TP 01

Identification par la méthode des MC simples et récursives

1- Principe de la méthode de MCS :

Soit x(t) le modèle linéaire par rapport à ses paramètres : $x(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + ... + a_k f_k(t)$

Soit X_n l'ensemble des valeurs prises par le modèle et Y les mesures :

$$X_n = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_1) \\ \dots \\ x(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 f_1(t_1) + a_2 f_2(t_1) + ... + a_k f_k(t_1) \\ y_m(t_2) = a_1 f_1(t_2) + a_2 f_2(t_2) + ... + a_k f_k(t_2) \\ ..... \\ y_m(t_n) = a_1 f_1(t_n) + a_2 f_2(t_n) + ... + a_k f_k(t_n) \end{bmatrix}, Y_n = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_1) \\ \dots \\ y(t_n) \end{bmatrix} \Rightarrow X_n = H_n \theta$$

avec

$$H_n = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_k(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & .... & f_k(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \dots & f_k(t_n) \end{bmatrix} \text{ et } \theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .... \\ a_k \end{bmatrix}$$

- L'erreur quadratique cumulée s'écrit comme suit: $E_Q = (Y_n - H_n \theta)^T (Y_n - H_n \theta)$
- La solution optimale est donnée par : $\hat{\theta} = \left(H_n^T H_n\right)^{-1} H_n^T Y_n$
- L'erreur d'observation : $Y_{obs} = Y_n - H_n \hat{\theta}$

2- Principe de la méthode de MC- récursive :

Ajout de la (n+1)ème mesure :

On dispose de n+1 observations auxquelles correspondent n+1 valeurs du modèle :

$$Y_{n+1} = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_1) \\ \dots \\ y(t_n) \\ y(t_{n+1}) \end{bmatrix} X_{n+1} = H_{n+1} \theta = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_k(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & .... & f_k(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \dots & f_k(t_n) \\ f_1(t_{n+1}) & f_2(t_{n+1}) & .... & f_k(t_{n+1}) \end{bmatrix} \theta$$

On pose $h_{n+1}^T = \left[f_1(t_{n+1}) \quad f_2(t_{n+1}) \quad .... \quad f_k(t_{n+1}) \right]$

On pose $h_{n+1}^T = \left[f_1(t_{n+1}) \quad f_2(t_{n+1}) \quad .... \quad f_k(t_{n+1}) \right]$

On dispose de n+1 observations auxquelles correspondent n+1 valeurs du modèle

$$Y_{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_n \\ y(t_{n+1}) \end{bmatrix}}_{Y_{n+1}},\ X_{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_n \\ x(t_{n+1}) \end{bmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_n \\ h_{n+1}^T(t_{n+1}) \end{bmatrix}}_{H_{n+1}} \theta,$$

Posons $\hat{\theta}_{n+1} = \left(H_{n+1}{}^T H_{n+1}\right)^{-1} H_{n+1}{}^T Y_{n+1}$

- Expression récursive de base (les étapes à suivres):

$$\hat{\theta}_{n+1} = \left(H_{n+1}{}^T H_{n+1}\right)^{-1} H_{n+1}{}^T Y_{n+1}$$

$$\hat{\theta}_{n+1} = \left(H_n^T H_n + h_{n+1} h_{n+1}^T\right)^{-1} \left(H_n^T Y_n + h_{n+1} y_{n+1}\right) = R_{n+1}^{-1} Q_{n+1}$$

- Calcul récursif évolué :

$$K_{n+1} = P_n h_{n+1}\left(1 + h_{n+1}^T P_n h_{n+1}\right)^{-1}$$
$$\hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_n + K_{n+1}\left(y_{n+1} - h_{n+1}^T \hat{\theta}_n\right)$$
$$P_{n+1} = \left(I - K_{n+1} h_{n+1}^T\right) P_n$$

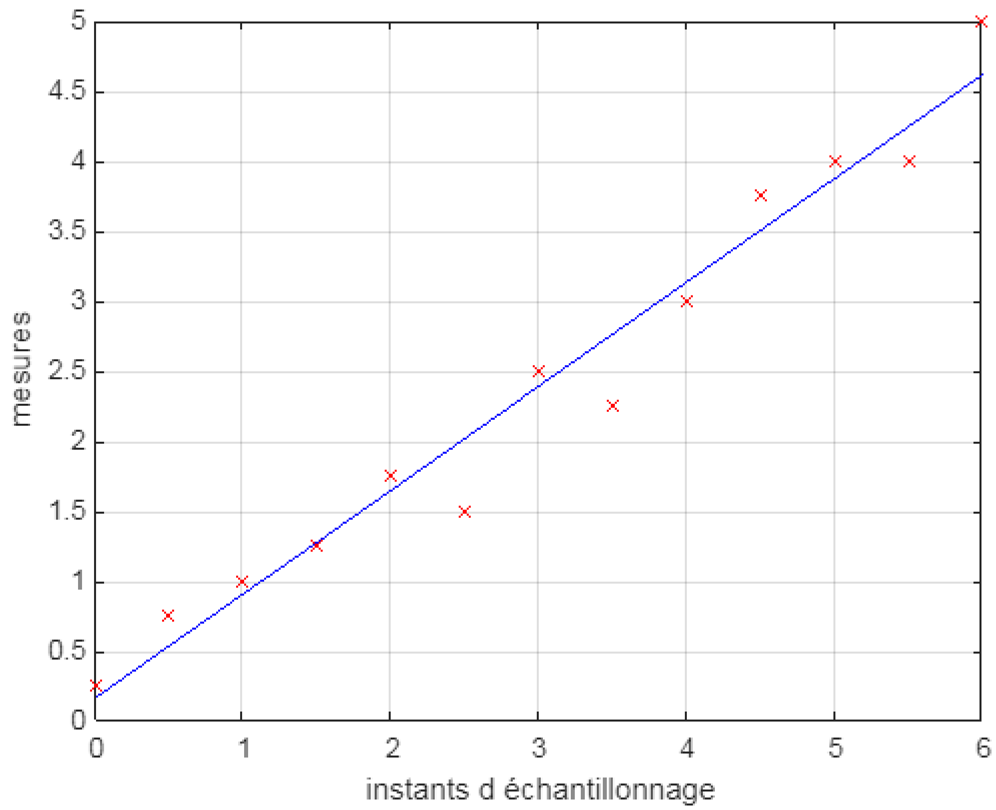
Avec $P_n = \left(H_n{}^T H_n\right)^{-1}$

Travail demandé :

Partie I : Identification par la méthode des MC simples

L'objectif est d'identifier un système par un modèle de la $x(t) = a + bt$ forme en utilisant les MCS

Soit les mesures présentées sur la figure suivante



1) Déterminer les valeurs prises par le modèle pour $t = 0:0.5:10$

2) En déduire les matrices/vecteurs Y , H et $\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

3) Calculer la solution optimale $\hat{\theta} = \left(H_n^T H_n\right)^{-1} H_n^T Y_n$

4) Tracer les mesures et le modèle estimé en fonction de temps (dans la même fenêtre MATLAB)

5) Calculer l'erreur quadratique d'observation : $E_Q = \left(Y_n - H_n\hat{\theta}\right)^T \left(Y_n - H_n\hat{\theta}\right)$

6) Calculer l'erreur d'estimation : $E_{est} = \hat{\theta} - \theta$

7) Interpréter et conclure.

Partie II : Identification par la méthode des MC récursives

On ajoute maintenant une nouvelle mesure, soit $y_{n+1} = 4.75$

1) Calculer le vecteur Y_{n+1} en fonction de Y

2) Calculer le vecteur h_{n+1} puis déduire H_{n+1}

3) Déduire alors le vecteur P_n

4) Calculer $K_{n+1} = P_n h_{n+1}\left(1 + h_{n+1}^T P_n h_{n+1}\right)^{-1}$

5) Déduire alors le nouveau vecteur estimé $\hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_n + K_{n+1}\left(y_{n+1} - h_{n+1}^T \hat{\theta}_n\right)$

6) Tracer les mesures Y_{n+1} et le modèle estimé en fonction de temps $T_{n+1} = 0:0.5:7$ (dans la fenêtre MATLAB)

7) Calculer l'erreur quadratique d'observation : $E_Q = \left(Y_{n+1} - H_{n+1}\hat{\theta}_{n+1}\right)^T \left(Y_{n+1} - H_{n+1}\hat{\theta}_{n+1}\right)$

8) Conclure les résultats