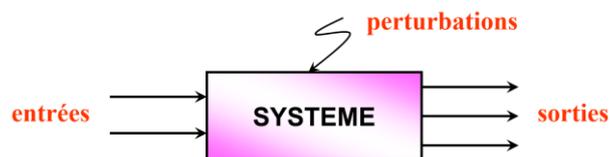


Chapitre 1 : Généralités sur la la modélisation et l'identification

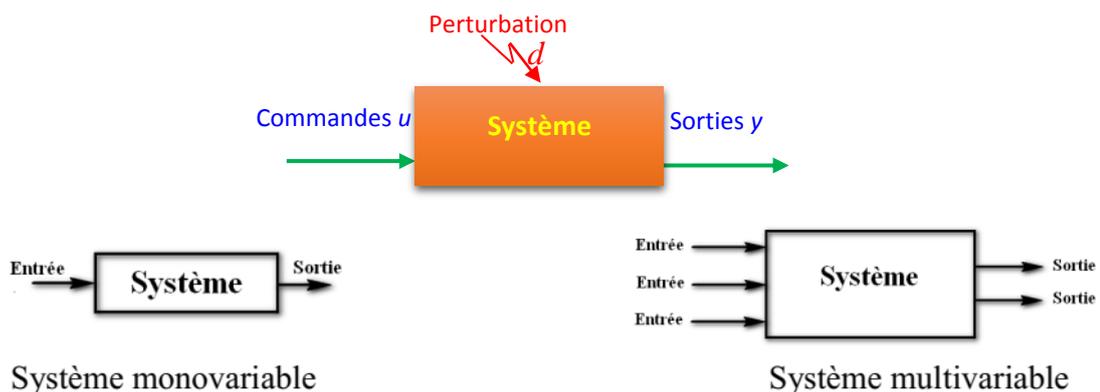
1- Terminologie et définition

1.1. Système

Est un assemblage de composants ou éléments interconnectés afin d'accomplir une fonction ou une tâche donnée. Il possède un ou plusieurs signaux d'entrée exogènes (extérieures au système) et un ou plusieurs signaux de sortie.

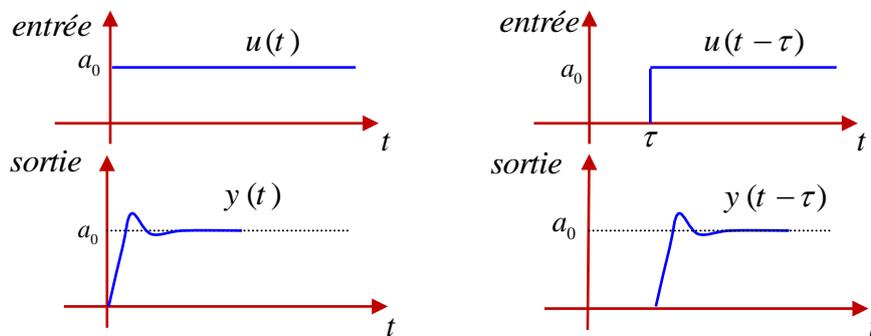


- ✚ **Système monovariante** : Un système monovariante possède une seule entrée $u(t)$ et une seule sortie $y(t)$
- ✚ **Système multivariante** : Un système possédant plusieurs entrées et/ou des sorties est dit multivariante
- Les entrées affectant un système sont généralement notées par la lettre u et les sorties par la lettre y .



- ✚ **Système Continu** : Un système est dit continu si les variations des grandeurs physiques le caractérisant (les entrées, les sorties, les perturbations...) sont des fonctions continues du type $f(t)$ avec t une variable continue (en générale le temps).

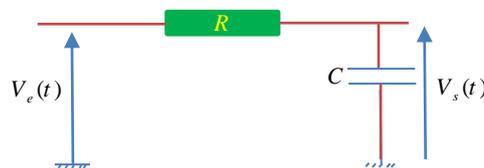
- ✚ **Système échantillonné :** Inversement, si en un endroit au moins de la chaîne des éléments le constituant, le signal n'est transmis qu'à des instants discrets privilégiés, le système sera dit échantillonné.
- ✚ **Système causal :** Un système est causal si la sortie $y(t)$ à un instant t_0 ne dépend que des valeurs de son entrée $u(t)$ pour $t \leq t_0$.
- Pour un **système causal**, la cause précède toujours l'effet, la réponse impulsionnelle ne commence pas avant l'impulsion.
- ✚ **Système invariant :** Un système est dit invariant si sa sortie est identique à tout instant, c-à-d une translation du signal d'entrée se traduit par la même translation du signal de sortie (un retard τ ne change pas la sortie du système).



Exemple 1.1: Il existe plusieurs systèmes électriques invariant dans le temps qui relient une tension de sortie $V_s(t)$ à une tension d'entrée $V_e(t)$.



Par exemple un circuit RC est un système invariant si l'on suppose que les composants sont stables au cours du temps.



✚ **Système statique (instantané) :**

Si la sortie $y(t)$ à un instant donné ne dépend que de l'entrée $u(t)$ à cet instant ($y(t) = ku(t)$) alors le système est dit instantané ou statique, c-à-d la réponse à une excitation est instantanée.

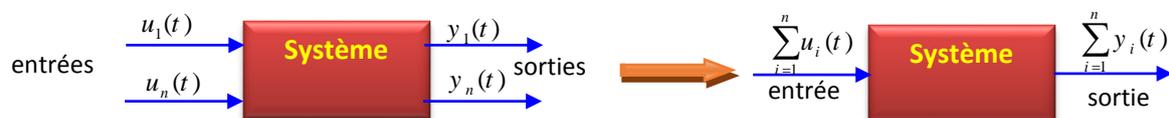
✚ **Systeme linéaire :**

- Un système linéaire est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants.
- Un système est linéaire s'il obéit au principe de superposition défini par les propriétés de proportionnalité et d'additivité.

✚ **La proportionnalité :** La réponse à une amplification du signal d'entrée par un facteur k constant, engendre une amplification de la sortie par un même facteur k . En d'autres termes si $y(t)$ correspond à $u(t)$ alors la réponse à $ku(t)$ est $ky(t)$. On dit qu'il y a proportionnalité de l'effet à la cause.



✚ **L'additivité :** Si les entrées $u_1(t), \dots, u_n(t)$ entraînent respectivement les réponses $y_1(t), \dots, y_n(t)$ alors l'entrée $u_1(t) + \dots + u_n(t)$ entraîne la réponse $y_1(t) + \dots + y_n(t)$. (la sortie correspondante à la somme de plusieurs entrées est égale à la somme correspondant à chacune des entrées).



- Les deux propriétés précédentes peuvent être étendue à des termes intégraux ou dérivés, donc aux systèmes dynamiques.

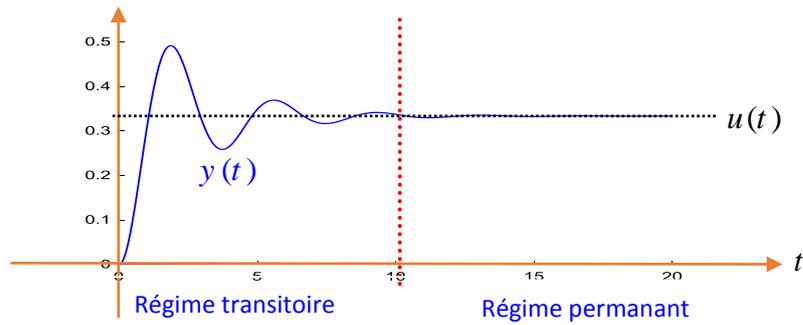
1.2. Régime transitoire – Régime permanent : On distingue deux régimes dans l'évolution de la sortie des systèmes :

✚ **Le régime transitoire (Régime libre) :**

Il représente l'évolution de la sortie $y(t)$ dans les premiers instants de la réponse et qui disparaît progressivement, il caractérise le comportement dynamique du système.

✚ **Le régime permanent (Régime forcé) :**

Il correspond à la partie qui subsiste quand le régime transitoire est devenu négligeable, il traduit son comportement statique.



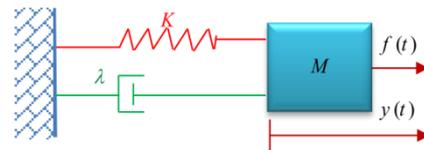
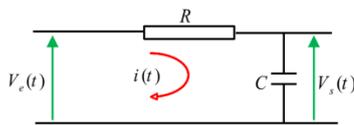
1.3. Modélisation ? :

- Ensemble des procédures permettant d'obtenir un modèle
- Modéliser un système = capable de prédire le comportement du système

Exemple 1.2 :

Modélisation d'un circuit RC

Modélisation d'un système masse-ressort-convertisseur



$$V_e(t) = Ri(t) + V_s(t)$$

$$V_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \text{ or } i(t) = C \frac{dV_s(t)}{dt}$$

$$RC \frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t) = V_e(t)$$

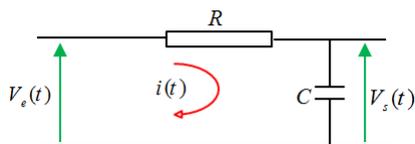
$$\sum_{i=1}^n F_i = M\ddot{y}$$

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \lambda \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t)$$

1.3.1. Modèle :

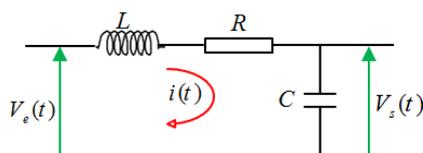
- Structure mathématique pouvant représenter le système étudié. Cette structure doit comporter des éléments d'ajustement.
- Description mathématique d'un processus réel.

Exemple 1.2 :

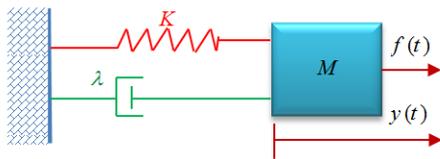


$$G(p) = \frac{K}{1+Tp}$$

$$RC \frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t) = V_e(t)$$



$$LC \frac{d^2 V_s(t)}{dt^2} + RC \frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t) = V_e(t)$$



$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \lambda \frac{dy(t)}{dt} + K y(t) = f(t)$$

1.3.2. Type de modèle :

✚ **Modèle de connaissance :**

- Ce modèle est obtenu en écrivant toutes les équations différentielles qui régissent le fonctionnement du système (en se basant sur les lois de la physique de la chimie... (Newton, Kirchoff...)).
- Les paramètres d'un tel modèle ont une interprétation physique (température, vitesse, frottement, longueur, résistance électrique, ect

Exemple 1.3:

- Modèle du circuit RC $\left(RC \frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t) = V_e(t) \right)$
- Modèle d'un système masse-ressort-convertisseur $\left(M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \lambda \frac{dy(t)}{dt} + K y(t) = f(t) \right)$

✚ **Modèle de représentation**

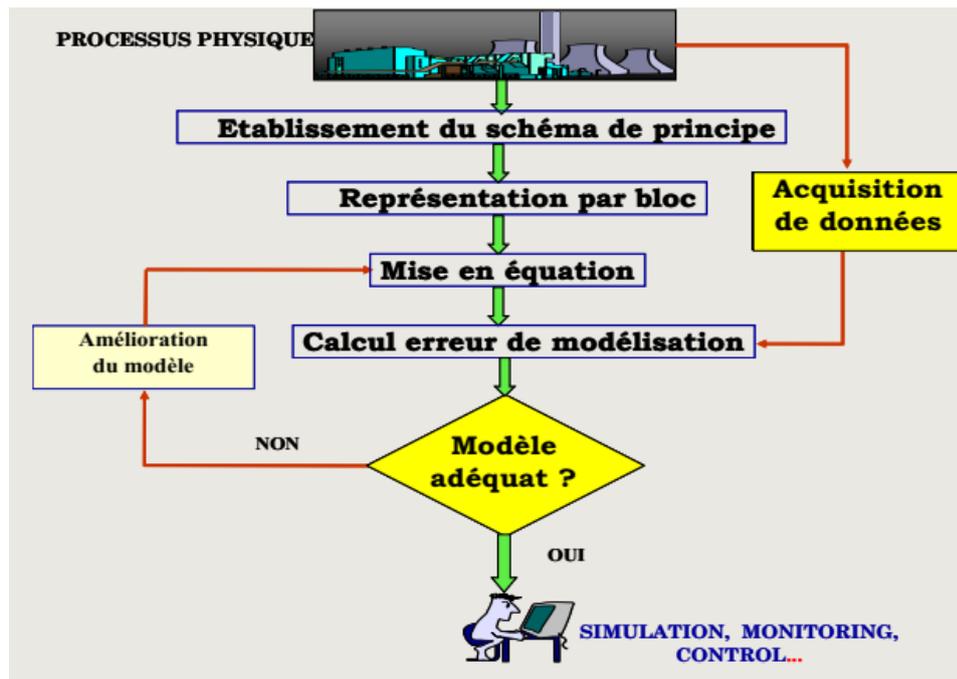
- Modèle déterminé à partir de données expérimentales (données entrée-sortie).
- Modèle dont la structure et les paramètres sont sans rapport avec le système réel.
- Les paramètres de ce modèle n'ont pas d'interprétation physique.
- La structure du modèle est fixée à priori, on parle de 'boite noire'

Exemple 1.4:

- Modèle d'un système du 1^{er} ordre $\frac{K}{1+Tp}$
- Modèle d'un système du 2^{ème} ordre $\frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2}$

1.3.3 Etapes de la modélisation

Les différentes étapes de modélisation sont représentés sur l'organigramme suivant :



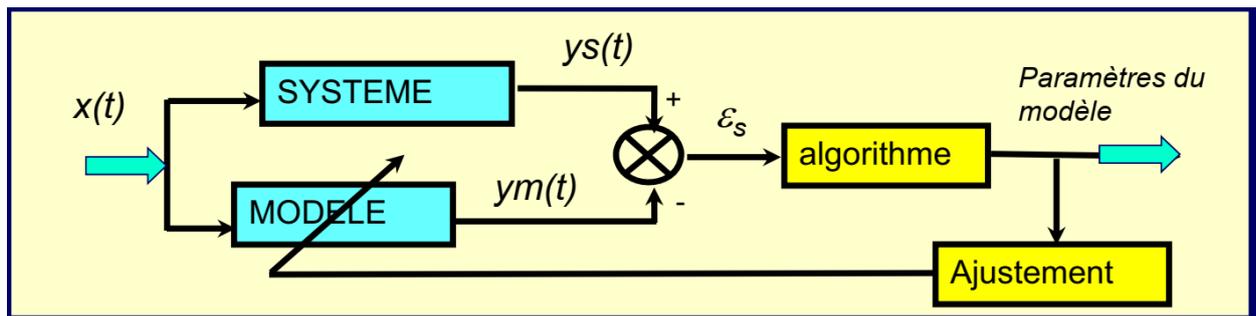
1.4. Définition de l'identification :

- L'identification d'un système c'est la détermination de son modèle mathématique sur la base des observations expérimentales entrées/sorties.
- Le traitement mathématique des réponses graphiques du système est appelé **identification**. Le modèle obtenu est dit de représentation.
- L'identification a pour but de déterminer un modèle mathématique du système étudié à partir d'un ensemble de mesure E/S du système.

1.5 : Classification des méthodes d'identification

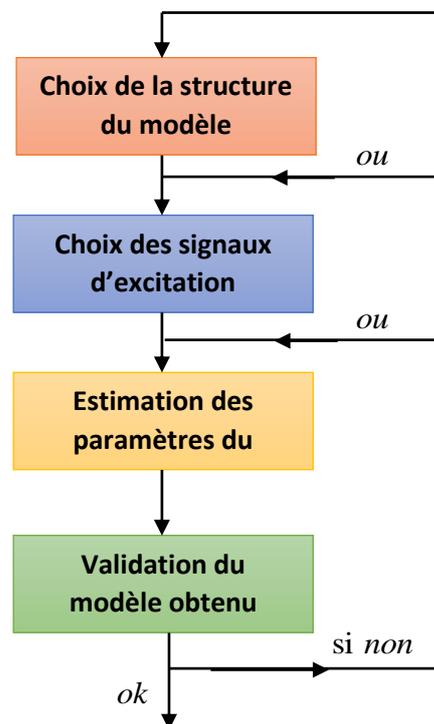
1.3.1. Méthode de base (réponse graphique) Sur la base d'une connaissance à priori du système à identifier, on fixe une structure du modèle comportant des coefficients inconnus « boîte noire » elles sont basées sur les réponses graphiques telles que :

- la réponse indicielle
- la réponse impulsionnelle
- la réponse à une rampe
- le diagramme de Bode et de Nyquist
- la méthode de Strejc
- la méthode de Broûda

1.3.2. Méthode du modèle :

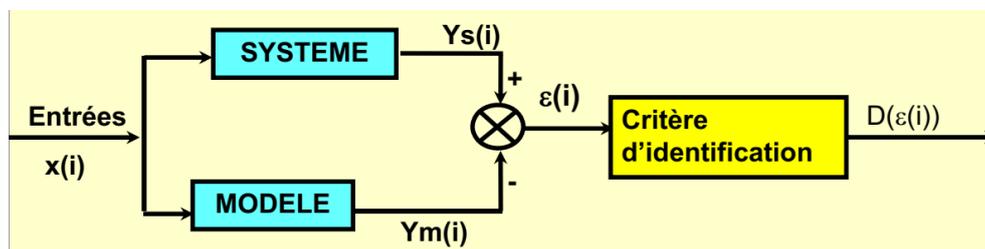
Ajuster manuellement ou automatiquement la structure ou les paramètres du modèle jusqu'à ce que $\varepsilon_s \rightarrow \min$

1.3.3. Méthode statistique : Basées sur les MC (moindres-carrés) : Elle consiste à la détermination des coefficients inconnus du modèle de façon que la différence entre les N sorties réelles du système et celles du modèle soit minimale selon un critère donné qu'on résout par un algorithme d'identification.

1.4. Algorithme général d'identification

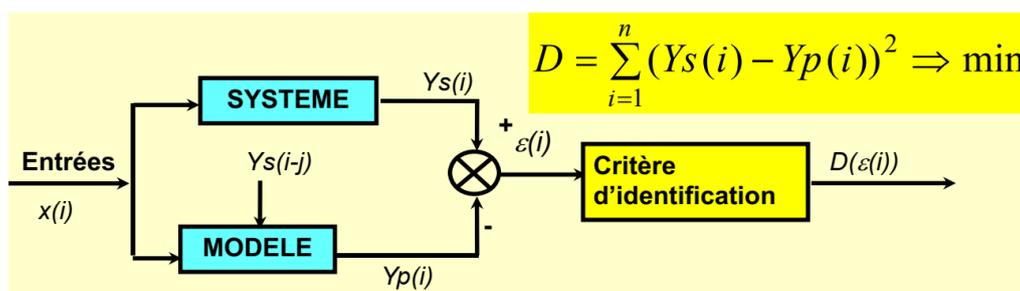
1.5. Critères d'identification

1.5.1. Distance d'état : Basée sur la différence entre la sortie du système et du modèle



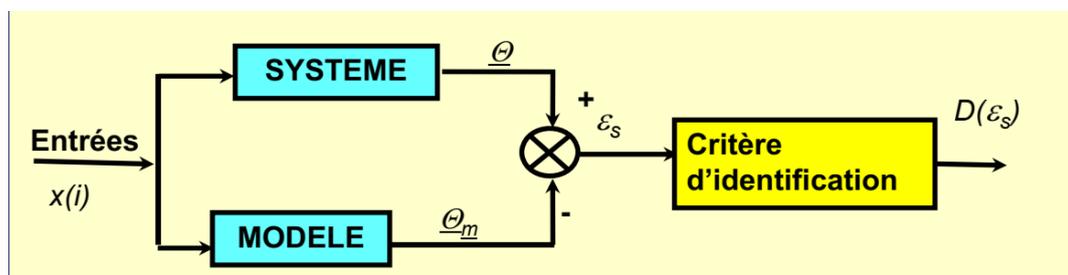
Critère d'identification à minimiser: $D = \sum_{i=1}^n (Y_s(i) - Y_m(i))^2$

1.5.2. Distance de prédiction : Basée sur la différence entre la sortie du système et celle que prédit le modèle au même instant

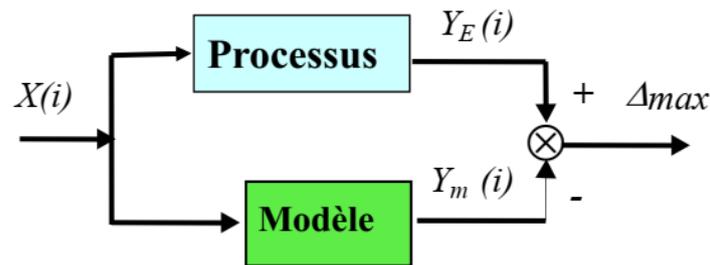


Critère d'identification à minimiser : $D = \sum_{i=1}^n (Y_s(i) - Y_p(i))^2$

1.5.3. Distance de structure : Basée sur la différence entre les paramètres du système et ceux du modèle.



1.6. Validation du modèle



$$\Delta_{\max}(i) = \left| \frac{Y_m \max - Y_E \max}{Y_E \max} \right| \cdot 100\% \leq \varepsilon_{\text{admissible}}$$

Il faut que l'erreur soit minimale dans les systèmes industriels

1.7. Expérimentation (Choix du signal d'excitation :)

Pour bien identifier, il faut bien exciter dans tout le spectre de fréquences susceptible de contenir des constantes de temps du système.

- Le signal $\sin(\omega t)$: parfait d'un point de vue spectre (balayage en fréquence) mais peu de systèmes acceptent ce genre d'entrées.
- Le signal $\delta(t)$: parfait du point de vue théorique, mais difficile de réaliser une bonne approximation de l'impulsion.
- Le signal $u(t)$: moins bon d'un point de vue spectral ($u(f) = 1/2\delta(f) + j21\pi f$), mais facile à implanter.
- Le signal $b(t)$: bruit blanc idéal d'un point de vue spectral mais comment le réaliser ?

Pour bien identifier il faut appliquer une entrée « riche » en fréquences

Solution standard: Séquence Binaire Pseudo-Aléatoires (SBPA)

- Succession d'impulsions rectangulaires modulées en largeur
- très riches en fréquences – spectre uniforme de presque 0 à $0.5f_e$
- Génération: à l'aide de registres à décalage bouclés
- Physiquement réalisable
- Amplitude limitée : ne pas trop perturber le processus, resté en linéaire

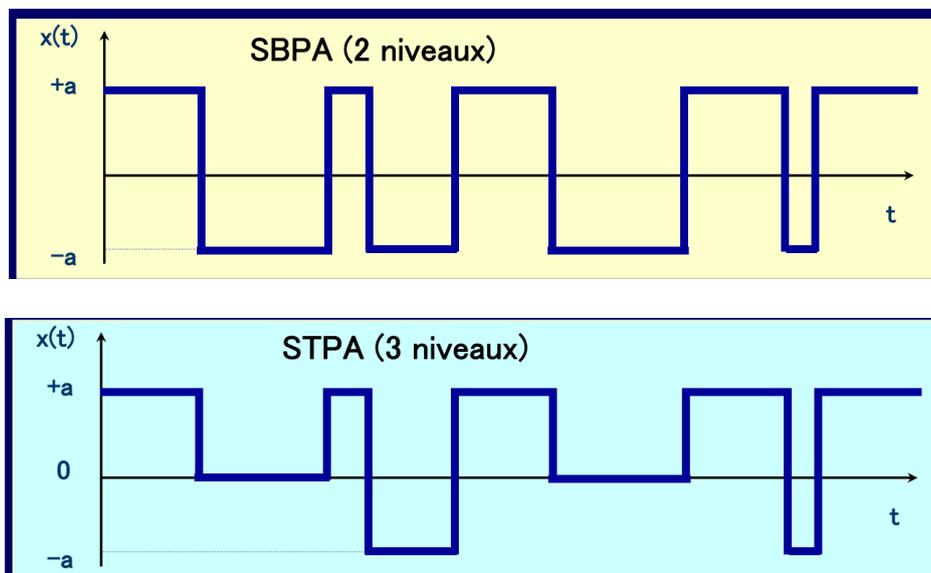
Exemple : Génération d'une SBPA de longueur $31=2^5-1$



Variation aléatoire de la largeur des impulsions à l'intérieur d'une longueur de séquence

Éléments caractéristiques:

- nombres de cellules (N)
- durée maximale d'une impulsion ($t_{im}=Nt_e$)
- longueur de la séquence ($L=2N-1$)



Chapitre 2 : Modélisation des systèmes dynamique

1. Représentation des systèmes dynamiques :

1.1. Représentation par équation différentielle

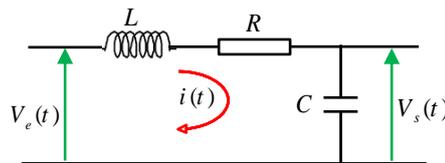
On représente classiquement l'évolution d'un système dynamique (linéaire et continu monovarié) par une équation différentielle à coefficients constants (d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$) comme suit :

$$a_0 y(t) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = b_0 u(t) + \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j} \quad (2.1)$$

Avec a_i et b_i constantes réelles

On choisit $m \leq n$ pour que le système soit causal; n est l'ordre du système;

Exemple 2.1: (Circuit RLC) On veut déterminer la relation liant la tension d'alimentation $V_e(t)$ et la tension de sortie $V_s(t)$. Pour des conditions initiales nulles, les équations électriques nous donnent:



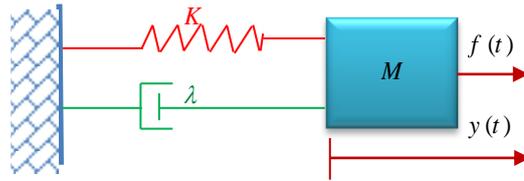
$$V_e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + V_s(t) \quad (2.5)$$

$$V_s(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad \text{or} \quad i(t) = C \frac{dV_s(t)}{dt} \quad (2.6)$$

On obtient alors une équation différentielle reliant l'entrée à la sortie

$$LC \frac{d^2 V_s(t)}{dt^2} + RC \frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t) = V_e(t) \quad (2.7)$$

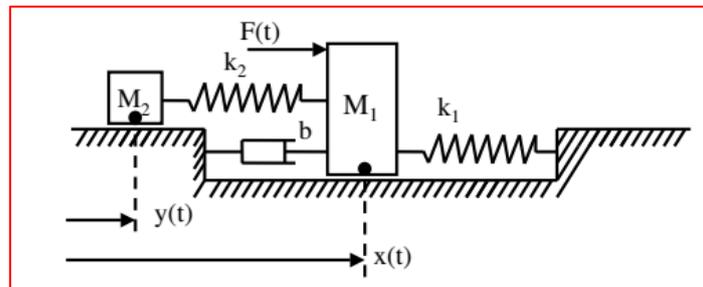
Exemple 2.2 : (Système masse-ressort-amortisseur) : Il s'agit de modéliser un mouvement d'une roue par rapport au châssis par l'intermédiaire d'un amortisseur et un ressort. Ce système peut être représenté par une masse reliée en série à un ressort et un amortisseur monté en parallèle.



On note $f(t)$ la force exercée sur la masse M et $y(t)$ la position de la masse par rapport à l'équilibre. En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur la masse M soumise à l'action du ressort ($-Ky(t)$), de l'amortisseur ($-\lambda \frac{dy(t)}{dt}$) et à la force $f(t)$, on obtient l'équation suivante:

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \lambda \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t) \quad (2.8)$$

Exemple 2.3 : À titre d'exemple, on considère le système de deux masses M_1 et M_2 , évoluant sur un plan horizontal, sans frottement.



La force d'excitation F agit sur le premier solide. La masse M_1 est liée au repère par un ressort de raideur k_1 et un amortisseur fluide b ; et au deuxième solide par un ressort de raideur k_2 , L'objectif est de déterminer le mouvement de la masse M_2 en fonction de la force appliquée F .

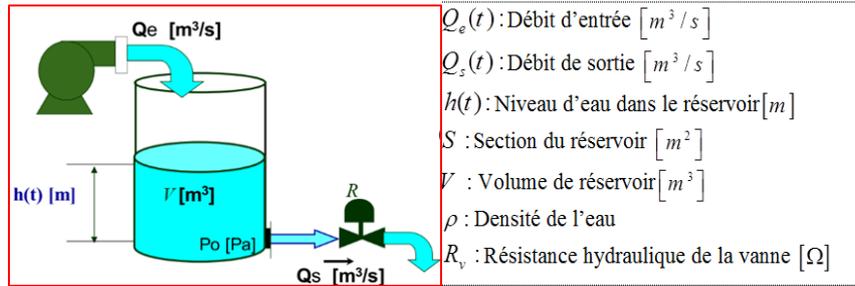
Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à chaque masse permet d'écrire :

$$M_1 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F(t) - K_1 x(t) - K_2 (x(t) - y(t)) - b \frac{dx(t)}{dt} \quad (2.9)$$

$$M_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = K_2 (y(t) - x(t)) \quad (2.10)$$

Exemple 2.4 : (Réservoir hydraulique ou pneumatique)

Considérons un réservoir cylindrique de section S dont on cherche à contrôler la hauteur de liquide, notée $h_1(t)$. Ce réservoir est alimenté par un débit volumique $Q_e(t)$ contrôlé par une électrovanne (voir la figure ci-dessous)

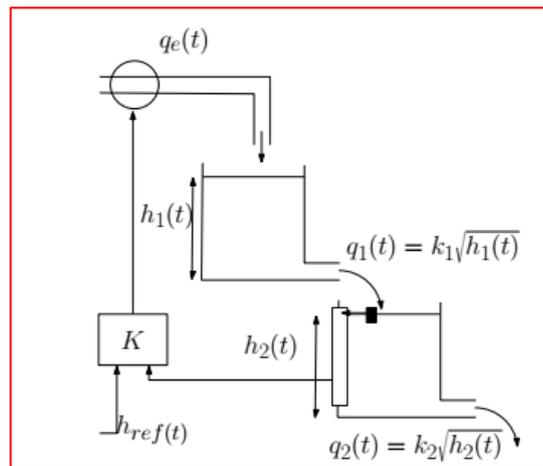


Dans un premier temps, un bilan matière permet d'écrire le modèle du système :

$$Q_e(t) - Q_s(t) = \frac{dV}{dt} = S \frac{dh(t)}{dt} \text{ avec } Q_s(t) = \frac{\rho g}{R_v} h(t)$$

pour CI=0 $S \frac{dh(t)}{dt} + \frac{\rho g}{R_v} h(t) = Q_e(t)$

Exemple 2.5 (régulation de niveau de deux réservoirs): On considère l'exemple d'une régulation de niveau de deux réservoirs en cascade, représenté dans la figure ci-dessous.



L'objectif est de réguler la hauteur dans le deuxième réservoir $h_2(t)$ autour d'une valeur de référence $h_{ref}(t)$, en adaptant le débit d'alimentation $q_e(t)$ proportionnellement à l'écart entre $h_2(t)$ et $h_{ref}(t)$. Les équations des deux réservoirs et du régulateur sont :

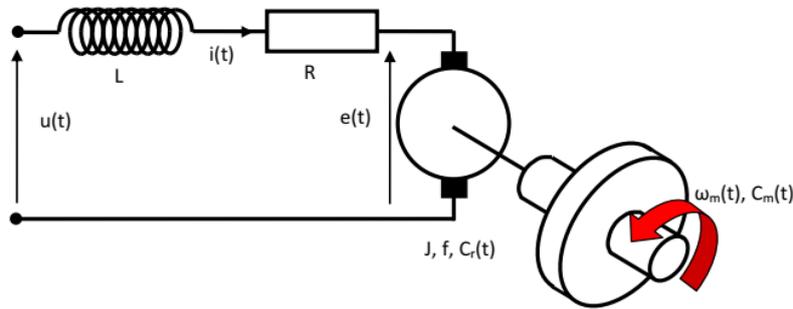
$$\begin{aligned}
 S_1 \dot{h}_1(t) &= q_e(t) - k_1 \sqrt{h_1(t)} \\
 S_2 \dot{h}_2(t) &= k_1 \sqrt{h_1(t)} - k_2 \sqrt{h_2(t)} \\
 q_e(t) &= K(h_{ref}(t) - h_2(t))
 \end{aligned}$$

Avec S_1, S_2 : section du réservoir 1 et 2 respectivement

k_1, k_2 constantes et K : gain du régulateur

Exemple 2.6 (Moteur à courant continu):

Un moteur à courant continu peut être décrit par la figure suivante,



Avec

$u(t)$ = Tension du moteur	[V]
$e(t)$ = Force contre électromotrice du moteur	[V]
$i(t)$ = Intensité dans le moteur	[A]
$C_m(t)$ = Couple exercé par le moteur	[N.m]
$C_r(t)$ = Couple résistant sur l'axe moteur	[N.m]
$\omega_m(t)$ = Vitesse angulaire du moteur	[rad/s]

R = Valeur de la résistance	[Ω]
L = Valeur de l'inductance	[H]
K_e = Coefficient de la force contre électromotrice	[V/(rad/s)]
J = Inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur	[kg.m ²]
f = 0,01 = Paramètre de « frottement fluide » total	[N.m.s]
K_t = Constante de couple	[N.m/A]

Ce système peut être modélisé comme suit :

$$C_f = f \cdot \omega_m(t)$$

- L'équation électrique : $u(t) = e(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$
- Équation mécanique (dynamique de l'arbre) $J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_r(t) - f \omega_m(t)$
avec $C_f = f \cdot \omega_m(t)$ est le couple de frottement en sortie du moteur
- Équation de l'électromagnétisme $e(t) = -K_e(t)\omega_m(t)$, $C_m(t) = K_t i(t)$

1.2. Représentation par fonction de transfert

Soit un système dynamique à temps continu de signal d'entrée $u(t)$ et de signal de sortie $y(t)$, tous deux liés par une équation différentielle ordinaire linéaire

$$a_0 y(t) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = b_0 u(t) + \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}$$

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Si nous appliquons la transformation de Laplace (le théorème de la dérivation) aux deux membres de cette équation, où on transforme séparément chaque terme et on effectue l'addition à la fin tout en supposant nulles les différentes conditions initiales avec $U(p) = \mathcal{L}[u(t)]$ et $Y(p) = \mathcal{L}[y(t)]$, il vient :

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) Y(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) U(p)$$

D'où

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Cette fraction rationnelle de deux polynômes de la variable complexe p est appelée fonction de

transfert du système et communément notée : $G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$

Comme cette fonction est une fraction rationnelle de deux polynômes en p , il est possible de factoriser ces deux polynômes dans le corps des complexes. On obtient

$$G(p) = \frac{b_m (p - z_m)(p - z_{m-1}) \dots (p - z_1)}{a_n (p - p_n)(p - p_{n-1}) \dots (p - p_1)} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec

- Les zéros z_m du système sont les valeurs de p qui annulent le numérateur $N(p)$
- Les pôles p_n du système sont les valeurs de p qui annulent de dénominateur $D(p)$.
- On peut alors représenter le système sous la forme graphique ci-dessous :



Rappel sur la transformée de Laplace : la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$, causale (nulle pour $t < 0$), est donnée par la relation suivante

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt ,$$

- $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$ ($F(p)$ existe si l'intégral existe)
- où la variable p est une variable complexe (variable de Laplace)

Exemple : Soit l'équation différentielle suivante :

$$2\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 7u(t)$$

Trouver la TL de cette équation ?

On suppose que les CI sont nulles, nous avons : $L\left[\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right] = p^n Y(p)$

$$L\left(2\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + y(t)\right) = L[7u(t)]$$

$$y(t) \xrightarrow{L} Y(p) \quad u(t) \xrightarrow{L} U(p)$$

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} \xrightarrow{L} p^n Y(p)$$

$$2p^3 Y(p) + 3p^2 Y(p) + 5p Y(p) + Y(p) = 7U(p)$$

$$\Rightarrow (2p^3 + 3p^2 + 5p + 1)Y(p) = 7U(p)$$

- Est une équation algébrique reliant y à u :

$$Y(p) = \frac{7}{2p^3 + 3p^2 + 5p + 1} U(p)$$

Transformée de Laplace inverse :

$$\text{Soit } H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0)}{(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0)}$$

Pour calculer TL^{-1} , on suit la procédure suivante :

- Décomposition en éléments simples
- Calcule des résidus
- Calcule de TL^{-1}

a) Cas des racines simples :

Exemple 2.7: Soit la fonction de transfert suivante

$$F(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)}$$

Trouver la transformée inverse de la fonction suivante :

$$F(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)} = \frac{C_1}{(p+1)} + \frac{C_2}{(p+2)},$$

$$C_1 = (p+1) \frac{2}{(p+1)(p+2)} \Big|_{p=-1} = 2 \quad \text{et} \quad C_2 = (p+2) \frac{2}{(p+1)(p+2)} \Big|_{p=-2} = -2$$

$$F(p) = \frac{2}{(p+1)} - \frac{2}{(p+2)}$$

En prenant la transformée inverse de chacun des termes, on obtient : $f(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})$

b) Cas des racines multiples :

Exemple 2.8: Soit la fonction de transfert suivante

Trouver la transformée inverse de la fonction suivante :

$$F(p) = \frac{p+1}{p(p+2)^2} = \frac{C_2}{(p+2)^2} + \frac{C_1}{(p+2)} + \frac{D_0}{p}$$

$$C_2 = \frac{1}{0!} \left((p+2)^2 F(p) \right) \Big|_{p=-2} = \frac{1}{2}, \quad C_1 = \frac{1}{1!} \frac{d}{dp} \left((p+2)^2 F(p) \right) \Big|_{p=-2} = \left(\frac{p-p-1}{p^2} \right) \Big|_{p=-2} = -\frac{1}{4}$$

$$D_0 = (pF(p)) \Big|_{p=0} = \frac{1}{4},$$

$$F(p) = \frac{p+1}{p(p+2)^2} = \frac{1/2}{(p+2)^2} - \frac{1/4}{(p+2)} + \frac{1/4}{p}$$

En utilisant la transformée inverse de chacun des termes, on obtient :

$$f(t) = \frac{1}{2}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4}$$

Exemple 2.9 : Fonction de transfert du circuit RLC

Nous avons rencontré que l'équation différentielle exprimant la relation entre la tension de sortie $V_s(t)$ d'un circuit RLC et la tension d'entrée $V_e(t)$ soit

$$LC \frac{d^2V_s(t)}{dt^2} + RC \frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t) = V_e(t)$$

Appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation en supposant les conditions initiales toutes nulles et en posant $V_e(p) = \mathcal{L}[V_e(t)]$ et $V_s(p) = \mathcal{L}[V_s(t)]$

$$LCp^2V_s(p) + RCpV_s(p) + V_s(p) = V_e(p)$$

Soit
$$(LCp^2 + RCp + 1)V_s(p) = V_e(p)$$

La fonction de transfert du circuit RLC est donc
$$G(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

Exemple 2.10 : Fonction de transfert du système masse-ressort

On a
$$M \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \lambda \frac{dy(t)}{dt} + \beta y(t) = f(t)$$

Si les conditions initiales sont nulles, la transformée de Laplace des deux membres donne :

$$Mp^2Y(p) + \lambda pY(p) + \beta Y(p) = F(p)$$

Alors la fonction de transfert est donnée par :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + \beta} = \frac{1/\beta}{\frac{M}{\beta}p^2 + \frac{\lambda}{\beta}p + 1} = \frac{K}{\omega_n^2 p^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1}$$

Dans cet exemple $\omega_n = \sqrt{\beta/M}$, $\xi = \frac{\lambda}{2M\sqrt{\beta}}$ et $K = 1/\beta$.

Exemple 2.11 : Fonction de transfert du réservoir hydraulique ou pneumatique

On a
$$S \frac{dh(t)}{dt} + \frac{\rho g}{R_v} h(t) = Q_e(t)$$

En appliquant la transformation de Laplace (en supposant CI=0), on obtient :

$$SpH(p) + \frac{\rho g}{R_v} H(p) = Q_e(p) \Rightarrow \left(1 + \frac{SR_v p}{\rho g}\right) H(p) = \frac{R_v}{\rho g} Q_e(p)$$

On obtient alors la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{H(p)}{Q_e(p)} = \frac{\frac{R_v}{\rho g}}{1 + \frac{SR_v p}{\rho g}} = \frac{K}{1 + \tau p} \text{ avec } \tau = \frac{SR_v}{\rho g} \text{ et } K = \frac{R_v}{\rho g}.$$

1.3. Représentation par modèle d'état (Forme canonique)

Un modèle d'état est un ensemble fini d'équations différentielles du 1er ordre reliant les variables, grandeurs qui constituent l'état du système (variable d'état) et les variables externes comprenant les signaux d'entrée et de sortie

Représenter un système par un modèle d'état consiste à transformer une équation différentielle d'ordre (n) à (n) équations différentielles d'ordre (1).

La forme générale d'un tel modèle d'état est la suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) & \text{(équation d'état)} \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & \text{(équation de sortie ou de mesure)} \end{cases}$$

$A \in R^{n \times n}$ est la matrice d'état ou d'évolution,

$B \in R^{n \times 1}$ est la matrice d'entrée,

$C \in R^{1 \times n}$ est la matrice de sortie ou d'observation ou encore de mesure

et D représente la matrice de transfert direct.

$x(t)$: vecteur d'état,

$u(t)$: vecteur de commande

$y(t)$ vecteur de sortie ou de mesure

Exemple 2.12 : représentation d'état du circuit RLC

On a $LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$ (1)

on choisit deux variables d'états (n = 2):

$x_1(t) = y(t)$ et $x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$. Alors, l'équation (1) conduit à :

$$\begin{cases} x_1 = y(t) \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y}(t) \\ x_2 = \dot{y}(t) \Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{y}(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ LC\dot{x}_2 + RCx_2 + x_1 = u(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{LC}u(t) \end{cases}$$

On déduit alors la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t) \end{cases} \quad \text{Avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0] \text{ et } D = 0$$

Exemple 2.13 : représentation d'état du système masse-ressort

On a $M \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \lambda \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t)$ L'ordre $n=2$

- L'entrée du système est la force $f(t)$, sa sortie le déplacement linéaire $y(t)$.
- Il s'agit de transformer cette équation d'ordre 2 à 2 équations différentielle d'ordre 1.

On définit les variables d'état comme suit :

$$\begin{cases} x_1 = y(t) \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y}(t) \\ x_2 = \dot{y}(t) \Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{y}(t) = -\frac{\lambda}{M} \dot{y}(t) - \frac{K}{M} y(t) + \frac{1}{M} u(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{M} x_1 - \frac{\lambda}{M} x_2 + \frac{1}{M} u(t) \end{cases}$$

On va transformer l'équation diff d'ordre 2 à 2 équations diff d'ordre 1 comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{M} x_1 - \frac{\lambda}{M} x_2 + \frac{1}{M} u(t) \end{cases}$$

Dans cet exemple : $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} x_2 \\ -\frac{K}{M} x_1 - \frac{\lambda}{M} x_2 + \frac{1}{M} u(t) \end{cases}$

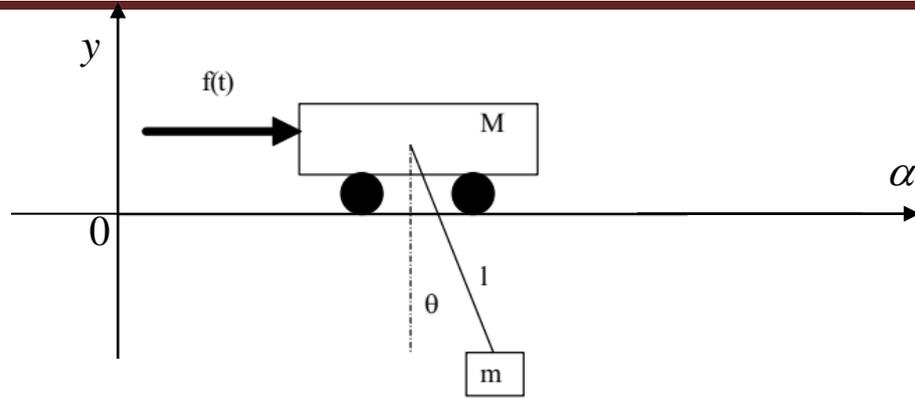
On déduit alors la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{\lambda}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t) \end{cases}$$

Alors, le modèle d'état du système mécanique est :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad \text{avec } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{\lambda}{M} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0] \text{ et } D = 0$$

Exercice 1 : Un système représentant un pont roulant constitué d'un chariot de masse M , d'une charge de masse m , d'un bras de levier de longueur l est schématisé par la figure 3 :



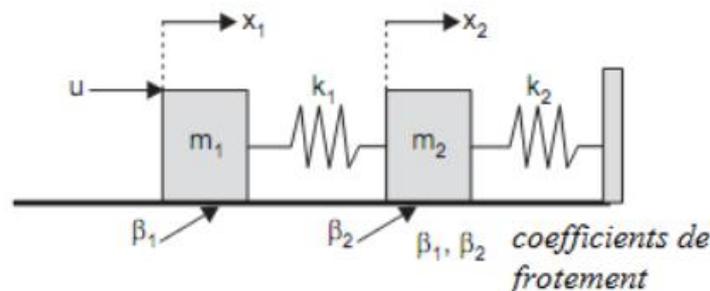
- A un instant quelconque, on repère la position de l'ensemble mobile par les variables α (déplacement horizontal) et θ (position angulaire).
- Dans l'hypothèse des petits mouvements ($\theta < 10^\circ$), la modélisation simplifiée en vue de la stabilisation à la verticale du pont roulant conduit aux équations différentielles du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} (M + m) \frac{d^2\alpha}{dt^2} + ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = f(t) \\ l \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2\alpha}{dt^2} + g\theta = 0 \end{cases} \quad \text{avec où } g \text{ représente l'accélération de la pesanteur}$$

- 1- Donner l'équation différentielle régissant la position angulaire θ indépendante de α
- 2- On suppose que les conditions initiales sont nulles. Donner l'expression de la fonction de transfert $G_1(s) = \frac{\theta(s)}{F(s)}$.

- 3- Calculer la fonction de transfert $G_2(s) = \frac{\alpha(s)}{\theta(s)}$

Exercice 2 : Considérons le cas des deux masses connectées comme indiqué sur la figure ci-contre, où k_1 et k_2 sont respectivement les raideurs du ressort 1 et 2. β_1 et β_2 sont respectivement les coefficients de frottement des masses m_1 et m_2 .



Ce système peut être modélisé par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} u - k_1(x_1 - x_2) - \beta_1 \frac{dx_1}{dt} = m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} \dots\dots\dots(1) \\ -k_1(x_2 - x_1) - \beta_2 \frac{dx_2}{dt} - k_2x_2 = m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

1- Ecrire les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace.

2- Calculer la fonction de transfert $H_1(s) = \frac{X_1(s)}{U(s)}$ et $H_2(s) = \frac{X_2(s)}{U(s)}$ (sans simplifications)

3- Sachant que le modèle d'état est donné par $\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cz(t) + Du(t) \end{cases}$,

A partir de l'équation (1) et (2), donner le modèle d'état sachant que le vecteur d'état

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} \text{ et le vecteur de sortie est composé de } x_1 \text{ et } x_2 ?$$

1.4. Lois fondamentales pour la modélisation des systèmes mécaniques :

❖ Dans une dynamique en translation

$$\sum_{i=1}^n F_i(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2} \text{ avec } x(t) : \text{le déplacement}$$

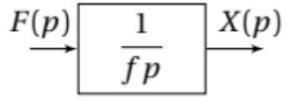
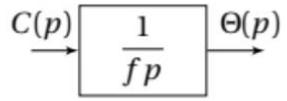
❖ Dans le d'une dynamique en rotation

$$\sum_{i=1}^n C_i(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \text{ avec } \theta : \text{angle de rotation}$$

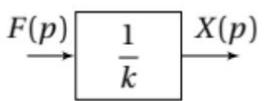
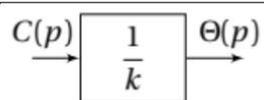
Théorème de la résultante dynamique (position)	Exemple : Mouvement d'un solide en translation	$\sum_{i=1}^n F_i(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2}$	$\sum_{i=1}^n F_i(p) = Mp^2X(p)$	$F(p) \rightarrow \boxed{\frac{1}{Mp^2}} \rightarrow X(p)$
Théorème de la résultante dynamique (vitesse)		$\sum_{i=1}^n F_i(t) = M \frac{dv(t)}{dt}$	$\sum_{i=1}^n F_i(p) = MpV(p)$	$F(p) \rightarrow \boxed{\frac{1}{Mp}} \rightarrow V(p)$
Théorème du moment dynamique (position)	Mouvement d'un solide en rotation	$C(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	$C(p) = Jp^2\Theta(p)$	$C(p) \rightarrow \boxed{\frac{1}{Jp^2}} \rightarrow \Theta(p)$
Théorème du moment dynamique (vitesse)		$C(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$	$C(p) = Jp\Omega(p)$	$C(p) \rightarrow \boxed{\frac{1}{Jp}} \rightarrow \Omega(p)$

- $C(t)$: le couple exprimé en Nm
- J : l'inertie exprimée en $kg.m^2$
- θ : position angulaire en rad
- ω : vitesse angulaire en rad/s

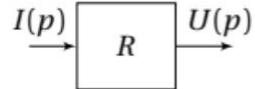
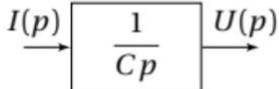
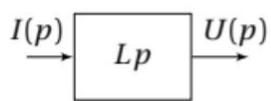
❖ **Lois de frottements visqueux**

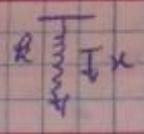
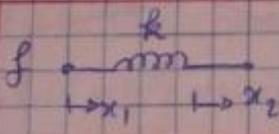
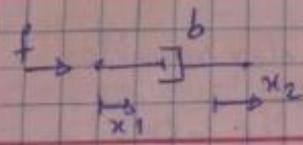
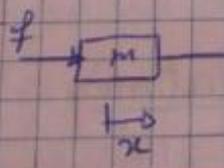
Frottements visqueux pour des solides en translation		$f(t) = f \frac{dx(t)}{dt}$	$F(p) = fpX(p)$	
Frottements visqueux pour des solides en rotation	Frottements dans les paliers d'un moteur à courant continu	$C(t) = f \frac{d\theta(t)}{dt}$	$C(p) = fp\Theta(p)$	

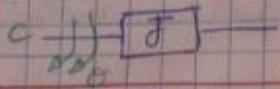
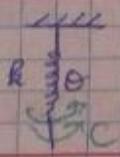
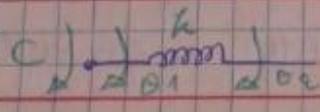
❖ **Lois de comportement des ressorts**

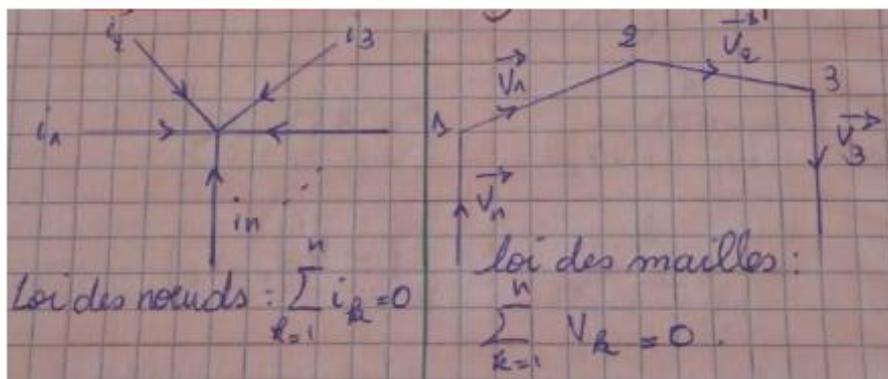
Ressorts en compression de raideur k		$f(t) = kx(t)$	$F(p) = kX(p)$	
Ressorts en traction de raideur k		$C(t) = k\theta(t)$	$C(p) = k\Theta(p)$	

❖ **Systèmes électriques**

Résistor		$u(t) = Ri(t)$	$U(p) = RI(p)$	
Condensateur		$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$U(p) = \frac{1}{Cp} I(p)$	
Inductance		$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$U(p) = LpI(p)$	

Translation	Equation
	$f = kx$
	$f = k(x_1 - x_2)$
	$f = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$
	$f = m\ddot{x}$

Rotation	Equation
	$C = j\dot{\theta}$
	$C = R\dot{\theta}$
	$C = k(\theta_1 - \theta_2)$
	$C = b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$



Chapitre 3

Identification des systèmes par les méthodes de base (méthodes graphiques)

Introduction :

Identifier un procédé ou système consiste à proposer une structure entre son entrée et sa sortie et à déterminer à partir du couple entrée-sortie, les valeurs des paramètres du modèle.

Le modèle ainsi trouvé doit, dans son domaine de validité, se comporter comme la réalité (physique) ou au moins s'en approcher au plus près.

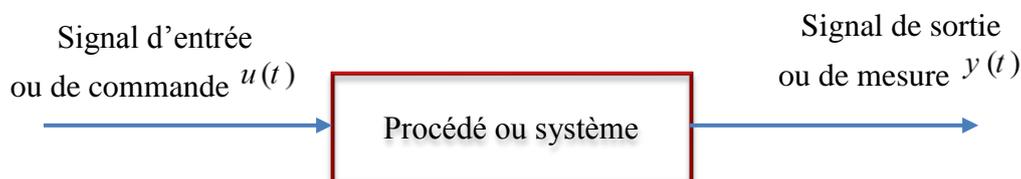
Deux méthodes d'identification sont à considérer :

- essai en boucle ouverte (le procédé étudié n'est pas asservi ou régulé)
- et essai en boucle fermée (un régulateur asservit ou régule le système).

I. Identification en boucle ouverte

1.1. Méthodologie :

En l'absence de toute perturbation, on envoie un signal d'entrée $u(t)$ connu (impulsion échelon ou rampe) et on enregistre le signal de sortie $y(t)$ qui est analysé ensuite :



1.2. Type de signaux d'entrées :

✚ **Echelon unité (fonction d'Heavyside) :** C'est l'entrée la plus utilisée. Elle correspond à un changement brusque de consigne (saut). Cette fonction est définie par :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad \text{sa transformée de Laplace est : } U(p) = \frac{1}{p}$$

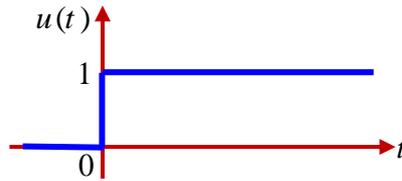


Fig.3.1 : Fonction Echelon

✚ **Impulsion unitaire (impulsion de Dirac) :** Une impulsion est une fonction du temps de durée très courte mais dont l'amplitude est suffisamment grande pour que l'effet en soit sensible. L'impulsion est dite unitaire si la surface est égale à 1. On la note généralement $\delta(t)$. Elle est définie par :

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \text{ et } t \geq \tau \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tau} \right) & \text{si } 0 < t < \tau \end{cases} \quad \text{sa transformée de Laplace est : } \delta(p) = 1$$

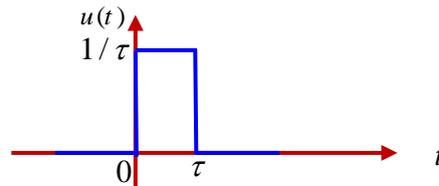


Fig.3.2 : Impulsion de Dirac $\delta(t)$

✚ **Echelon de vitesse (rampe unité) :** La vitesse de variation de cette fonction est constante et égale à 1. Ce signal est le signal de base permettant d'analyser la réponse d'un système en poursuite. Elle est définie par :

$$r(t) = tu(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad \text{sa transformée de Laplace est : } R(p) = \frac{1}{p^2}$$

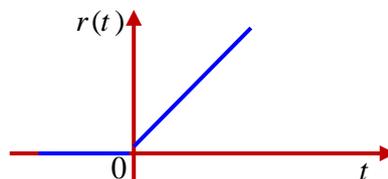


Fig.3.3 : Rampe unité $r(t)$

✚ **Echelon d'accélération (parabole unitaire) :** Soit $f(t)$ la fonction échelon d'accélération, définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} u(t) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad \text{sa transformée de Laplace est : } F(p) = \frac{1}{p^3}$$

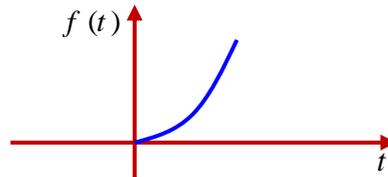


Fig.3.4 : Parabole unitaire $f(t)$

✚ **Signal harmonique :** Ce signal est le signal de base de l'étude fréquentielle des systèmes linéaires, c'est à dire la réponse en fréquence du système. (Très utilisé notamment afin de caractériser les filtres en électronique).

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t + \varphi) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad \text{sa transformée de Laplace est : } F(p) = \frac{p \sin(\varphi) + \omega \cos(\varphi)}{p^2 + \omega^2}$$

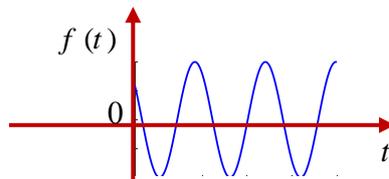


Fig.3.5 : Signal harmonique $f(t)$

1.3. Réponses particulières d'un système scalaire :

On considère ici un système scalaire, c'est à dire monovariante.



Pour connaître le comportement du système et le comparer à d'autres systèmes, on étudie les réponses à quelques signaux particuliers.

✚ Réponse impulsionnelle :

On appelle réponse impulsionnelle, la réponse notée $g(t)$, obtenue par l'application d'une impulsion de Dirac $\delta(t)$ à l'entrée du système, celui-ci étant initialement au repos.



Fig.3.6 : Impulsion de Dirac-Réponse impulsionnelle

✚ **Réponse indicielle :** On appelle réponse indicielle, la réponse notée $h(t)$, obtenue par l'application d'un échelon unité $u(t)$ à l'entrée du système, celui-ci étant initialement au repos.

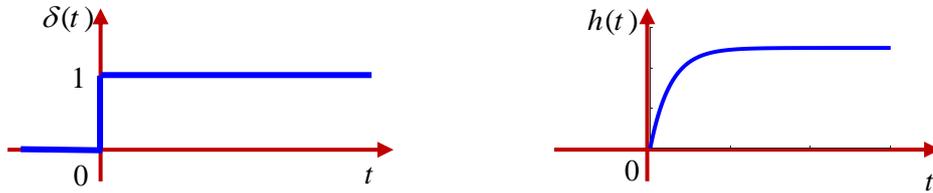


Fig.3.7 : Echelon unitaire-Réponse indicielle

1.4. Identification d'un système continu **du premier ordre :**

✚ **Définition :** On appelle système du 1er ordre, un système régi par une équation linéaire différentielle du premier ordre à coefficients constants de la forme :

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t)$$

Ce système dynamique est caractérisé par deux paramètres :

✚ **Le gain statique** du système K s'exprime dans la même unité que le rapport $\frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)}$. Pour un système stable (la sortie est constante en régime permanent), le gain statique représente la valeur prise par sa réponse à une entrée en échelon unitaire quand $t \rightarrow \infty$.

✚ **La constante de temps** du système τ s'exprime en secondes et caractérise la vitesse (dynamique) de réaction d'un système.

✚ **Fonction de transfert :**

Si les conditions initiales sont nulles, la transformée de Laplace des deux membres donne : $\tau pY(p) + Y(p) = KU(p)$. fonction de transfert d'un système du premier ordre s'écrit alors:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{\tau p + 1}$$

Cette fonction de transfert possède un pôle simple: $p = -\frac{1}{\tau}$

1.4.1. A partir d'une réponse indicielle

C'est la réponse à un échelon $u(t)$. On se propose de déterminer la réponse indicielle à un échelon d'amplitude E_0 : dans ce cas-là :

$$E(p) = \frac{E_0}{p} \Rightarrow Y(p) = \frac{E_0}{p} G(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{\tau p + 1}$$

La sortie temporelle correspondante $y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{E_0}{p} \frac{K}{\tau p + 1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{KE_0}{p} - \frac{K \frac{KE_0}{p}}{p + \frac{1}{\tau}}\right]$$

$$y(t) = KE_0(1 - e^{-t/\tau}) \text{ pour } t \geq 0$$

La courbe correspondante est donnée par la figure ci-dessous :

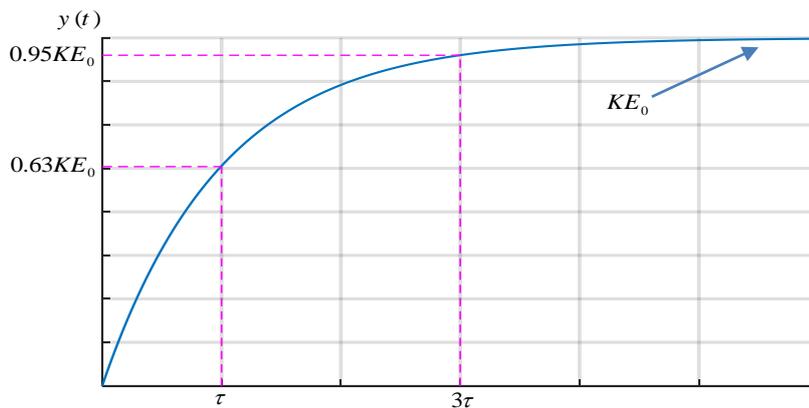


Fig.3.8 : Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

Les points particuliers de cette réponse sont donnés dans le tableau ci-dessous :

- *Point de départ* : $y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} (y(t)) = \lim_{p \rightarrow \infty} (pY(p)) = 0$ (Théorème de la valeur initiale)
- *Point d'arrivée* : $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (pY(p)) = KE_0$ (Théorème de la valeur finale)

t	0	τ	3τ	$+\infty$
$y(t)$	0	$0.63KE_0$	$0.95KE_0$	KE_0
$\frac{dy(t)}{dt}$	KE_0 / τ	-	-	0

1.4.1.1. Caractéristiques temporelles du système du 1^{er} ordre :

✚ Temps de réponse à 5% (t_r) : On appelle temps de réponse d'un système, le temps que met la réponse indicielle du système pour ne plus sortir d'un intervalle de $\pm 5\%$ autour de sa réponse finale.

On cherche $t_{5\%}$ tel que $y(t_{5\%}) = 0.95KE_0$, on a :

$$\begin{aligned}
 y(t_{5\%}) = y(t_r) = 0.95KE_0 &\Rightarrow KE_0(1 - e^{-t_r/\tau}) = 0.95KE_0 \\
 &\Rightarrow 1 - e^{-t_r/\tau} = 0.95 \\
 &\Rightarrow \frac{t_r}{\tau} = -\ln(0.05) \\
 &\Rightarrow t_r = 3\tau
 \end{aligned}$$

✚ **Temps de montée (t_m)**: C'est le temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur finale (valeur en régime permanent) :

Soient t_1 et t_2 les instants où la réponse vaut respectivement 10% et 90% de sa valeur finale.

$$\begin{cases}
 KE_0(1 - e^{-t_1/\tau}) = 0.1KE_0 \Rightarrow t_1 = -\tau \ln(0.9) \\
 KE_0(1 - e^{-t_2/\tau}) = 0.9KE_0 \Rightarrow t_2 = -\tau \ln(0.1)
 \end{cases}$$

Donc $t_m = t_2 - t_1 \approx 2.2\tau$

✚ **Intérêt de la constante de temps :** Elle fournit une indication sur le comportement du système :

- Si τ est petite, alors t_r est faible et le système est rapide
- plus τ est élevée, plus le système est lent.

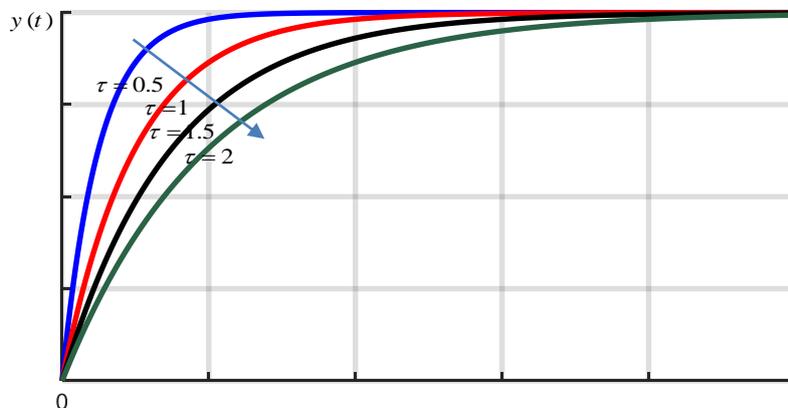


Fig.3.9 : Influence de la constante de temps (τ) sur la réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

✚ **Cas particulier :** si la condition initiale est non nulle ($y(0) = y_0 \neq 0$)

Un système du 1er ordre s'écrit comme suit : $G(p) = \frac{K}{\tau p + 1}$

soumis à une entrée échelon : $e(t) = e_0 u(t)$

La réponse indicielle vaut : $y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e_0 Y(p)}{p} \right] = \mathcal{L}^{-1} e_0 \left[1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right] u(t) + y_0(t)$

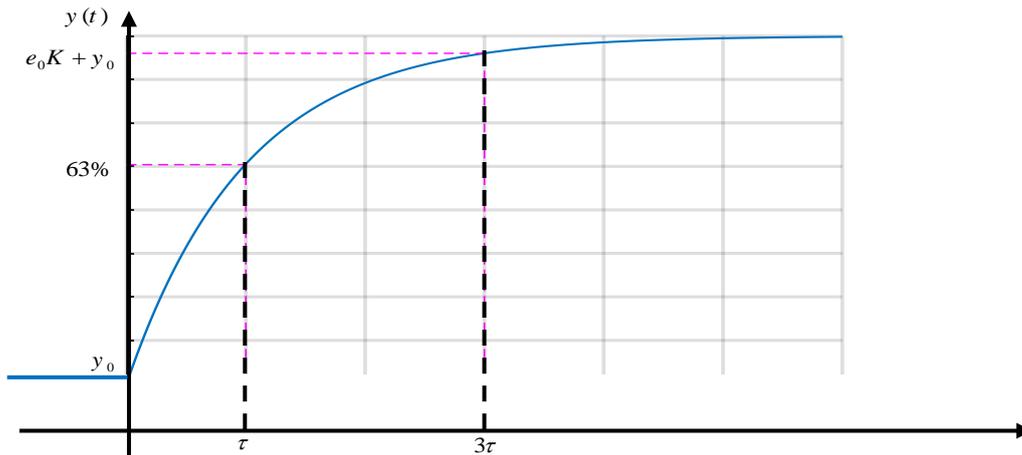


Fig.3.10 : Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre à CI non nulles

1.4.1.2. Identification des systèmes du 1^{er} ordre à partir de la réponse indicielle :

- La valeur de K : à partir de l'asymptote horizontale (ne pas oublier de diviser par la valeur de l'échelon E_0 $\left(K = \frac{\Delta y(t)|_{t \rightarrow \infty}}{\Delta u(t)} \right)$
- La valeur de τ : On lit soit l'abscisse du point qui correspond à 95% de $KE_0 \rightarrow 3\tau$, méthode peu précise, car au niveau du point mesuré, la courbe est trop horizontale.
- ou soit l'abscisse du point qui correspond à 67% de $KE_0 \rightarrow \tau$, méthode assez précise, car au niveau du point mesuré, la courbe présente une tangente éloignée de zéro.

1.4.2. A partir de la réponse impulsionnelle

C'est la réponse à une impulsion de Dirac $\delta(t)$. Dans ce cas nous avons :

$e(t) = \delta(t) \Rightarrow \mathcal{L}[e(t)] = 1$. Le signal de sortie s'exprime comme suit :

$$Y(p) = G(p)E(p) = \frac{K}{\tau p + 1}$$

La sortie temporelle correspondante $y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{\tau p + 1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{\tau} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}\right]$$

$$y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} \text{ pour } t \geq 0$$

L'allure de cette réponse est représentée par la figure 3.7 comme suit:

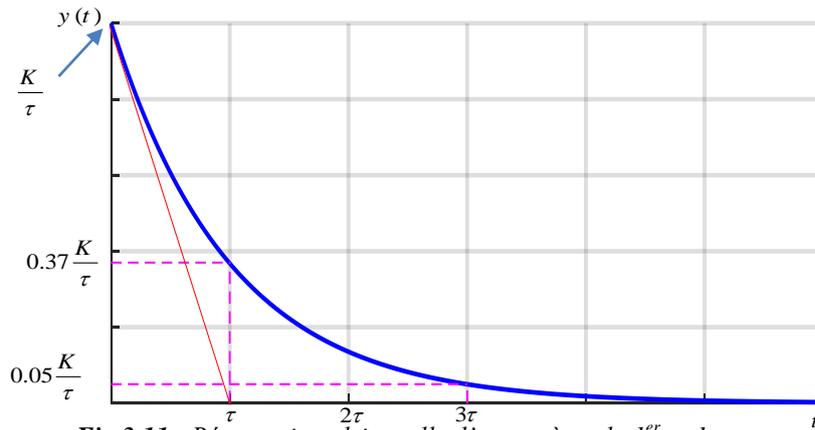


Fig.3.11 : Réponse impulsionnelle d'un système du 1^{er} ordre

Les points particuliers de cette réponse sont donnés dans le tableau ci-dessous :

- Point de départ : $y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} (y(t)) = \lim_{p \rightarrow \infty} (pY(p)) = \frac{K}{\tau}$ (Théorème de la valeur initiale)
- Point d'arrivé : $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (pY(p)) = 0$ (Théorème de la valeur finale)

t	0	τ	3τ	$+\infty$
$y(t)$	$\frac{K}{\tau}$	$0.37 \frac{K}{\tau}$	$0.05 \frac{K}{\tau}$	0
$\frac{dy(t)}{dt}$	$-\frac{K}{\tau^2}$	$-0.37 \frac{K}{\tau^2}$	$-0.05 \frac{K}{\tau^2}$	0

1.4.2.1. Identification des systèmes du 1^{er}ordre à partir de la réponse impulsionnelle :

Il est possible d'identifier les deux paramètres (K et τ) de la fonction de transfert d'un système du premier ordre à partir de la courbe de sa réponse impulsionnelle :

- La valeur de τ : On lit soit l'abscisse du point qui correspond à 37% de $\frac{K}{\tau} \rightarrow \tau$ ou soit l'abscisse qui correspond à 0.05% de $\frac{K}{\tau} \rightarrow 3\tau$
- La valeur de K : à partir de la valeur initiale de la réponse impulsionnelle $\frac{K}{\tau} \rightarrow K$

1.4.3. A partir d'une réponse à une rampe :

Un signal d'entrée en rampe est défini par :

La réponse à une rampe de pente a d'un système du premier ordre est donnée par :

$$u(t) = \begin{cases} at & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \Rightarrow U(p) = \frac{a}{p^2}$$

La fonction de transfert d'un système du premier ordre à une rampe :

$$Y(p) = \frac{K}{(1+\tau p)} U(p) = \frac{K}{(1+\tau p)} \frac{a}{p^2} = \frac{Ka}{p^2(1+\tau p)} = Ka \left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau}{p + \frac{1}{\tau}} \right)$$

La réponse temporelle vaut alors :

$$y(p) = KaL^{-1} \left[\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau}{p + \frac{1}{\tau}} \right) \right] \Rightarrow y(t) = Ka \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

✚ Erreur de traînage.

- On appelle erreur de traînage (aussi erreur de vitesse), la différence que l'on relève entre l'entrée et la sortie d'un système, lorsque $t \rightarrow \infty$, pour une entrée en rampe.

Dans le cas d'un système du premier ordre, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - y(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(at - Ka \left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(at(1-K) + Ka\tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} (at(1-K) + Ka\tau) \end{aligned}$$

Par conséquent, $\begin{cases} \text{si } K = 1, \varepsilon(t) = a\tau \\ \text{si } K \neq 1, \varepsilon(t) \rightarrow \infty \end{cases}$

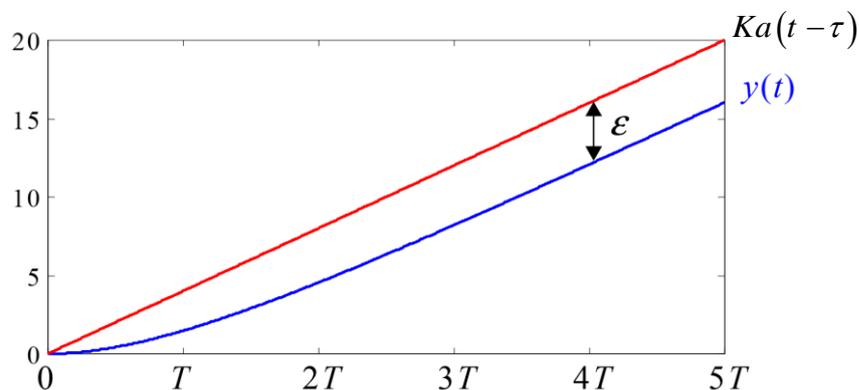
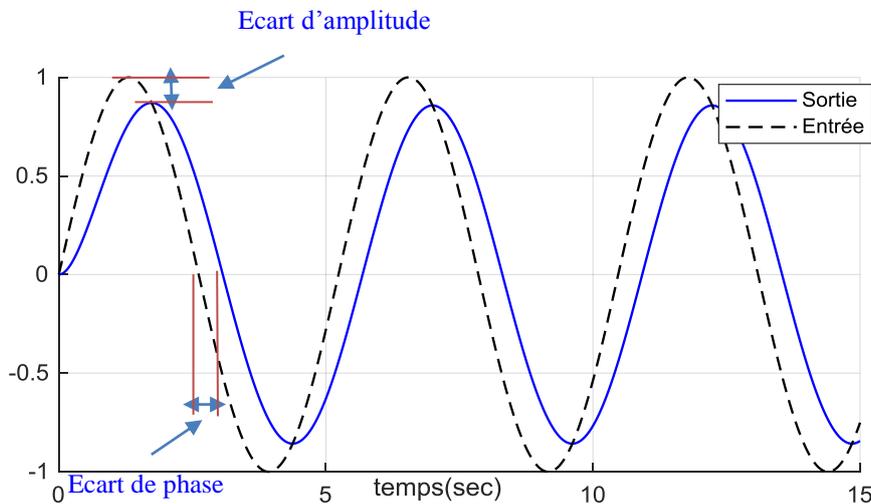


Fig.3.12 : Réponse à une rampe d'un système du 1^{er} ordre

1.4.4. A partir d'une réponse harmonique.

- Elle permet de réaliser une excitation dans une large gamme de fréquences, contrairement à l'échelon qui possède un spectre réduit.
- Le nombre de points de mesure est élevé. L'analyse est donc beaucoup plus performante que l'analyse temporelle.

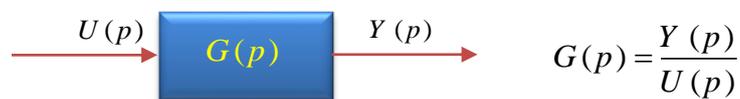
Considérons un système linéaire d'ordre quelconque de fonction de transfert $G(p)$ avec une entrée sinusoïdale d'amplitude donnée U_0 et de pulsation donnée ω du type $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$. La propriété de linéarité du système fait que la sortie sera également une sinusoïde, de même pulsation que le signal d'entrée mais d'amplitude différente et déphasé par rapport au signal d'entrée. On aura : $y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \varphi)$.



- Fig.3.13 : Réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdal

✚ Fonction de transfert complexe (harmonique) – rappel :

La fonction de transfert d'un système linéaire continu et invariant est une fonction de la forme:



Où $U(p)$ et $Y(p)$ sont les transformées dans le domaine de Laplace des fonctions temporelles $u(t)$ et $y(t)$.

La fonction de transfert complexe $G(j\omega)$ s'obtient simplement en remplaçant la variable de Laplace p par la variable $j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert $G(p)$. La fonction

de transfert complexe est donc $G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$.

- Cette réponse sera caractérisée par deux paramètres dépendent de la pulsation ω de l'entrée.

• **Le gain :** $|G(j\omega)|$ représente le rapport des amplitudes des sinusoïdes de sortie et d'entrée, pour une pulsation ω donnée. C'est donc le gain fréquentiel du système à cette pulsation, que l'on appelle également le gain réel. Et on écrit $|G(j\omega)| = \frac{Y_0}{U_0}$

• **Déphasage :** $\varphi(\omega)$: l'équation $Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$ nous conduit également à l'égalité des arguments

$$\arg(Y(j\omega)) = \arg(G(j\omega)) + \arg(U(j\omega))$$

soit
$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = \arg(Y(j\omega)) - \arg(U(j\omega))$$

- La fonction de transfert harmonique, nous fournit un gain réel $|G(j\omega)|$ et un déphasage $\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$ induit par le système vis-à-vis des composantes sinusoïdales. Elle traduit donc le comportement fréquentiel du système.

✚ Identification d'un système du 1^{er} ordre à partir de diagramme de Bode :

La fonction de transfert complexe d'un système canonique du premier ordre s'écrit et en posant $p = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\tau\omega)}$$

Avec $K > 0$ est le gain statique du système, $\tau > 0$ sa constante de temps.

- Le module : $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$

- La phase, $\varphi(\omega) = \underbrace{\arctan(\text{num})}_{=0} - \arctan(\text{den}) = -\arctan(\tau\omega)$

rappel : $X = a + jb = \arg(X) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan(b) - \arctan(a)$

Le tracé du diagramme asymptotique consiste à sépare l'espace des pulsations en deux domaines, selon que $\tau\omega$ est très grand ou très petit devant 1.

❖ Diagrammes Asymptotiques de Bode :

- Le module G_{dB} (en dB) en fonction de ω

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}$$

$$G_{dB} = 20\log(|G(j\omega)|) = 20\log(K) - 20\log\left(\sqrt{1+(\tau\omega)^2}\right)$$

$$= 20\log(K) - 10\log(1+(\tau\omega)^2)$$

$$\Rightarrow G_{dB} = 20\log(K) - 10\log(1+(\tau\omega)^2)$$

- La phase (l'argument de) φ en fonction de ω

$$\varphi(\omega) = \arctan(K) - \arctan(\tau\omega)$$

Etude des asymptotes basses fréquences (lorsque $\omega \rightarrow 0$):

- Si $\tau\omega \ll 1$ soit $\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dB} = K \Rightarrow G_{dB} = 20\log(K)$

Dans ce cas, la courbe de gain suit une asymptote horizontale d'équation $G_1 = 20\log(K)$,

D'autre part, on trouve ; $\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\varphi(\omega)) = 0$

Le diagramme de phase présente lui aussi une asymptote horizontale lorsque $\omega \rightarrow 0$.

Etude des asymptotes hautes fréquences (lorsque $\omega \rightarrow \infty$):

- Si $\tau\omega \gg 1$ soit $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ nous avons

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20\log(K) - 10\log(\tau\omega)^2 \\ &= 20\log(K) - 20\log(\tau) - 20\log(\omega) \\ &= 20\log\left(\frac{K}{\tau}\right) - 20\log(\omega) \end{aligned}$$

Ceci correspond à est une droite de pente -20 dB par décade, C'est aussi équivalent à une pente de -6dB par octave.

Définition : On appelle qu'une décade correspond à l'intervalle $[\omega, 10\omega]$ et qu'une octave à l'intervalle $[\omega, 2\omega]$. Une pente de 20 dB/décade correspond aussi à 6 dB/octave.

Cette droite coupe l'autre asymptote au point $\omega = 1/\tau$ et coupe l'axe des abscisses au point $\omega = K/\tau$.

$$20\log(K) = 20\log(K) - 20\log(\tau\omega)$$

$$\Rightarrow 20\log(\tau\omega) = 0$$

$$\Rightarrow \tau\omega = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\tau}$$

Remarque: Dans la courbe de gain, les asymptotes ne peuvent prendre pour pente que les valeurs multiples de 20 dB/décade. On appelle pente d'ordre n , une pente égale à $20n$ dB/décade.

D'autre part, on déduit que :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\varphi(\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\arctan \left(\frac{K}{1 + j\tau\omega} \right) \right) = -\frac{\pi}{2}$$

Donc le déphasage $\varphi(\omega) \rightarrow -\pi/2$ lorsque $\omega \rightarrow +\infty$

❖ **Etude de points particuliers du diagramme réel :**

On remarque la valeur particulière $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$. Cette valeur particulière possède deux propriétés :

$$\text{D'une part, on a : } G(j\omega_c) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega_c}{\omega_c}} = \frac{K}{1 + j}$$

$$\Rightarrow |G(j\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{1+1}} = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

Le passage au gain en décibels nous donne

$$G_{dB}(j\omega_c) = 20\log\left(\frac{K}{\sqrt{2}}\right) = 20\log(K) - 20\log(\sqrt{2})$$

avec $20\log_{10}(\sqrt{2}) \approx 3.01$ d'où $G_{dB}(j\omega_c) = G_{\max} - 3$

Le gain obtenu à la pulsation ω_c est égal au gain maximum - 3dB. Pour cette raison, on nomme ω_c la pulsation de coupure à -3dB.

En ce qui concerne la phase, on remarque que :

$$\varphi(\omega_c) = \arctan\left(\frac{K}{1 + j}\right) = -\pi/4$$

A l'issue de cette étude, nous obtenons finalement le diagramme de Bode suivant :

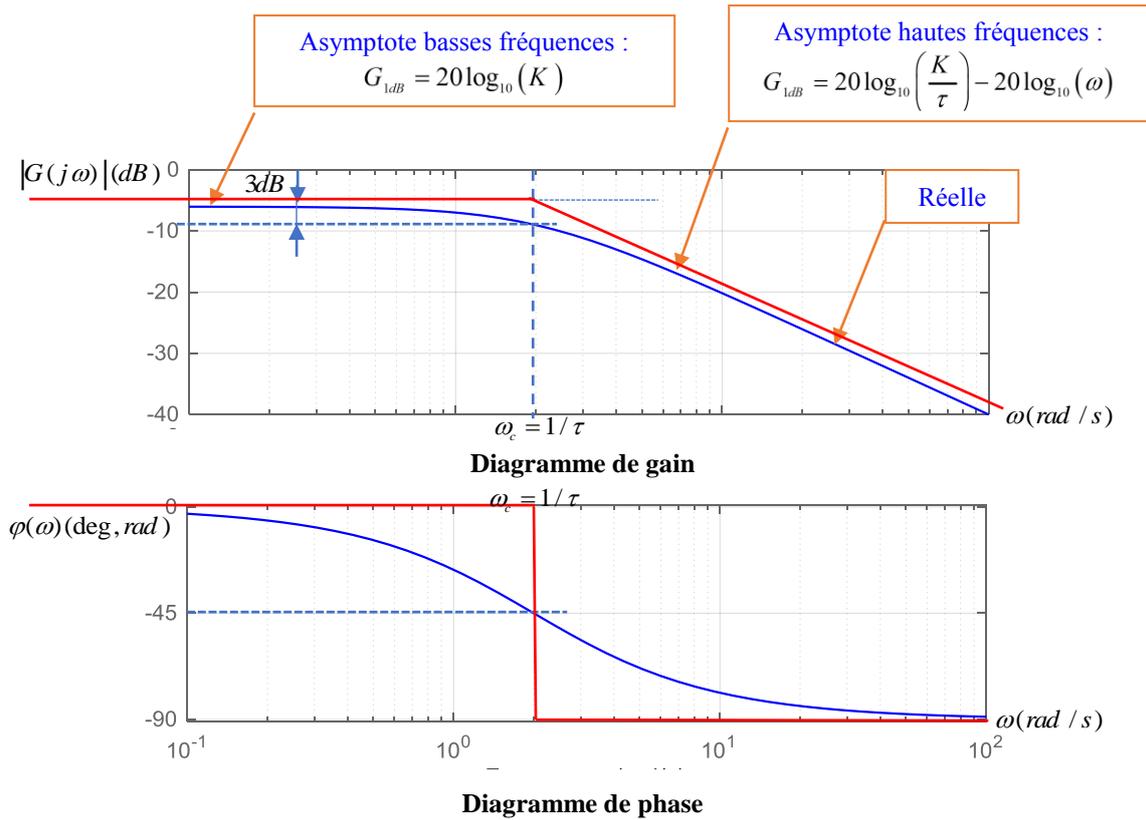


Fig.3.14 : Diagramme de Bode d'un système du premier ordre (asymptotique et réel)

➤ **Conclusion :** à partir de cette étude, il est simple d'identifier un système du 1^{er} ordre à partir de sa réponse harmonique (diagramme de Bode).

- Le gain K est déterminé à partir de l'asymptote horizontale pour $\omega \rightarrow \infty$, $20 \log(K)$
- La constante du temps τ est déterminée à l'intersection des asymptotes en 0 et en $+\infty$, avec pour plus de précision, la valeur de la pulsation obtenue pour un déphasage $-\frac{\pi}{4}$

✚ **Identification d'un système du 1^{er} ordre à partir de diagramme de Nyquist :**

- Le diagramme de Nyquist d'un système est le lieu, en coordonnées polaires, des points M de coordonnées $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ (figure 4.4) (Ce diagramme est toujours orienté dans le sens des ω croissants).

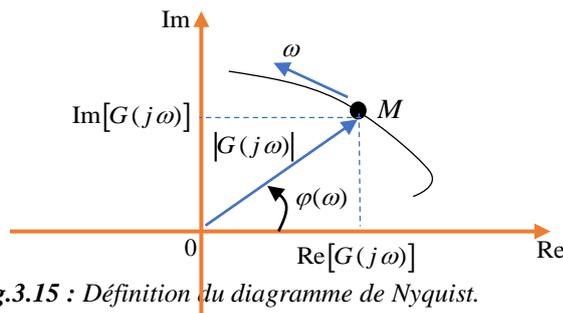


Fig.3.15 : Définition du diagramme de Nyquist.

On peut écrire alors $G(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + j\text{Im}[G(j\omega)]$

- Le diagramme de Nyquist (lieu complet) correspond à ω variant de $-\infty$ à $+\infty$. Il s'obtient par symétrie par rapport à l'axe réel du lieu de Nyquist.

❖ **Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre:**

Pour tracer le diagramme de Nyquist, il faut décomposer la fonction de transfert complexe $G(j\omega)$ en partie réelle et partie imaginaire comme suit :

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\tau\omega)} = \frac{K(1-j\tau\omega)}{(1+j\tau\omega)(1-j\tau\omega)} = \frac{K(1-j\tau\omega)}{(1+\tau^2\omega^2)}$$

$$\text{soit : } G(j\omega) = \frac{K}{1+\tau^2\omega^2} + j\frac{-K\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2} = X + jY$$

$$\text{La partie réelle : } X = \text{Re}(G(j\omega)) = \frac{K}{1+\tau^2\omega^2} > 0 \quad \forall \omega \in [0, +\infty[\quad \dots(1)$$

$$\text{La partie imaginaire : } Y = \text{Im}(G(j\omega)) = -\frac{K\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2} < 0 \quad \forall \omega \in [0, +\infty[\quad \dots(2)$$

$$(2) \Leftrightarrow Y = -\tau\omega X \quad \dots\dots(3)$$

$$(1) \Leftrightarrow \tau^2\omega^2 = \frac{K}{X} - 1 \quad \dots\dots(4)$$

$$(3), (4) \Leftrightarrow Y^2 = \left(\frac{K}{X} - 1\right)^2 X^2 \Rightarrow X^2 - KX + Y^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2$$

Le lieu de Nyquist d'un système du premier ordre est un demi-cercle de centre $(K/2, 0)$ et de rayon $K/2$ comme le montre la figure 4.5.

- Pour $\omega = 0$ (basse fréquence), $|G(j\omega)| = K$ et $\varphi(\omega) = 0$, correspond au point $(K, 0)$.
- Pour $\omega \rightarrow \infty$ (haute fréquence), $|G(j\omega)| = 0$ et $\varphi(\omega) = \frac{-\pi}{2}$, correspond au point $(0, 0)$.
- Pour $\omega = \omega_c$ (pulsation de coupure), $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$ et $\varphi(\omega) = \frac{-\pi}{4}$, correspond au point $\left(\frac{K}{2}, -\frac{K}{2}\right)$.

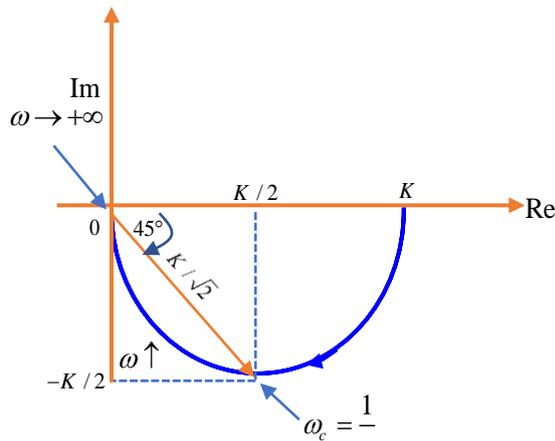


Fig.3.16 : Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre

1.5. Identification d'un système continu du deuxième ordre :

Définition : Un système linéaire continu et invariant d'entrée $e(t)$ et de sortie $y(t)$, est dit de second ordre, lorsqu'il est régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du 2^{ème} ordre de la forme :

$$a_2 \frac{dy^2(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 e(t)$$

Ou sous une forme canonique :

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = K \omega_n^2 e(t)$$

où ω_n, ξ et K sont des constantes réelles positives. Ils ont la signification suivante :

- ω_n : Pulsation propre non amortie (ou pulsation naturelle) du système,
- ξ : Coefficient (ou facteur) d'amortissement du système,
- Gain statique du système (gain en régime permanent).

La fonction de transfert se déduit de l'équation différentielle du système en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres (en prenant des conditions initiales nulles):

$$p^2 Y(p) + 2\xi\omega_n p Y(p) + \omega_n^2 Y(p) = K \omega_n^2 E(p)$$

La fonction de transfert du système est alors :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1}$$

✚ A partir de sa réponse indicielle

La réponse transitoire des systèmes asservis présente souvent des oscillations amorties avant d'atteindre le régime permanent. Les critères de performances, communément utilisés pour la caractérisation des systèmes asservis linéaires dans le domaine temporel, sont définis dans la figure suivante :

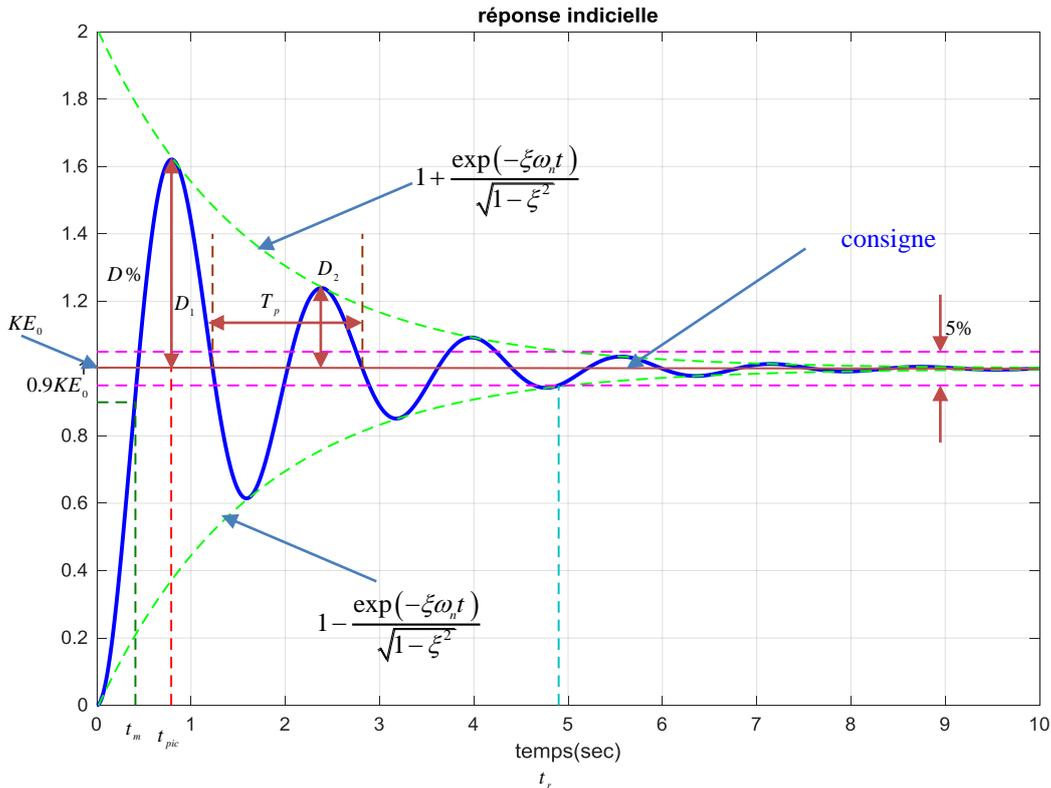


Fig.3.17 : Caractéristiques temporelles de la réponse indicielle

Cinq paramètres sont intéressants :

✚ **Temps de montée (rise time t_m) :** Temps nécessaire à la réponse pour évoluer de 0 à 90% (ou de 5 à 95%) de sa valeur finale.

$$t_m = \frac{\pi}{2\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

✚ **Dépassement $D\%$:** Le dépassement $D\%$ exprimé en pourcentage et défini par la valeur maximum du signal de sortie ramené sur sa valeur finale. Le premier dépassement est donné par

$$D\% = 100 \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right).$$

✚ **Temps de pic (t_{pic}) :** Temps nécessaire pour atteindre le 1^{er} dépassement. Il est défini

$$\text{lorsque le signal de sortie atteint sa valeur maximum. } t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}.$$

✚ **Temps de réponse ou d'établissement (settling time t_r)** : Temps requis pour que la courbe de sortie atteigne et reste à l'intérieur d'une bande de $n\%$, exprimée en pourcentage (généralement 5%), relativement à sa valeur finale. $t_r(n\%) = \frac{1}{\omega_n \xi} \ln\left(\frac{100}{n}\right)$.

✚ **Pseudo-période (T_p)** : La pseudo-période T_p définie par la période de la sinusoïde amortie (C'est le temps qui s'écoule entre deux maxima successifs (ou deux minima)).

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} .$$

Remarque : Si $D_2 \gg 0$

✚ **Le dépassement** $\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{D_1}{D_2}\right) \Rightarrow \xi = \frac{\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{D_1}{D_2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2} \ln^2\left(\frac{D_1}{D_2}\right)}}$

✚ **La pulsation propre non amortie** $\omega_n = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$

Chapitre 4

Identification des systèmes par les méthodes de Strejc et Broida

Introduction :

Méthode 1 : (ordre entier)

Le modèle : Cette méthode peut s'appliquer aux systèmes stables et dont leur réponse indicielle ne présente pas de dépassement. On identifie à une fonction de la forme :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(1+Ts)^n}$$

Les paramètres à identifier sont

- Le gain statique K
- La constante de temps T
- Le retard τ
- L'ordre du système n

On dispose de la réponse $y(t)$ (variation de la sortie) suite à un échelon d'entrée $u(t)$

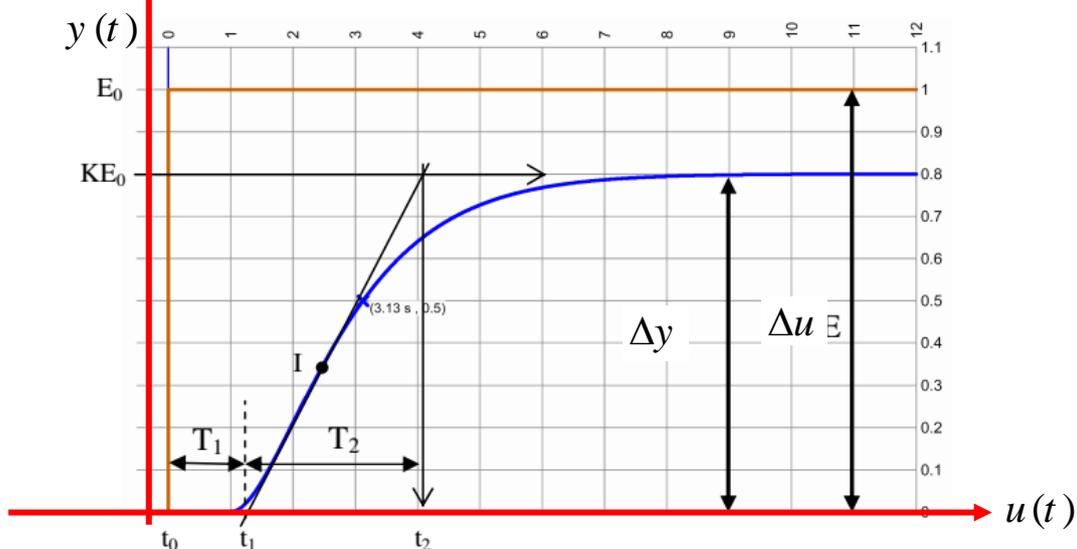


Figure 3.1. Détermination des paramètres du modèle pour la méthode de Strejc

- Strejc a calculé la réponse indicielle des systèmes de boucle ouverte BO $H(s) = \frac{1}{(1+Ts)^n}$ pour différentes valeurs de n .
- Ensuite, il a montré (Figure 3.1), que t_1 et t_2 dépendent de n et de τ , alors que le rapport $\frac{t_1}{t_2}$ qui traduit la position du point d'inflexion, ne dépend que de n

Remarque : L'instant initial t_0 marque le temps à partir duquel la dérivée $\frac{dy(t)}{dt} = 0$. Si t_0 est différent de 0, on note Γ_0 sa valeur et on l'additionne à T_1 pour avoir le retard total du modèle τ

Le protocole de détermination des paramètres est le suivant :

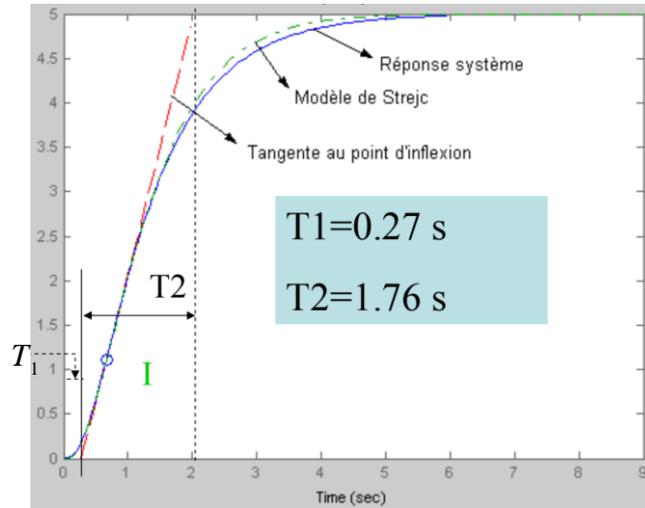
- 1- Relever $\Delta y(t)$ et $\Delta u(t)$
- 2- Calculer le gain statique $K = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)}$
- 3- Tracer la tangente au point d'inflexion I .
- 4- Relever graphiquement les valeurs de t_1 et t_2 puis en déduire $T_1 = t_1 - t_0$ et $T_2 = t_2 - t_0$
- 5- Calculer $\frac{T_1}{T_2}$ et en déduire à partir du tableau la valeur de l'ordre n . Entre deux lignes du tableau, on choisit la valeur de n la plus petite.
- 6- Calculer la constante du temps T à partir de la colonne $\frac{T_2}{T}$ du tableau
- 7- Déterminer le retard τ , s'il existe.
 - a- T_1 contient-il un retard ? déterminer T_{1r} à partir de $\frac{T_1}{T_2}$ issue du tableau après le choix de n et faire $\tau = T_1 - T_{1r}$.
 - b- Si $t_0 = \Gamma \neq 0$, $\tau = \Gamma + (T_1 - T_{1r})$

n	T ₁ /T	T ₂ /T	T ₁ /T ₂
1	1	0	0
2	2.718	0.282	0.104
3	3.695	0.805	0.218
4	4.463	1.425	0.319
5	5.119	2.100	0.410
6	5.700	2.810	0.490
7	6.200	3.550	0.570
8	6.700	4.310	0.640
9	7.200	5.080	0.710
10	7.600	5.870	0.77

Exemple : Pour tester l'efficacité de cette méthode, nous prenons l'exemple d'un système linéaire d'ordre 3, représenté par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{100}{(s+5)(s+4)(s+1)}$$

Sa réponse indicielle est représentée sur la figure suivante :



- Le gain statique est mesuré directement par la valeur finale de la sortie : $K = 5$
- On trace la tangente au point d'inflexion I et on mesure : $T_1 = 0.27$ et $T_2 = 1.76$
- D'après le tableau, avec $\frac{T_1}{T_2} = 0.15$, la valeur de $\frac{T_1}{T_2} = 0.15$ comprise entre 0.1 ($n=2$) et 0.22 ($n=3$), on choisit l'ordre la plus petite c'est à dire $n = 2$.
- La constante de temps est évaluée à partir de $\frac{T_2}{T} = 0.72$ au tableau. Cela donne $T = 0.65s$.
- **Le retard :** D'après le tableau, $\frac{T_1}{T} = 0.28$ ce qui donnerait une valeur de $T_{1r} = 0.18$.

Or on mesure $T_1 = 0.27$. On peut en déduire un retard $\tau = T_1 - T_{1r} = 0.27 - 0.18 = 0.09s$

La méthode identifie la réponse indicielle comme étant proche de celle du système suivant :

$$G(s) = \frac{100}{(s+5)(s+4)(s+1)} \approx \frac{5}{(1+0.65s)^2} e^{-0.09s}$$

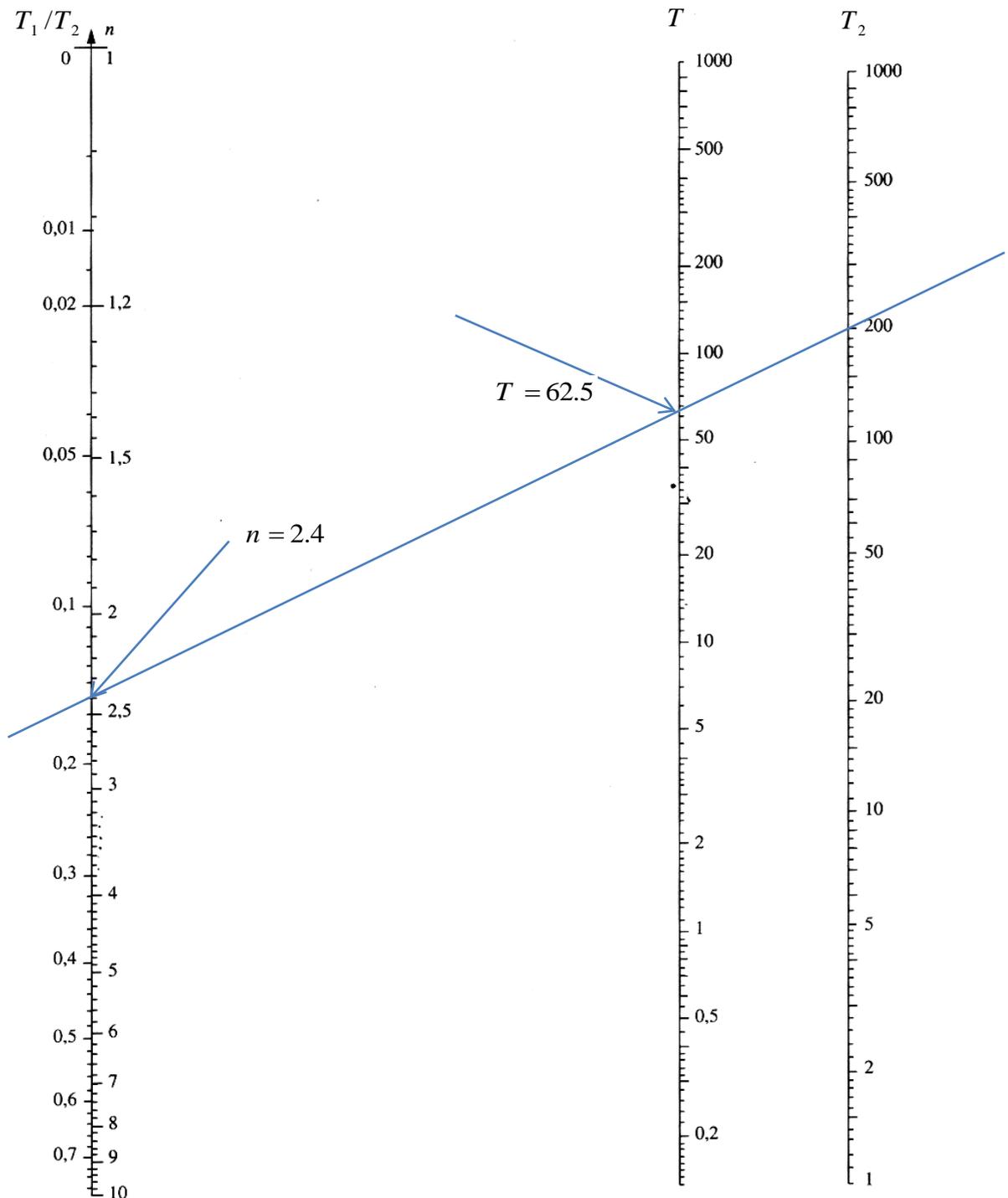
La réponse de ce système est tracée dans la figure ci-dessus en trait pointillé. On peut noter la grande ressemblance avec celle du système de départ alors qu'on a identifié un deuxième ordre avec retard au lieu d'un troisième ordre.

Méthode 2 : (ordre fractionnaire)

Le modèle : Le modèle à identifier est le même que le cas entier. $H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(1+Ts)^n}$

Le protocole de détermination des paramètres est le suivant :

- 1- Relever $\Delta y(t)$ et $\Delta u(t)$
- 2- Calculer le gain statique $K = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)}$
- 3- Tracer la tangente au point d'inflexion I .
- 4- Relever graphiquement les valeurs de t_1 et t_2 puis en déduire $T_1 = t_1 - t_0$ et $T_2 = t_2 - t_1$
- 5- Calculer $\frac{T_1}{T_2}$.
- 6- Porter sur le nomogramme les 2 points $\frac{T_1}{T_2}$ et T_1 puis tracer une droite reliant ces deux points
- 7- Relever n (ordre du modèle) et T (constante de temps du modèle).
- 8- Déterminer le retard τ , s'il existe.
 - a- T_1 contient-il un retard ? déterminer T_{1r} à partir de $\frac{T_1}{T_2}$ issue du nomogramme
 $(\tau = T_1(\text{réel}) - T_1(\text{ordre entier}))$ (après arrondissement à la valeur de n ordre entier la plus proche en nomogramme de $\frac{T_1}{T_2}$)



Exemple : Pour un système à retard de forme $H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(1+Ts)^n}$

Cas 1 : ordre fractionnaire : Nous avons les mesures suivantes :

$$\Delta y(t) = 30, \Delta u(t) = 10, T_1 = 30, T_2 = 200$$

- Le gain statique Calculer le gain statique $K = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)} = \frac{30}{10} = 3$
- $\frac{T_1}{T_2} = \frac{30}{200} = 0.15$, en déduire $n = 2.4$ et $T = 62.5$
- Le retard τ : Après arrondissement à la valeur de n entier la plus proche en nomogramme de $\frac{T_1}{T_2}$ c'est-à-dire $n = 2$.

$$\text{Pour } n = 2 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 0.105 \Rightarrow T_{1r} = 0.105 \times T_2 = 0.105 \times 200 = 21$$

$$\Rightarrow \tau = T_1(\text{réel}) - T_1(\text{ordre entier}) = 30 - 21 = 9$$

D'où la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{3e^{-9s}}{(1 + 62.5s)^{2.4}}$$

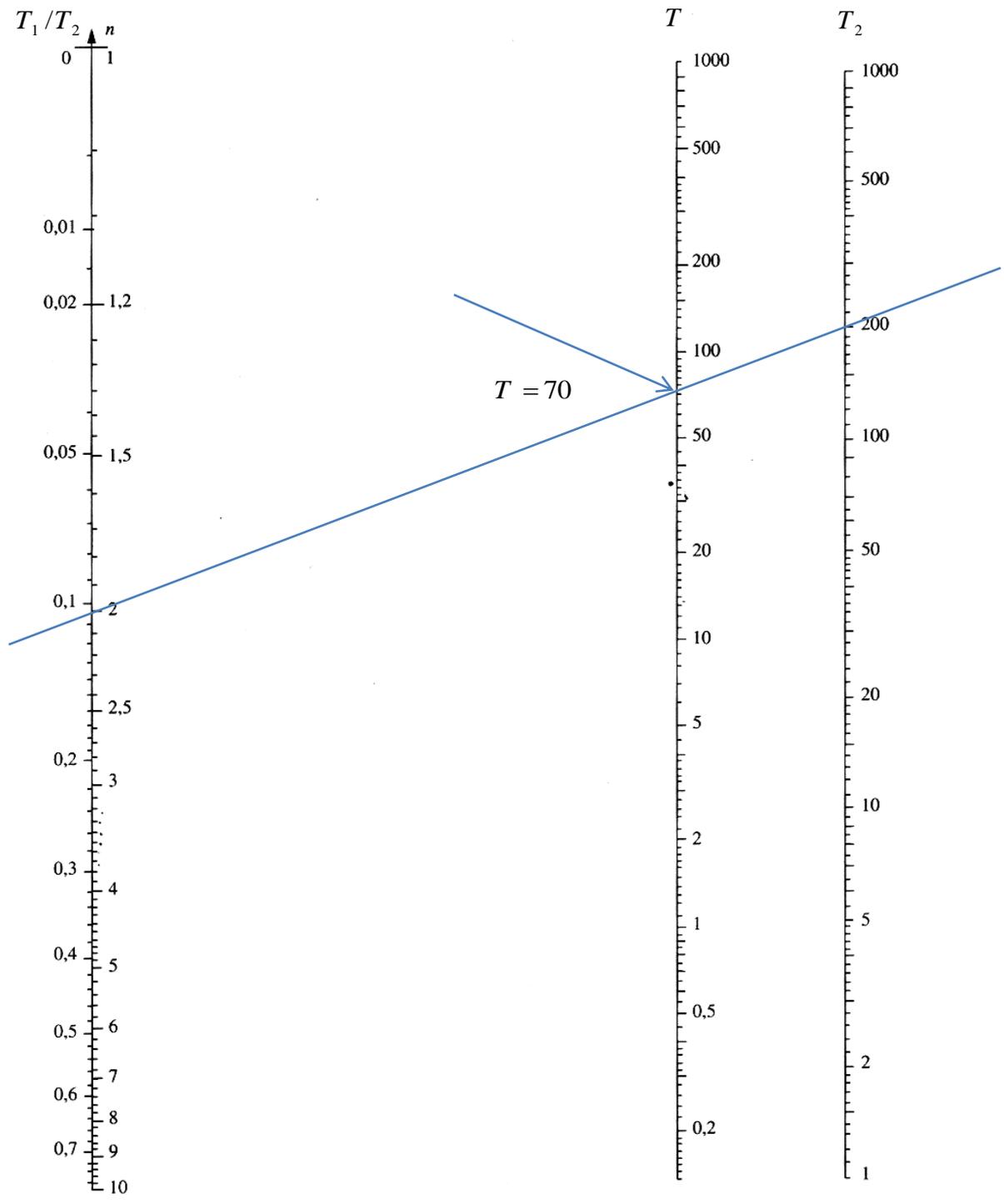
Cas 2: ordre entier : Nous avons les mesures suivantes :

$$\Delta y(t) = 30, \Delta u(t) = 10, T_1 = 30, T_2 = 200 \text{ et } T = 10.$$

- Le même gain statique $K = 3$
- Choisir $n = 2$ (entier inférieur à $n = 2.4$)
- En traçant la nouvelle droite pour $n = 2$ et $T_2 = 200$, on trouve, $\frac{T_1}{T_2} = 0.105$ et $T = 70$
- Le même retard $\tau = 9$ sec

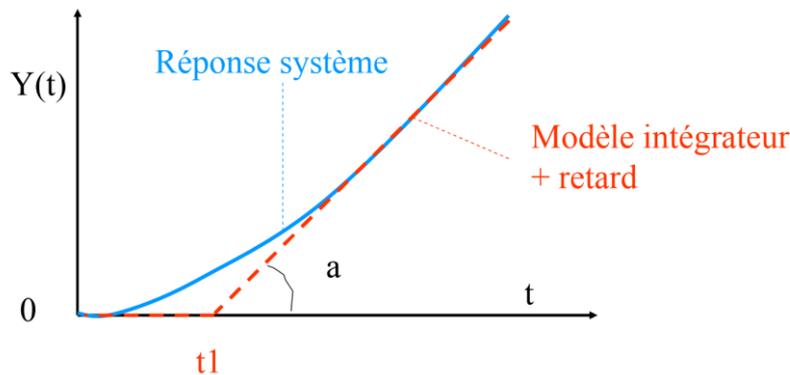
D'où la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{3e^{-9s}}{(1 + 70s)^2}$$



Modèle de Strejc pour un intégrateur : (Systèmes naturellement instables)**1- Méthode rapide pour un procédé intégrateur**

- Les systèmes contenant un intégrateur ont une réponse indicielle en rampe, en régime permanent.
- L'asymptote de cette réponse est une droite d'équation $y = a(t - t_1)$ de pente a et qui coupe l'axe des abscisses pour $t = t_1$ (voir figure ci-dessous).



On identifie la réponse du système réel à la réponse d'un système intégrateur pur avec retard c'est à dire avec la fonction de transfert suivante : $H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s}$

Les paramètres de ce système sont donnés comme suit: $K = \frac{a}{\Delta u}$ et $\tau = t_1$

Avec Δu est l'amplitude de l'échelon appliqué en entrée.

2- Identification des systèmes d'ordre supérieur avec intégrateur**⚡ Ordre fractionnaire :**

- Si on envoie un signal échelon à un élément intégrateur, une fois le transitoire terminé, on obtient un signal évoluant linéairement, c'est-à-dire selon une droite.
- On constate qu'il peut y avoir un retard naturel. La détermination de ce retard est bien sûr une source d'erreur qu'il faut minimiser.

Le modèle : le modèle à identifier dans ce cas, proposé par Strejc ait la forme suivante :

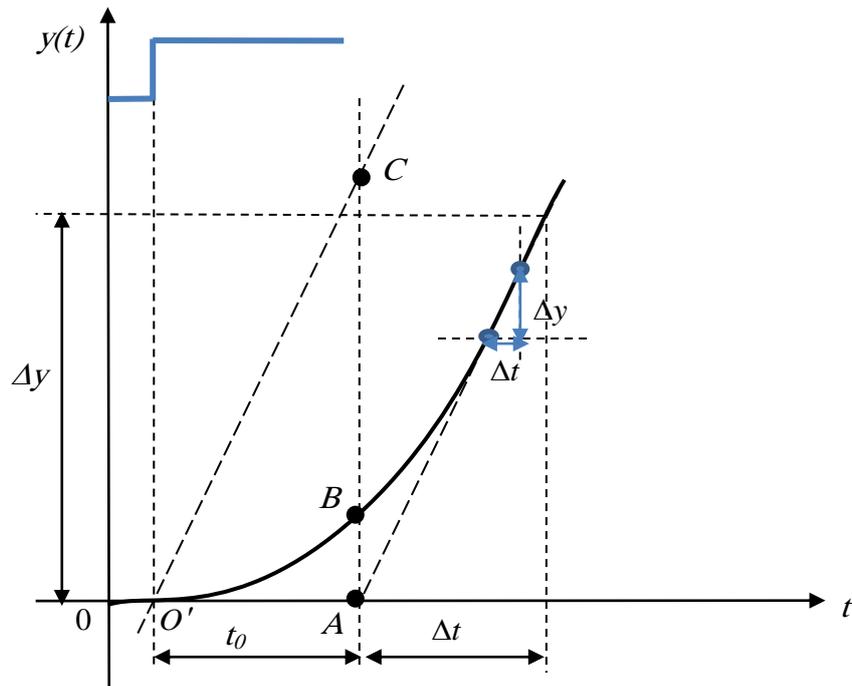
$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s(1+Ts)^n}$$

Les paramètres à identifier sont

- Le gain statique K
- La constante de temps T
- Le retard τ
- L'ordre du système n

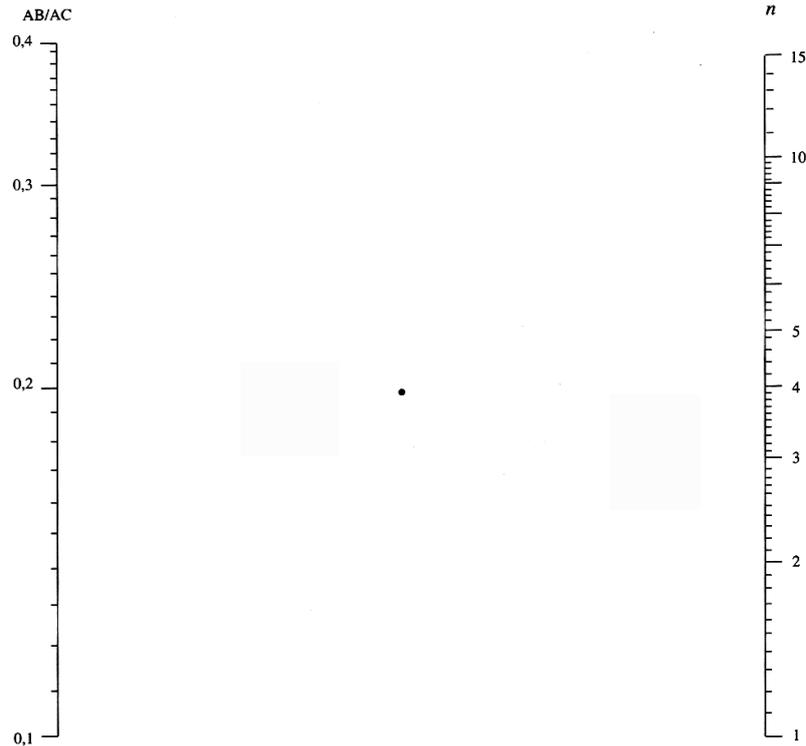
Le protocole de détermination des paramètres est le suivant :

- 1- Tracer la droite correspondant au régime permanent, celle-ci coupe l'axe des abscisses des temps en A
- 2- Tracer la parallèle de cette droite passant par le point O' (soit la fin du retard naturel).
- 3- Enfin, tracer la perpendiculaire en A à l'axe des temps (l'abscisses), celle-ci coupe la réponse en B et la parallèle en C.



Réponse $Y(t)$ du système intégrateur suite à un échelon Du :

- 4- Déterminer la pente de l'asymptote (relever Δy et Δt et calculer la pente)
 - Calculer le gain dynamique $K = \frac{\alpha}{\Delta u}$ avec α est la pente de la droite $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta t}$.
- 5- Relever le temps t_0 (intersection de l'asymptote oblique et de l'axe horizontal).
- 6- Placer les points A, B et C et calculer AB / AC
- 7- Tracer sur le nomogramme la droite passant par AB/AC et le point central.
- 8- Relever l'ordre n (ordre fractionnaire).
- 9- Calculer la constante du temps : $T = \frac{t_0}{n}$
- 10- Le temps de retard τ est calculé comme suit : Calculer T à partir de $\tau = (A-0) - nT$



⚡ Ordre entier :

Le protocole de détermination des paramètres est le suivant :

- 1- Placer les points A , B et C et calculer AB/AC
- 2- Tracer sur le nomogramme la droite passant par AB/AC et le point central.
- 3- Relever l'ordre n' (ordre fractionnaire)
L'ordre n est l'entier directement inférieur à n'
- 4- Calculer la constante de temps : $T = \frac{t_0}{n}$
- 5- Le temps de retard τ est calculé comme suit : $\tau = (n' - n)T$

Remarque : Pour le calcul de l'ordre du système n , on peut utiliser d'autre méthode (voir le tableau ci-dessous)

n	$\frac{AB}{AC}$
1	0.368
2	0.271
3	0.224
4	0.195
5	0.175

Identification à partir de la réponse indicielle du système du 1er ordre retardé ou du second ordre non résonnant

- Méthode de Broïda

1. Principe de la méthode :

La méthode de Broïda consiste à assimiler le procédé régulé à un système du premier ordre avec retard dont la fonction de transfert est :

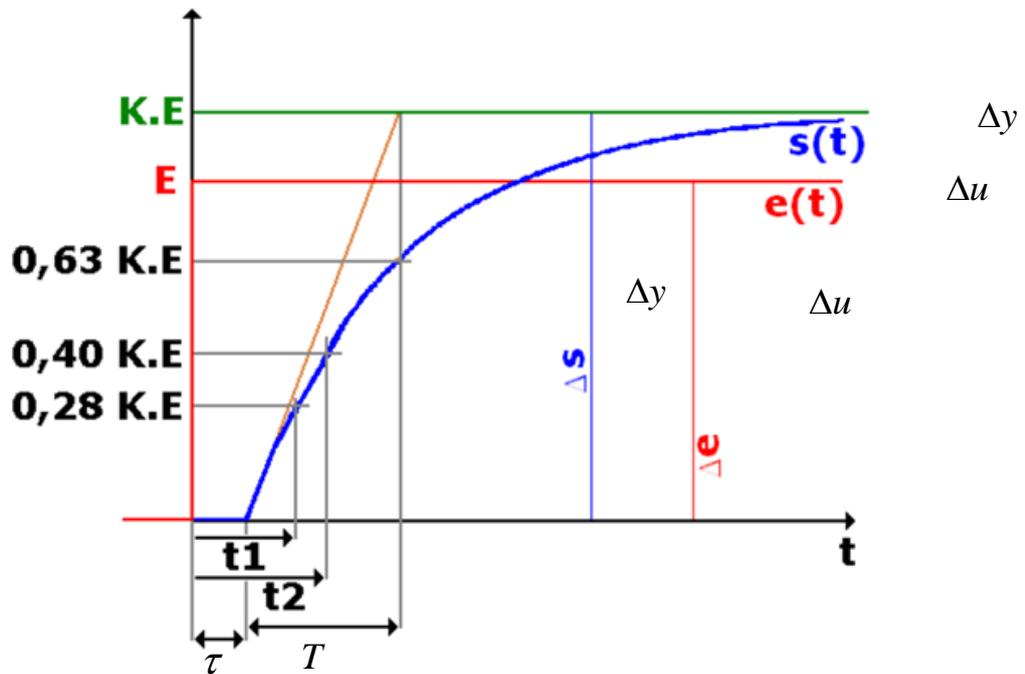
$$H(s) = K \frac{e^{-\tau s}}{1+Ts}$$

Les paramètres à identifier sont

- Le gain statique K
- La constante de temps T
- Le retard τ

Cette méthode a simplifié la méthode de Strejc en passant d'un ordre n à un 1^{er} ordre. Il a estimé que :

- La tangente au point d'inflexion était une source d'erreur importante
- La durée des essais pouvait être longue sur les systèmes lents avec le risque d'avoir une entrée qui varie pendant l'essai.
- Il a alors montré par l'expérience qu'une réponse d'un premier ordre coupe toujours celle d'un ordre supérieure en 2 points situés de part et d'autre du point d'inflexion.
- Il a choisi deux points assez éloignés pour que la coïncidence entre les 2 courbes soit significative, mais le dernier point a été pris assez bas de façon à réduire la durée des essais.
- Ses calculs montrent que pour obtenir les temps t_2 et t_1 on prend respectivement pour $y(t)$ les valeurs $0,28KE_0$ et $0,40KE_0$.
- Ensuite, on détermine K de la même façon que précédemment,



Les valeurs de T et de τ sont calculées à partir des relations suivantes :

$$T = 5.55(t_2 - t_1) \quad \text{et} \quad \tau = 2.8t_1 - 1.8t_2$$

Démonstration :

Afin de déterminer des valeurs de ces paramètres, Broïda fait correspondre la réponse indicielle à identifier et la fonction de transfert du 1er ordre affectée d'un retard en deux points t_2 et t_1 d'ordonnées correspondant à 28% et 40% de la valeur finale de la sortie du système (excitée par un échelon l'amplitude E_0) est :

$$G(s) = KE_0 \frac{e^{-\tau s}}{s(1+Ts)} \Rightarrow y(t) = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T}} \right)$$

Il suit de cette hypothèse, on trouve les systèmes d'équation suivants :

$$y_{28}(t) = 0.28KE_0 = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t_1-\tau}{T}} \right) \Rightarrow e^{-\frac{t_1-\tau}{T}} = 0.72 \Rightarrow -\frac{t_1-\tau}{T} = \ln(0.72) = -0.328$$

$$\Rightarrow t_1 - \tau = 0.328T$$

De même

$$y_{40}(t) = 0.4KE_0 = KE_0 \left(1 - e^{-\frac{t_2-\tau}{T}} \right) \Rightarrow e^{-\frac{t_2-\tau}{T}} = 0.6 \Rightarrow -\frac{t_2-\tau}{T} = \ln(0.6) = -0.51$$

$$\Rightarrow t_2 - \tau = 0.51T$$

$$\begin{cases} t_1 - \tau = 0.328T \dots\dots\dots(1) \\ t_2 - \tau = 0.51T \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

Résolvant cette ensemble d'équation,

$$(2) - (1), t_2 - t_1 = 0.182T \Rightarrow T = \frac{1}{0.182}(t_2 - t_1) = 5.55(t_2 - t_1) ,$$

$$T = 5.55(t_2 - t_1)$$

D'autre coté

$$\begin{aligned} \text{de}(1), \tau = t_1 - 0.328T &\Rightarrow \tau = t_1 - 0.328 \times 5.55(t_2 - t_1) \\ &\Rightarrow \tau = t_1 - 1.8(t_2 - t_1) \\ &\Rightarrow \tau = 2.8t_1 - 1.8t_2 \end{aligned}$$

$$\tau = 2.8t_1 - 1.8t_2$$

Résumée (Calcul des paramètres du modèle) :

- La fonction de transfert $H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(1+Ts)}$
- La constante de temps $T = 5.55(t_2 - t_1)$
- Le temps de retard $\tau = 2.8t_1 - 1.8t_2$
- Le gain statique $K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$

Remarque :

1- En pratique, la prise en compte du retard pur est di-cile dans une synthèse de correcteur.

On utilise donc l'approximation suivante :

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{1+Ts} \simeq \frac{K(1-\tau s)}{1+Ts} \simeq \frac{K}{(1+Ts)(1+\tau s)}$$

Cette approximation reste valable jusqu'à la pulsation $\omega = \frac{1}{\tau}$

2- Le modèle de Broïda donne un modèle correct (Modèle optimal) si $T > 4\tau$

3- Selon la valeur du rapport $\frac{\tau}{T}$ on détermine le type de correcteur à utiliser

Rapport / $\tau \backslash T$	Correcteur proposé
0,05 à 0,1	P
0,1 à 0,2	PI
0,2 à 0,5	PID

Une fois que le type de régulateur a été choisi, on se sert du tableau suivant pour déterminer

complètement les paramètres des correcteurs. Avec $BP = \frac{100}{K_r}$

	P	PI série	PI //	PID série	PID //	PID mixte
BP		$\frac{125KT}{\tau}$		$\frac{118KT}{\tau}$	$120KT(\tau+0,4T)$	
K_r		$0,8 \frac{\tau}{KT}$		$0,85 \frac{\tau}{KT}$	$\frac{0,83}{KT(\tau+0,4T)}$	
τ_i	Maxi	τ	$1,25KT$	τ	$\frac{1,3K}{T}$	$\tau+0,4T$
τ_d		0		$0,4 T$	$\frac{0,35\tau}{K}$	$\frac{\tau T}{T+2,5\tau}$

2. Exemple d'application de la méthode de Broïda

On reprend le système suivant dont la fonction de transfert est :

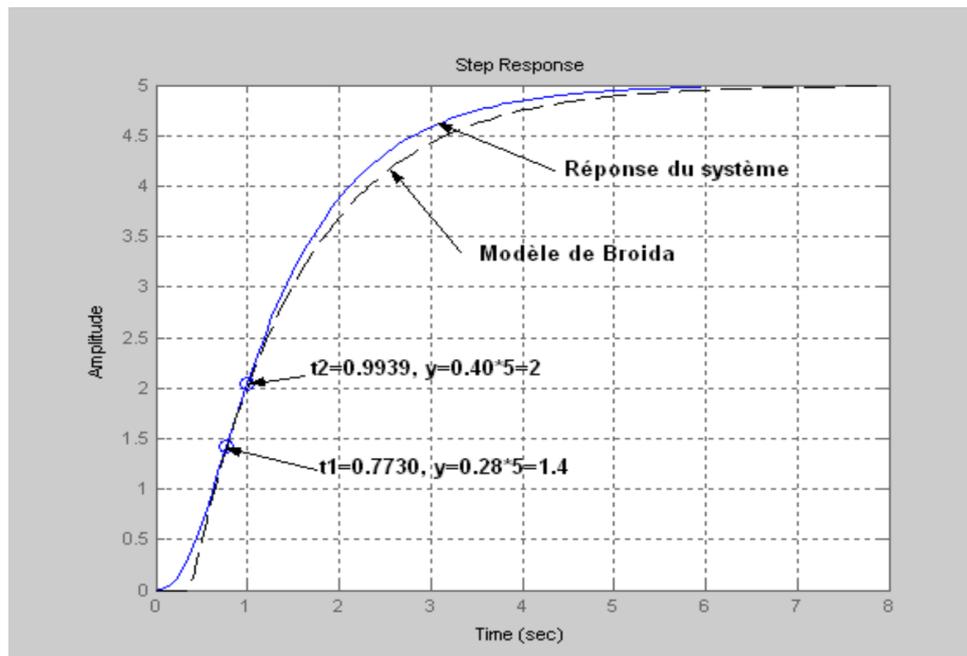
$$H(s) = \frac{100}{(s+1)(s+4)(s+5)}$$

Ce système est excité par un signal échelon unitaire :

Le gain K est déterminé comme dans la méthode de Strejc.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

La méthode de Broïda donne le modèle suivant



- Le gain statique $K = \frac{5}{1} = 5$

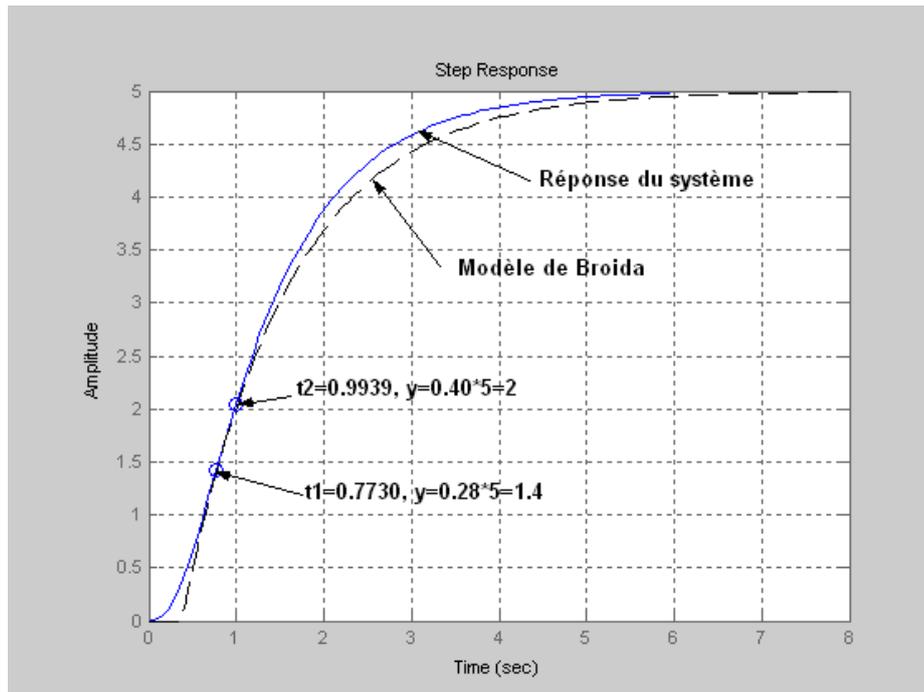
La constante de temps $T = 5.55(t_2 - t_1) = 5.55(0.9939 - 0.7730) = 1.226$

- Le temps de retard $\tau = 2.8t_1 - 1.8t_2 = 2.8 \times 0.7730 - 1.8 \times 0.9939 = 0.3753s$

La fonction de transfert sera donc comme suit :

$$H(s) = \frac{5e^{-0.375s}}{(1 + 1.22s)}$$

On trace les courbes de réponse du système réel et du modèle de Broida et on obtient :



La concordance des deux points d'intersection est bien vérifiée.