Géométrie des images et vision 3D
Master Système Embarqué

Aissa. Belmeguenai

Laboratoire de Recherche en Electronique de Skikda
Université 20 Août 1955- Skikda
BP 26 Route d'El-hadaeik Skikda, Algeria

2020

Outline

Définition

Un **système de vision artificielle**' comprend en général :

- Systme d'éclairage : Il définit les caractéristiques de la lumière qui éclaire l'objet à contrôler et doit être parfaitement maîtrisé.
- Le dispositif optique : Il est constitué d'un objectif qui permet de faire converger la lumière sur le capteur de la caméra.
- Un ou plusieurs capteurs optoélectroniques (caméra ou autre capteur capable de reconstituer une image), sensible à la lumière qui transforme l'énergie lumineuse en un signal électrique. On distingue :
  - Les **caméras analogiques** qui délivrent un signal analogique et nécessitent l'utilisation d'une carte d'acquisition,
  - Les **caméras numériques** qui convertissent le signal analogique donné par le capteur en une image numérique. ,

1. Système de vision artificielle

- Système de numérisation de l'image
- Système de traitement numérique :
  - Il permet de numériser, stocker et traiter les images ainsi que de configurer ou programmer les outils logiciels de vision industrielle.
  - Il peut être embarqué dans la caméra (**caméras intelligentes**).
- Système de communication avec l'environnement extérieur (Robot.)

Exemple d'applications:

1. Imagerie médicale

- Aider le médecin lors du diagnostic, le chirurgien lors de la réalisation d'un geste opératoire.
- Amélioration des images: rehaussement du contraste, élimination du bruit.
- Détection et localisation: positionnement des organes, détection des tumeurs, mesure de dimensions et de volumes.
- Imagerie interventionnelle: assistance enligne au praticien; opérations réalisées sur les images en temps réel.

Exemple d'applications:

2. Contrôle de qualité

- Eviter le contrôle visuel par un opérateur (tâche répétitive peu valorisante).
- Contrôle dimensionnel: le système de vision détermine la dimension, la forme, la position de l'objet qu'il observe.
- Contrôle d'aspect: le systéme détermine la couleur, la texture des objets observés.
- Contrôle de la qualité: á partir des données précédentes, le système détermine la qualité d'un produit.

3. La conduite d'outils ou d'engins (guidage).

La scène à photographier ou à filmer peut-être projetée simplement sur le capteur à l'aide d'une lentille convergente définie par sa distance focale f. La localisation et la taille de cette image est simple :

- L'objet AB est projeté en une image $A^{'}B^{'}$ renversée
- Le rayon (1) parallèle à l'axe optique sort de la lentille en passant par le foyer $F^{'}$.
- Le rayon (2) passant par le centre optique n'est pas dvié.
- Le point $B^{'}$ se trouve à l'intersection des rayons (1) et (2).

Remarque: le rayon (3) passe par l'autre foyer F, ressort parallèle à l'axe et passe aussi par $B^{'}$.

2. Principe de formation de l'image

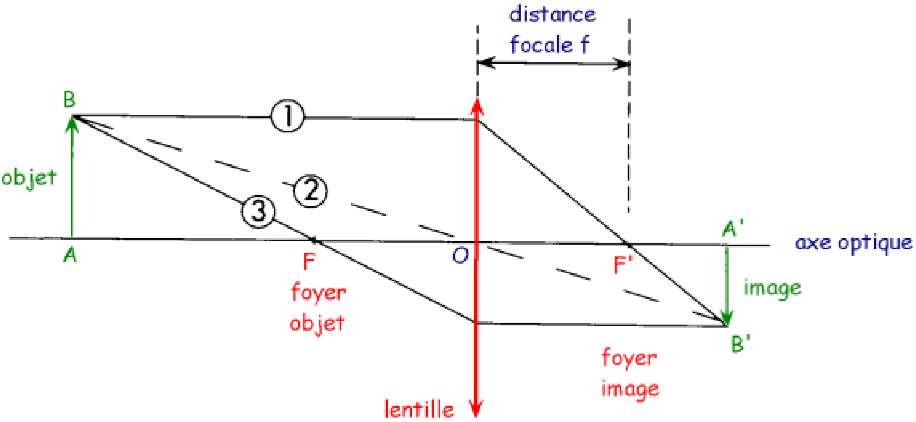


Figure : *Création d'une image par une lentille convergente*

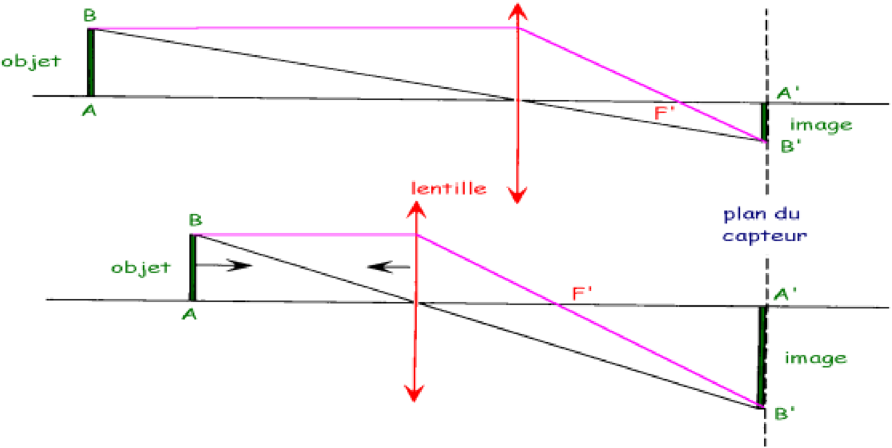


Figure : *Principe de la mise au point.*

2. Principe de formation de l'image

- Dans un photoscope ou un caméscope, la distance AO de l'objet à la lentille est variable de quelques centimètres à l'infini.
- Pour que l'image $A^{'}B^{'}$ soit sur le capteur, il faut donc faire varier la position de la lentille par rapport au capteur, soit $OA^{'}$: c'est le réglage de mise au point ou focus.
- Pour faire varier la taille de l'image projetée sur le capteur, il faut pouvoir changer la distance focale de la lentille.
- En changeant la distance focale et en déplaant la lentille pour refaire la mise au point, la taille de l'image varie et permet d'utiliser au mieux la surface du capteur.

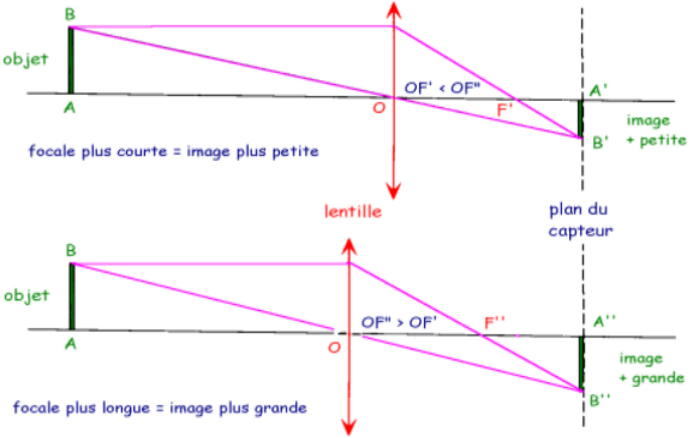
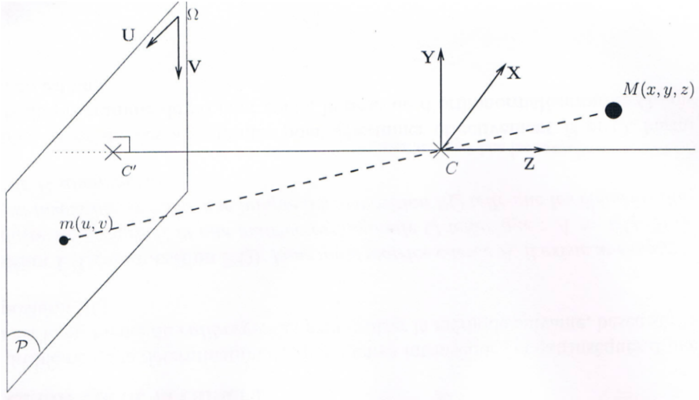


Figure : *Ajustement de la taille de l'image par variation de la focale.*

3. Modélisation d'une caméra

En vision par ordinateur, une caméra est modélisée par une matrice de projection P_{3*4} telle qu'un point 3D M se projette sur le pixel $m = P * M$. Une matrice de projection se décompose en trois éléments: la matrice K des paramètres intrinsèques, la matrice de rotation R spécifiant l'orientation de la caméra et la position C du centre de projection de la caméra.

Le modèle de caméra plus utilisé, **modèle à sténopé:**
On note par C' la projection orthogonale du centre optique C sur le plan-image P. La droite CC' est appelée axe optique de la caméra. L'image du point M de la scène est le point m du plan-image voir lafigure ci-après.



Les relations entre les coordonnées (x, y, z) dans le repère (C, X, Y, Z) d'un point M de la scène et les coordonnées (u, v) dans le repère (Ω, U, V) de son image m sont données par:

2.1 Paramètres intrinsèques

- On a alors les relations :

$$\begin{cases} u = u_0 + \alpha \dfrac{fx}{z} \\ v = v_0 + \beta \dfrac{fy}{z} \end{cases} \quad (1)$$

Où f est focale de la caméra (f) la distance entre les points C et C' (u_0, v_0) les coordonnes de C' dans le repère (Ω, U, V) .

3.2 Matrice de projection de la caméra

L'écriture matricielle de l'équation (1) est donnée par:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Où $\alpha et \beta positifs$.

En effet, tout point de la droite (le rayon lumineux) joignant les points C et M se projette en m. Il est donc possible d'écrire:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} f\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \simeq K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{4}$$

Où $K = \begin{pmatrix} f\alpha & 0 & u_0 \\ 0 & f\beta & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice triangulaire d'ordre 3, est appelé matrice des paramètres intrinsèques à la caméra. Ces paramètres sont la focale de la caméra, la taille de ses pixels, et les coordonnées pixels de $C^{'}$. si $\alpha = \beta$ alors les pixels sont carrés.

Léquation 4 sécrit alors:

$$m \simeq K \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5}$$

m est donné à un coefficient multiplicatif près. Les coordonnées s'obtiennent en normalisant à 1 la dernière coordonnée de m.

Les relations entre les coordonnées $(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ dans le repère scène R_s d'un point M de la scène et les coordonnées (x, y, z) dans le repère caméra R_c sont données par:

2.1 Paramètres extrinsèques

- On a les relations :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{pmatrix} + t \qquad (6)$$

- Sous forme d'un produit matriciel on a:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (Rt) \begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

2.1 Paramètres extrinsèques

Les équations (4) et (7) permettent ainsi d'écrire :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = K\left(Rt\right)\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ z^{'} \end{pmatrix} \quad (8)$$

3.2 Matrice de projection de la caméra

- On pose $K(Rt) = P$ matrice d'ordre 3×4 est appelée matrice de projection de la caméra.
- R et t correspondent à lorientation et à la position de la caméra dans le repre R_s.

  Remarque: La matrice P se décompose sous la forme:

$$P = KR(I_3 R^{-1} t) \tag{9}$$

Où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

- Cette dernière formule permet de déduire:

$$P \begin{pmatrix} C^{\rightarrow} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{10}$$

Remarque: Le passage du repère de la scène au repère de la caméra est possible sin on connu la position et l'orientation de la caméra dans le repère de la scène.

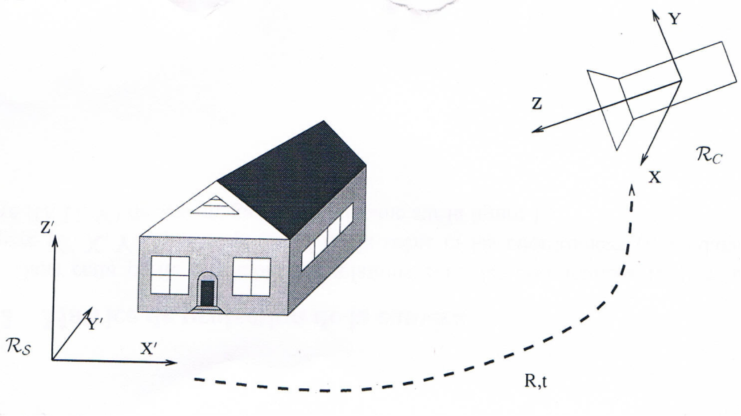


Figure : *Passage du repère de la scène au repère de la caméra*

2.4.1 Généralités sur le calibrage:

- Le calibrage géométrique d'une caméra consiste à déterminer la relation mathématique existant entre les coordonnées des points 3D de la scène observée et les coordonnées 2D de leur projection dans l'image.
- Cette étape de calibrage constitue le point initial pour plusieurs applications de la vision artificielle, comme par exemple la reconnaissance et la localisation d'objets.
- le contrôle dimensionnel de pièces.
- La reconstruction de l'environnement pour la navigation d'un robot mobile, etc.

2.4.2 Calcul de la matrice de projection:

Calibrer une caméra: déterminer la transformation ponctuelle faisant passer du point 3D exprimé dans un repère absolu à son image.

- Si les cordonnées des point $M_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}$ 3D de la de la scène et les cordodonées de leur projection point $m_i = \begin{pmatrix} su_i \\ sv_i \\ s \end{pmatrix}$ 2D sont connus.
- La matrice de projection P peut être déterminer à partir des relations données par l'équation: $m_i = PM_i$
- $$\begin{pmatrix} su_i \\ sv_i \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.4.2 Calcul de la matrice de projection:

$su_i = P_{11}X_i + P_{12}Y_i + P_{13}Z_i + P_{14}$ (1)
$sv_i = P_{21}X_i + P_{22}Y_i + P_{23}Z_i + P_{24}$ (2)
$s = P_{31}X_i + P_{32}Y_i + P_{33}Z_i + P_{34}$ (3)

- $(1) - (3)u_i$ donne
$(P_{11} - P_{31}u_i)X_i + (P_{12}) - P_{32}u_i)Y_i + (P_{13} - P_{33}u_i)Z_i + P_{14} - P_{34}u_i = 0$
- $(2) - (3)v_i$ donne
$(P_{21} - P_{31}v_i)X_i + (P_{22}) - P_{32}v_i)Y_i + (P_{23} - P_{33}v_i)Z_i + P_{24} - P_{34}v_i = 0$
- $2N$ équations linéaires à 12 inconnues P_{ij}.

2.4 Calibrage de caméra

$$\begin{bmatrix} X_i & Y_i & Z_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_iX_i & u_iY_i & u_iZ_i & u_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_i & Y_i & Z_i & 1 & v_iX_i & v_iY_i & v_iZ_i & v_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ P_{14} \\ P_{21} \\ P_{22} \\ P_{23} \\ P_{24} \\ P_{31} \\ P_{32} \\ P_{33} \\ P_{34} \end{bmatrix} = 0$$

- Ce système peut s'écrire sous la forme $A_iP = 0$
- P connue à un coéfficient multiplicatif près. Poser $P_{34} = 1$
- Résolution aux moindres carrés

- Un système $AX = B$ avec une matrice $(m \times n,\ m > n)$ n'a pas de solution ex: approximation d'une droite $Y = AX + B$ à partir de points.
- Principe des moindres carrés: trouver X minimisant l'erreur résiduelle $\sum (AX - B)^2$
- La solution aux moindres carrés de $Y = AX + B$ est $(A^t A)^{-1} A^t B$.

2.4.3. Extraction des paramètres intrinsèques et extrinsèques
De la matrice de projection P

- Nous pouvons extraire les paramètres intrinsèques : la matrice de calibrage K,
- Paramètres extrinsèques: la matrice de rotation R et la position t de la caméra.
- R et t seront donnés par rapport au repère dans lequel les points 3D sont donnés.

2.5 Géométrie épipolaire

Définition:

- La géométrie épipolaire est un modèle mathématique de géomtrie, qui décrit les relations géométriques de différentes photos du même objet, prises de différents points d'observation.
- La géométrie épipolaire sert à restituer l'information tridimensionnelle à partir d'images.
- étude des propriéts des transformations projectives impliquant deux projections perspectives.

2.5 Géométrie épipolaire

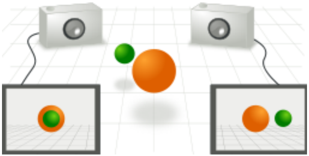


Figure : *Deux appareils photo observent la même scène de deux positions différentes*

2.5 Géométrie épipolaire

Deux projections perspectives:
Un point M de P^3 est transféré sur deux plans projectifs π_1 et π_2 :

- Connaissant les matrices des projections P_1 et P_2 , on peut calculer les coordonnées des points m_1 et m_2 à partir de celles de M .
- Nous allons nous intéresser ici aux liens qui existent entre m_1 et m_2. Ces liens sont caractérisés par la géométrie épipolaire qui découle de la contrainte épipolaire.

$$m_1 = P_1 M = K_1 \left(R_1 t_1 \right) \tag{11}$$

$$m_2 = P_2 M = K_2 \left(R_2 t_2 \right) \tag{12}$$

Où K_i et $(R_i t_i)$ désigneront les matrices intrinsèque et extrinsèque de la caméra quand la formation de l'image est modélisée par une transformation projective.

Remarque: La décomposition ne peut pas être détermine car les matrices de projection sont inconnues.

Droites épipolaires:
Connaissant un point projeté sur l'un des plans, que peut-on déduire du point projeté dans l'autre ?:

- Le point m_1 peut être la projection de n'importe quel point de l'espace situé sur la droite $C_1 m_1$.
- La projection de cette droite $C_1 m_1$ dans le plan projectif π_2 est également une droite l_2.
- La droite l_2 est appelée droite épipolaire de π_2 associée à m_1.
- La droite l_1 est appelée droite épipolaire de π_1 associée à m_2.

2.5 Géométrie épipolaire

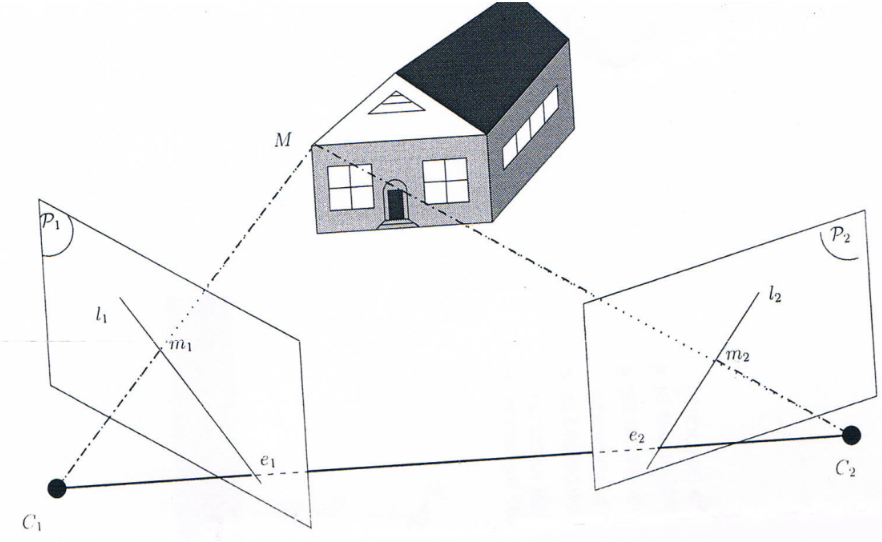


Figure : *Problème à deux caméras.*

épipoles ou points épipolaires:

- Le centre de projection C_1 appartient à toutes les droites joignant un point M de l'espace à sa projection m_1 dans π_1 .
- La projection e_2 de C_1 dans π_2 appartient donc à toutes les droites épipolaires d'un point de π_1 .
- Les points e_1 et e_2 sont appelés épipoles ou points épipolaires.
- La droite joignant les centres optiques (donc passant par les épipoles) est appelée droite de base.

Plan épipolaire et faisceau épipolaire:

- Le plan épipolaire P_M associ à M est le plan de l'espace projectif défini par M et les deux centres de projection.
- Les deux droites épipolaires l_1 et l_2 associées aux deux projections de M sont les intersections de P_M avec les plans de projection.
- Les points e_1 et e_2 sont appelés épipoles ou points épipolaires.

2.5.1 Caractérisation de la géométrie épipolaire:

La géométrie épipolaire peut être entièrement définie par deux matrices :

- **La matrice Essentielle E :** dans le repère caméra (c, x, y) , si on connait les paramètres intrinsèques,
- **La matrice Fondamentale F :** dans le repère image (o, u, v), si on ne les connait pas.

Ces matrices permettent d'associer un point d'une image à une droite dans l'autre image.

2.5.2 Matrice Essentielle (E) **:**
La matrice Essentielle (E) donne la relation entre point et droite épipolaire

- A un point dans une image gauche une droite épipolaire dans l'image dorite.
- Cette relation n'est pas réversible (on ne peut pas obtenir un point dans l'image gauche à partir d'une droite dans l'image droite).

2.5.2 Matrice Essentielle (E) :
Relation entre point et droite épipolaire :

- Les coefficients de la droite l_2 s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r\ 22 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

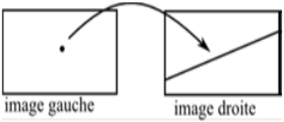


Figure : *Relation point-droite.*

- Cette relation est formalisée par la matrice Essentielle (E), qui a un point associe une droite dans le repère "caméra".

2.5.2 Matrice Essentielle (E) :

- Les coefficients de la droite l_2 s'écrivent en focntion de la matrice essenteielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

- La matrice E s'crite :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r\ 22 & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} = [t]_x R \tag{15}$$

- Cette propriété permet l'extraction de R et t à partir de E:

2.5.2 Matrice Essentielle (E) :

- L'équation de la droite épipolaire l_2 s'écrite :

$$\begin{pmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ y_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{16}$$

- Cette équation peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} E \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{17}$$

- Ce qui implique :

$$m_2^t.E.m_1 = 0 \tag{18}$$

2.5.2 Matrice Essentielle (E) :

- La contrainte épipolaire est donnée par:

$$\left(K_2^{-1} m_2\right).E\left(K_1^{-1} m_1\right) = 0 \tag{19}$$

2.5.3 Matrice Fondamentale (F) :

- La relation épipolaire peut aussi être exprimée en coordonnées-image
- On utilise alors la matrice Fondamentale (F), qui associe un point à sa droite épipolaire
$l_2 = Fm_1$ et $l_1 = F^t m_2$.
- Les matrice F et E sont liés par les paramètres intrinsèques (matrices K_1 et K_2) :

$$E = K_2^t.F.K_1 \tag{20}$$

et

$$F = K_2^{-t}.E.K_1^{-1} \tag{21}$$

- La matrice F peut être déterminé uniquement à partir de correspondances entre points-images, sans connaissance des caméras.

2.5.4 Propriétés de la matrice fondamentale:

- F est une matrice homogne de rang 2 définie par 7 degrés de liberté définie à un coefficient multiplicatif près
- Quand m_1 et m_2 sont les projections d'un même point M de l'espace sur P_1 et P_2 alors:

$$m_2^t.F.m_1 = 0 \tag{22}$$

- Les épipoles vérifient : $F.e_1 = 0$ et $F^t.e_2 = 0$
- Si les caméras sont alignées, les épipôles sont à l'infini

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.5.5 Propriétés de la matrice fondamentale:

- Si les caméras sont alignées, les épipôles sont à l'infini

$$m_2^t.F.m_1 = 0 \tag{23}$$

- Les épipoles vérifient :

  $F.e_1 = 0$ et $F^t.e_2 = 0$

2.5.6 Matrices de projection:

- En prenant la caméra gauche comme référence, on construit la forme canonique des matrices de projection :
$P_1 = K_1 \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}$ et $P_2 = K_2 \begin{pmatrix} R & t \end{pmatrix}$

$$P_1 = K_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

et

$$P_2 = K_2 \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \end{pmatrix} \tag{25}$$

2.5.6 Matrices de projection:

- Les matrices de projections peuvent être reconstruites connaissant paramètres intrinsèques et géométrie inter-cameras.
- Il est nécessaire de les calculer pour faire de la reconstruction 3D.

2.5.7 Cas particulier: Configuration alignée:

- Si les 3 angles de rotations sont nuls, et $t_y = t_z = 0$, alors la matrice Essentielle se réduit à :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -t_x \\ 0 & t_x & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

- Ces quantits tant homognes, il est d'usage d'crire alors:

$$F = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

2.5.7 Cas particulier: Configuration alignée:

- La matrice de projection droite s'écrite alors:

$$P_2 = K_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

2.6 Reconstruction 3D

- La reconstruction consiste à déterminer les positions dans l'espace des primitives de la scène à partir des images de cette dernière.
- Nous allons nous intéresser ici aux reconstructions à partir de deux images.
- Soit M un point de la scène se projetant en m_1 et m_2 .
- Reconstruire M consiste à déterminer sa position dans l'espace, soit à déterminer l'intersection des lignes de vues en m_1 et m_2 .
- Soient P_1 et P_2 les deux matrices de projections des images 1 et 2. Alors : $m_1 = P_1 M$ et $m_2 = P_2 M$.
- Connaissant P_1 et P_2 la résolution des deux équations précédentes donne la position de M.
- Si P_1 et P_2 ne sont pas connus, le point M ne constitue pas la seule solution, en effet, soit H une homographie de P^3 alors : $m_1 = P_1 H^{-1} HM$ et $m_2 = P_2 H^{-1} HM$.

2.6.1 Les diffrents types de reconstruction:

- Soient P_1 et P_2 les matrices de projection des images 1 et 2, et $P_1^{\sim}$ et $P_2^{\sim}$ les matrices estimées.
- Soit H la transformation telle que:

$$P_1 = P_1^{\sim} H \tag{29}$$

$$P_2 = P_2^{\sim} H \tag{30}$$

A. Reconstructions Euclidiennes

- Considérons tout d'abord une scène dans laquelle des points de référence sont connus.
- Si les positions d'au moins six points de référence sont connues, il est alors possible de déterminer pour chaque image les matrices :

$$P_1^{\sim} = K_1 \begin{pmatrix} R_1 & t_1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$P_2^{\sim} = K_2 \begin{pmatrix} R_2 & t_2 \end{pmatrix} \tag{32}$$

A. Reconstructions Euclidiennes

- Si K_1 et K_2 les paramètres intrinsèques des caméras sont connus alors
- On obtient alors les deux matrices de projection estimées suivantes :

$$P_1^{\sim} = K_1 \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

$$P_2^{\sim} = K_2 \begin{pmatrix} R & \lambda t \end{pmatrix} \tag{34}$$

- Ces deux matrices permettent donc d'effectuer une reconstruction de la scène à un facteur prés.
- En effet, les points solutions des équations de projections sont de la forme : $P = \begin{pmatrix} x & y & z & 1/\lambda \end{pmatrix}$

Où : λ est un réel strictement positif.

B. Reconstructions affines

- Si les paramètres intrinsèques des caméras ne sont pas connus, par contre l'homographie H_∞ du plan l'infini entre les deux points vue est connue.
- Soient $P_1 = K_1 \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}$ et $P_2 = K_2 \begin{pmatrix} R & t \end{pmatrix}$ les matrices de projection des images 1 et 2.
- L'homographie du plan à l'infini caractérise la transformation dans l'espace projectif, des directions de l'espace :

$$H_\infty = K_2 R K_1^{-1} \tag{35}$$

- Lorsque H_∞ est connue, on peut alors définir les deux matrices de projections

$$P_1^{\sim} = K_1 \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$P_2^{\sim} = \begin{pmatrix} H_\infty & e_2 \end{pmatrix} \tag{37}$$

effectuer une reconstruction à partir de ces matrices

- La transformation H est donc ici une affinité : est connue, on peut alors définir les deux matrices de projections

$$H = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

C. Reconstructions projectives

- Le cas le plus général, aucune information a priori sur la scène n'est connue. La forme générale des matrices de projections est :

  $P_1^{\sim} = K_1 \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix}$ et $P_2^{\sim} = \begin{pmatrix} H_i & ce_2 \end{pmatrix}$
  Où est l'homographie d'un plan de la scène ne contenant pas les centres de projection, et c un scalaire.

- Le passage d'une reconstruction projective à une reconstruction affine puis Euclidienne se fait à l'aide des relations :

$$P_1^{\sim} = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ a^t & c \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$P_2^{\sim} = \begin{pmatrix} H_i & ce_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_2RK_2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ a^t & c \end{pmatrix} \quad (40)$$

- Soit :

$$P_1^{\sim} = P_1 \begin{pmatrix} K_1^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ a^t & c \end{pmatrix} \tag{41}$$

$$P_2^{\sim} = P_2 \begin{pmatrix} K_1^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ a^t & c \end{pmatrix} \tag{42}$$

- la transformation H s'écrit :

$$H = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ -1/c(K_1^t a)^t & 1/c \end{pmatrix} \tag{43}$$