2 est **NG** **ALORS** $x_{r3} = x_1 + 4x_2$

Pour $x_1 = 0.44$ *et* $x_2 = -0.67$
La première règle donne :

- $x_1 = 0.44$ est PG avec un degré de 0.67
- $x_2 = -0.67$ est EZ avec un degré de 0.33
- x_1 PG ET x_2 EZ équivalant $\mu_1 = min\left(0.33\,,\ 0.67\right) = 0.33$
- $x_{r1} = x_1 - x_2 = 0.44 + 0.67 = 1.11$

La deuxième règle donne :

- $x_1 = 0.44$ est EZ avec un degré de 0.33
- $x_2 = -0.67$ est NG avec un degré de 0.67
- x_1 EZ ET x_2 NG équivalant $\mu_2 = min\left(0.33\ ,\ 0.67\right) = 0.33$
- $x_{r2} = 2x_1 + x_2 = 2\times 0.44 - 0.67 = 0.21$

La troisième règle donne :

- $x_1 = 0.44$ est PG avec un degré de 0.67
- $x_2 = -0.67$ est NG avec un degré de 0.67
- x_1 PG ET x_2 NG équivalant $\mu_3 = min\left(0.67\ ,\ 0.67\right) = 0.67$
- $x_{r3} = x_1 + 4x_2 = 0.44 - 4\times 0.67 = -2.24$

et on a $x_r^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{3}\mu_i(x)x_{ri}}{\sum_{i=1}^{n}\mu_i(x)} = \dfrac{0.33\times\left(1.11\right) + 0.33\times 0.21 - 0.67\times 2.24}{0.33 + 0.33 + 0.67} = -0.8$