

Républiques Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

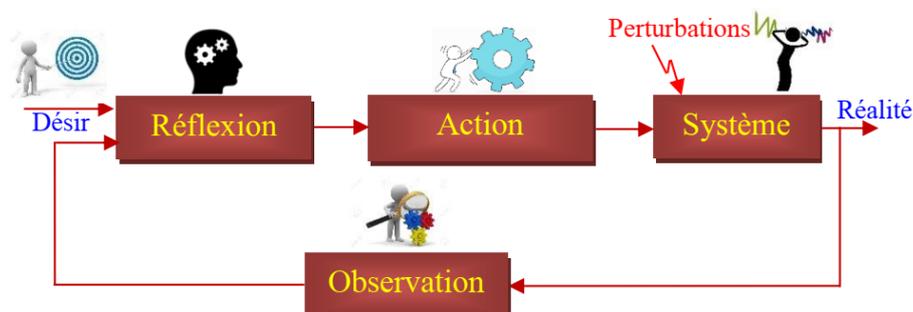
**Université 20 Août 1955 Skikd
Faculté de Technologie
Département de Génie-électrique**



**جامعة 20 أوت سكيكدة
كلية التكنولوجيا
قسم الهندسة الكهربائية**

Systemes Asservis

Licence Électrotechnique (troisième année)



**Dr. BOURAHALA Fayçal
Maitre de conférences classe B**

Année universitaire 2018/2019

Avant-propos

Ce document a été développé pour servir de support au cours de Systèmes Asservis de la licence Électrotechnique de Université 20 août 1955 Skikda et s'adresse principalement aux étudiants de la troisième année. Il détaille notamment la modélisation et l'analyse des systèmes linéaires continus et invariants dans le temps.

Ce document n'a pas été conçu pour être autosuffisant. Ainsi, pour arriver à maîtriser les objectifs visés par le cours il faudrait assurer une présence au cours et un complément de travail. Il permettra au lecteur d'approfondir des aspects qui ne pourront qu'être traités rapidement en cours.

Le cours Systèmes Asservis, vise à la familiarisation des étudiants avec les propriétés des structures de commande des systèmes linéaires continus et l'analyse temporelle et fréquentielle des systèmes de bases (système du 1^{er} et du 2^{ème} ordre). A la fin de ce cours, les étudiants devront :

- Disposer d'une connaissance des définitions et concepts propres aux systèmes linéaires continus ;
- Être capables de se familiariser avec la structure des systèmes de commande (en boucle ouverte et en boucle fermée) et le rôle de chacun des composants dans ces systèmes ;
- Être capables de déterminer les performances statiques et dynamiques d'un système linéaire continu ;
- Être en mesure de connaître les techniques classiques de représentation des systèmes linéaires continus : équation différentielle, fonction de transfert, diagramme fonctionnel et graphe de fluence ;
- Être capables d'analyser les systèmes de bases dans le domaine temporelle et fréquentielle ;
- Être en mesure d'analyser la stabilité d'un système asservi.

Pour le suivi de ce cours, les connaissances préalables souhaitées sont :

Les mathématiques de base (algèbre, calcul intégral et différentiel, nombres complexes, ...), les notions fondamentales de traitement du signal et l'électronique de base (circuits linéaires).

Sommaire

Chapitre I : Introduction aux systèmes asservis

1. Terminologie et définition.....	1
1.1. Concept de systèmes.....	1
1.2. Système statique – Système dynamique.....	4
1.2.1. Système statique (instantané)	4
1.2.2. Système dynamique (à mémoire)	4
1.3. Système linéaire.....	4
1.4. Régime transitoire – Régime permanent.....	5
1.4.1. Le régime transitoire (Régime libre)	5
1.4.2. Le régime permanent (Régime forcé)	5
2. Historique de l’automatique.....	5
3. Notion de Boucle Ouverte/Fermée.....	6
3.1. Système en boucle ouverte.....	6
3.2. Système en boucle fermée (Commande en BF)	8
3.3. Principaux éléments d'une chaîne d'asservissement.....	9
4. Exemples introductifs.....	10
4.1. Asservissement de la température d'une pièce.....	10
4.2. Conducteur au volant d'un véhicule.....	11
5. Raisonnement d’un asservissement.....	12
6. Performances d’un asservissement.....	13

Sommaire

6.1. Stabilité.....	13
6.2. Rapidité.....	13
6.3. Précision.....	14
Exercices sur le chapitre 1.....	15

Chapitre II : Modélisation des systèmes dynamiques linéaires continus

1. Modélisation.....	18
1.1. Modelé de connaissance.....	18
1.2. Modelé de représentation.....	18
2. Représentation des systèmes par leurs équations différentielles.....	19
3. Transformée de Laplace.....	20
3.2. Propriétés fondamentales de la transformée de Laplace (TL)	21
3.3. Transformée de Laplace inverse (Intégrale de Mellin-Fourier)	29
4. De l'équation différentielle à la fonction de transfert.....	34
5. Blocs fonctionnels et sous-systèmes.....	36
6. Règles de simplification.....	38
7. Représentation des systèmes par les graphes de fluence.....	39
8. Règle de Mason.....	41
9. Calcul des fonctions de transfert des systèmes bouclés.....	42
Exercices sur le chapitre 2.....	44

Chapitre III : Réponses temporelles des systèmes linéaires

1. Définition de la réponse d'un système.....	48
1.1. Entrées canoniques.....	48
1.2. Réponses particulières d'un système scalaire.....	50

Sommaire

2. Etude des systèmes du premier ordre.....	51
2.1. Réponse impulsionnelle du système du 1er ordre.....	52
2.1.1. Identification des systèmes du 1er ordre à partir de la réponse impulsionnelle	53
2.2. Réponse indicielle du système du 1er ordre.....	53
2.2.1 : Caractéristiques temporelles du système du 1er ordre.....	54
2.2.2 : Identification des systèmes du 1er ordre à partir de la réponse indicielle.....	55
3. Etude des systèmes de 2ème ordre.....	58
3.1. Réponse impulsionnelle et indicielle du système du 2ème ordre.....	60
3.1.1. Réponse impulsionnelle	61
3.1.2. Réponse indicielle	63
3.2. Caractéristiques temporelles d'un système du 2ème ordre	66
4. Systèmes d'ordre supérieur.....	69
5. Influence des zéros sur l'allure de la réponse indicielle.....	72
Exercices sur le chapitre 3.....	73

Chapitre IV : Réponses fréquentielles des systèmes linéaires

1. Définition	77
2. Diagrammes de BODE (Lieu de Bode)	79
3. Diagrammes de Nyquist (lieu de Nyquist)	82
4. Caractéristiques fréquentielles du système du 1er ordre - Etude harmonique	83
5. Caractéristiques fréquentielles du système du 2ème ordre -(Etude harmonique pour $\xi < 1$)	87
6. Marges de phase et de gain	91
6.1. Marge de phase	91
6.2. Marge de gain	92

Sommaire

Exercices sur le chapitre 4.....	95
Chapitre V : Stabilité et précision des systèmes asservis	
1. Définition	97
2. Condition générale de stabilité (Critère mathématique des pôles)	98
2.1. Stabilité des systèmes en boucle fermée	99
3. Critère algébrique de Routh -Herwitz	100
3.1. Construction du tableau de Routh.....	101
4. Critère du revers dans le plan de Nyquist et de Bode.....	104
4.1. Critère du revers dans le plan de Nyquist	104
4.2. Critère du revers dans le plan de Bode	105
5. Marges de stabilité	105
6. Précision des systèmes asservis	106
Exercices sur le chapitre 5.....	111

Chapitre 1

Introduction aux systèmes asservis

1. Terminologie et définition :

- L'automatique est l'ensemble de théories, de techniques, d'outils ...utilisés pour rendre les systèmes autonomes, indépendants de l'intervention humaine, afin de réduire la fréquence et la difficulté des tâches humaines.
- L'automatique est la discipline scientifique qui, d'une manière générale, traite de la modélisation, l'analyse, la commande, la régulation et la supervision des systèmes dynamiques (objets étudiés). C'est aussi celui de traiter l'information et de prendre des décisions.

✚ **But de l'automatique :** L'automatique a pour objet le contrôle automatique de procédés industriels ou d'appareillage divers dans le but de supprimer ou de faciliter l'intervention humaine.

Importance : Qualité des produits finis, précision des opérations, protection de l'environnement, répétitivité des opérations etc.

✚ **Pourquoi automatiser**

- Augmentation de la fiabilité
- Augmentation de la répétabilité
- Augmentation de la rapidité, des performances en général
- Diminution des coûts
- Garantie de la sécurité de l'opérateur

1.1. Concept de systèmes :

Est un assemblage de composants ou éléments interconnectés afin d'accomplir une fonction ou une tâche donnée. Il possède un ou plusieurs signaux d'entrée exogènes (extérieures au système) et un ou plusieurs signaux de sortie.

On schématise généralement un système par un bloc possédant un ou plusieurs signaux d'entrée exogènes (extérieures au système) et un ou plusieurs signaux de sortie comme suit.

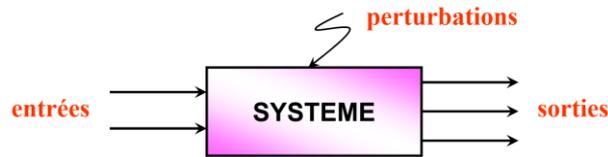


Fig 1.1 : Système

- ✚ **Système monovariabile :** Un système monovariabile possède une seule entrée $u(t)$ et une seule sortie $y(t)$
- ✚ **Système multivariabile :** Un système possédant plusieurs entrées et/ou des sorties est dit multivariabile
 - Les entrées affectant un système sont généralement notées par la lettre u et les sorties par la lettre y .
 - Les entrées d'un système peuvent être modifiées par l'utilisateur pour obtenir la sortie désirée, ce sont les commandes.
 - Les autres entrées ne peuvent être modifiées par l'utilisateur troublants le fonctionnement désiré en sortie. Elles sont définies comme des perturbations, et sont notées d .



Fig. 1.2 : Commandes u et perturbations d

- ✚ **Système Continu :** Un système est dit continu si les variations des grandeurs physiques le caractérisant (les entrées, les sorties, les perturbations...) sont des fonctions continues du type $f(t)$ avec t une variable continue (en générale le temps).
- ✚ **Système échantillonné :** Inversement, si en un endroit au moins de la chaîne des éléments le constituant, le signal n'est transmis qu'à des instants discrets privilégiés, le système sera dit échantillonné. Celui-ci est alors observable aux moments d'échantillonnage.

Nous allons nous intéresser dans ce cours à étudier les systèmes linéaires, continus, invariants dans le temps (systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants).

- ✚ **Système causal :** Un système est causal si la sortie $y(t)$ à un instant t_0 ne dépend que des valeurs de son entrée $u(t)$ pour $t \leq t_0$.
- Pour un **système causal**, la cause précède toujours l'effet, la réponse impulsionnelle ne commence pas avant l'impulsion.
- Un système est un ensemble de relations causales entre des grandeurs d'entrée (causes) et des grandeurs de sortie (effets).
- Pour un signal, cela signifie qu'il est nul pour $t \leq 0$
- Les systèmes physiquement réalisables sont causaux.
- ✚ **Système invariant :** Un système est dit invariant si sa sortie est identique à tout instant, c-à-d une translation du signal d'entrée se traduit par la même translation du signal de sortie (un retard τ ne change pas la sortie du système).

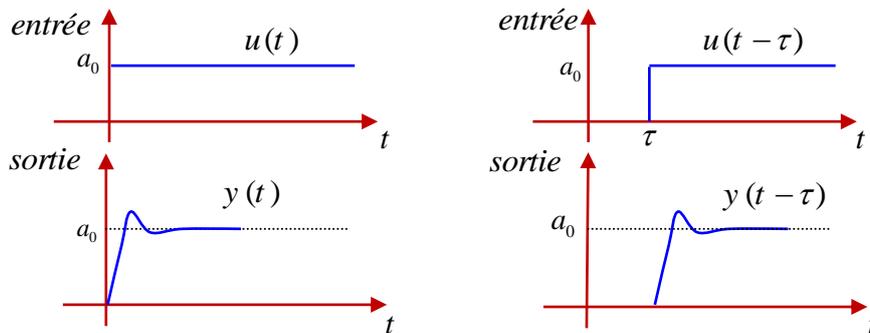


Fig. 1.3 : Système invariant

Exemple 1.1: Il existe plusieurs systèmes électriques invariant dans le temps qui relient une tension de sortie $V_s(t)$ à une tension d'entrée $V_e(t)$.



Fig 1.4 : Système invariant2

Par exemple un circuit RC est un système invariant si l'on suppose que les composants sont stables au cours du temps.

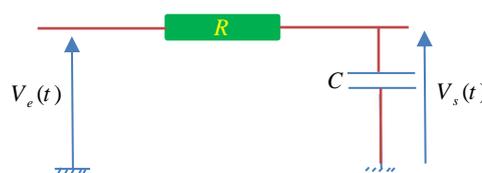


Fig. 1.5 : Circuit RC

1.2. Système statique – Système dynamique :

1.2.1. Système statique (instantané) :

Si la sortie $y(t)$ à un instant donné ne dépend que de l'entrée $u(t)$ à cet instant ($y(t) = ku(t)$) alors le système est dit instantané ou statique, c-à-d la réponse à une excitation est instantanée. Par exemple, une résistance pure R est un système statique car le courant qui la traverse suit la tension appliquée à ses bornes. Entrée et sortie sont liées par une relation simple :

1.2.2. Système dynamique (à mémoire) :

Un système dynamique est un système dont la réponse à une excitation dépend à la fois de celle-ci et de ce qui s'est passé avant.

Considérons le circuit RC de la figure 1.5

Dans ce cas $u(t) = RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$. La relation liant l'entrée $y(t)$ et $u(t)$ est cette fois plus complexe puisque $y(t)$ dépend de $u(t)$ mais aussi d'elle-même (dérivée $\frac{dy(t)}{dt}$). C'est la caractéristique d'un système dynamique.

1.3. Système linéaire :

- Un système linéaire est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants.
- Un système est linéaire s'il obéit au principe de superposition défini par les propriétés de proportionnalité et d'additivité.
- ✚ **La proportionnalité :** La réponse à une amplification du signal d'entrée par un facteur k constant, engendre une amplification de la sortie par un même facteur k . En d'autres termes si $y(t)$ correspond à $u(t)$ alors la réponse à $ku(t)$ est $ky(t)$. On dit qu'il y a proportionnalité de l'effet à la cause.



Fig. 1.6 : La proportionnalité

- ✚ **L'additivité :** Si les entrées $u_1(t), \dots, u_n(t)$ entraînent respectivement les réponses $y_1(t), \dots, y_n(t)$ alors l'entrée $u_1(t) + \dots + u_n(t)$ entraîne la réponse $y_1(t) + \dots + y_n(t)$. (la

sortie correspondante à la somme de plusieurs entrées est égale à la somme correspondant à chacune des entrées).



Fig. 1.7 : L'additivité

- Les deux propriétés précédentes peuvent être étendue à des termes intégraux ou dérivés, donc aux systèmes dynamiques.

1.4. Régime transitoire – Régime permanent :

On distingue deux régimes dans l'évolution de la sortie des systèmes :

1.4.1. Le régime transitoire (Régime libre) :

Il représente l'évolution de la sortie $y(t)$ dans les premiers instants de la réponse et qui disparaît progressivement, il caractérise le comportement dynamique du système.

1.4.2. Le régime permanent (Régime forcé) :

Il correspond à la partie qui subsiste quand le régime transitoire est devenu négligeable, il traduit son comportement statique.

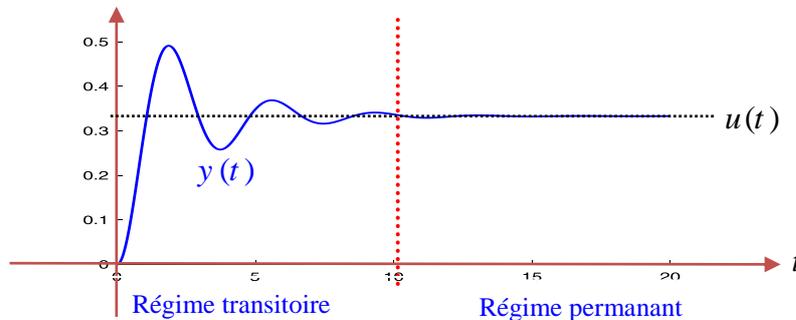


Fig. 1.8: Régime transitoire – Régime permanent

2. Historique de l'automatique :

- **300 avant J.C. :** La première mise en œuvre de système de commande à contre-réaction est l'œuvre des grecs dans l'antiquité avec des régulations de niveau par flotteur afin de mesurer précisément le temps,

- **800 - 1200 :** D'efférents ingénieurs Arabes (Al-Jazari, les trois frères Musa) utilisent des régulateurs à flotteur pour des horloges à eau et autres applications. Durant cette période, le principe de la commande tout ou rien est pour la première fois utilisé,
- **1600 - 1900 :** la révolution industrielle débute réellement avec l'avènement des systèmes de commande à contre-réaction (régulation des moulins à vent 1588 régulation de température 1624, régulation de vitesse d'une machine à vapeur 1769, régulation de pression 1799),
- **1800-1935 :** cette période préclassique de la théorie de la commande fût celle pendant laquelle les principales contributions furent d'ordre mathématique (équations différentielles),
- **1940-1960 :** La deuxième guerre mondiale a joué le rôle de stimulant intellectuel primordial pour le développement des systèmes de commande et a donné naissance à la période dite classique (techniques fréquentielles),
- **1960-1980 :** Période moderne avec le développement de l'industrie aéronautique et spatiale. Les techniques fréquentielles classiques ne suffisent plus et des techniques temporelles appropriées doivent être proposées (commande optimale),
- **1980- ? :** L'introduction des capacités de calcul étendues et l'extension des logiciels de simulation et d'assistance à la conception (Traitement rapide de l'information, possibilité de résolution des systèmes complexes), s'est traduite par la réunification des théories classique et moderne (intelligence artificielle, commande robuste).

3. Notion de Boucle Ouverte/Fermée

On distingue en générale deux structures de système de commande : la commande en boucle ouverte et la commande en boucle fermée appelée également commande à contre-réaction.

3.1. Système en boucle ouverte :

Un système est en boucle ouverte lorsqu'aucune mesure de sortie $y(t)$ n'est utilisée pour élaborer la commande $u(t)$ (ne comporte pas de contre-réaction). Dans ce cas le signal de commande est indépendant du signal de sortie.



Fig. 1.9: Système en boucle ouverte

La commande en boucle ouverte consiste à ajuster la commande directement à partir de la consigne sans tenir compte de la valeur du signal de sortie. Cela nécessite, la connaissance d'un modèle de fonctionnement du système à commander afin de générer les entrées adéquates $u(t)$, par exemple, de sa fonction de transfert $G(p)$. Ainsi, la connaissance d'un modèle de fonctionnement d'un moteur à courant continu permettra de connaître la tension d'entrée qu'il faudra lui appliquer pour obtenir telle ou telle vitesse de rotation.

Exemple 1.2 : L'exemple typique de ce type de commande est constitué par la machine à laver qui fonctionnant sur la base de cycles pré-programmés ne possédant pas d'informations mesurées concernant le degré de propreté du linge. Toutefois, si des perturbations l'affectent (poids ou type du linge, quantité ou qualité de l'eau), le résultat obtenu ne sera pas celui souhaité.

Exemple 1.3 : Prenons l'exemple de l'asservissement de la température $T(t)$ d'une pièce chauffée par des radiateurs de chauffage central.

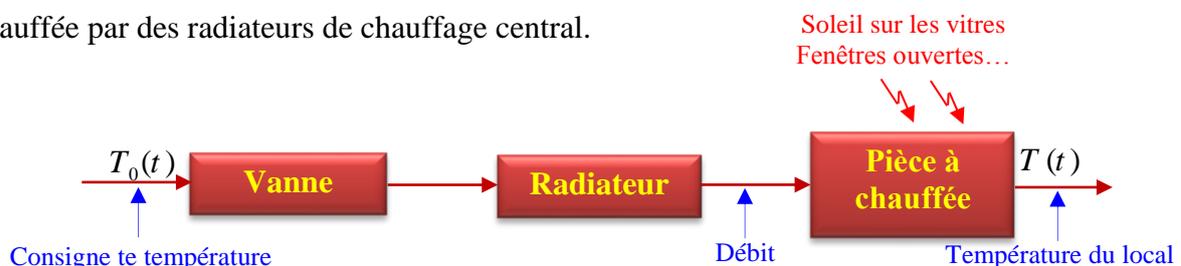


Fig. 1.10: Commande en boucle ouverte de la température d'une pièce à chauffée

Pour agir sur $T(t)$ on fait varier le débit d'eau dans les radiateurs par l'intermédiaire d'une petite vanne. Mais la température dans le local est aussi sensible à la température de l'eau qui circule, à la température extérieure, à l'ouverture d'une porte ou d'une fenêtre, au nombre de personnes qui entrent, etc... Il s'agit d'une commande sans retour d'information de la grandeur de sortie.

Dans les deux exemples précédents, l'élément correcteur est l'homme, c'est lui qui réalise l'asservissement du système en corrigeant l'écart entre la sortie souhaitée et celle obtenue.

✚ Les inconvénients de la boucle ouverte :

- On ne peut pas commander un système qui subisse des problèmes d'instabilité (nous reviendrons plus en détail sur la notion de stabilité lors d'un prochain chapitre).
- Correction difficile : n'ayant aucune information sur la sortie, l'opérateur ne peut élaborer aucune stratégie d'ajustement pour obtenir une sortie possédant la valeur souhaitée avec précision et rapidité.
- Impossible de modifier les performances dynamiques
- Dynamique du système évolue toujours dans le temps (vieillessement)
- Actionneurs sont limités (saturation de la commande)

3.2. Système en boucle fermée (Commande en BF) :

Afin de résoudre les problèmes de la commande en boucle ouverte et d'automatiser le système (supprimer l'action humaine) on introduit une boucle de retour (ou rétroaction). Dans cette stratégie de commande, une mesure de la sortie est utilisée et comparée avec la consigne par le correcteur (Figure. 1.10).

Le principe de commande en boucle fermée est illustré sur la figure suivante et définit la structure de commande à contre-réaction (feedback en anglais). On parle alors de système bouclé (figure 1.11), par opposition aux systèmes en boucle ouverte (figure 1.8).

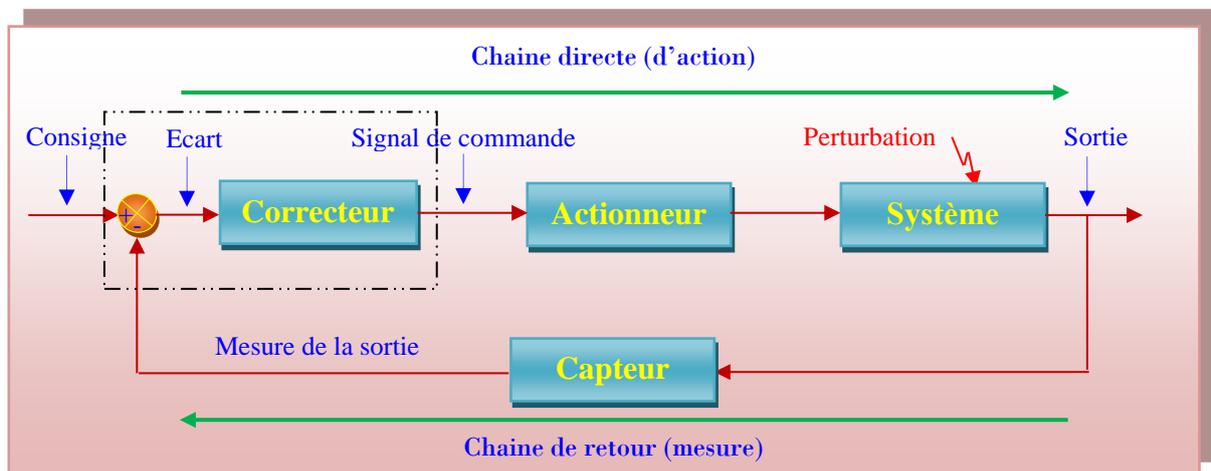


Fig. 1.11: Système en boucle fermée

✚ Nécessité de la boucle fermée :

Le système de commande peut opérer en boucle ouverte à partir du seul signal de consigne. Mais la boucle fermée (contre réaction) est capable de :

- Stabiliser un système instable en BO,

- Compenser les perturbations externes (vent, houle, ...),
- Compenser les incertitudes internes au processus lui-même (modèle imparfait).

3.3. Principaux éléments d'une chaîne d'asservissement :

La structure de la commande en boucle fermée est représentée par le schéma fonctionnel de la figure 1.11:

Ce schéma fonctionnel représente la structure de base qu'on trouve dans tous les systèmes asservis ou régulés. Elle est composée principalement d'une chaîne d'action et celle de retour ou d'information.

- ✚ **La chaîne d'action :** englobe tous les organes de puissance (nécessitant un apport extérieur d'énergie) et qui exécute le travail.
- ✚ **La chaîne de retour ou de mesure :** Analyse et mesure le travail effectué et transmet au comparateur une grandeur physique proportionnelle à ce travail. Elle comprend généralement un capteur qui donne une mesure de la sortie, qui est ensuite amplifiée et transformée avant d'être utilisée.

La chaîne de commande en boucle fermée comprend :

- **Comparateur :** Compare en permanence ce que l'on obtient à ce que l'on souhaite obtenir en sortie (élabore l'écart $\varepsilon(t) = w(t) - y_m(t)$).
- **Régulateur :** Le régulateur se compose d'un comparateur qui détermine l'écart entre la consigne et la mesure et d'un correcteur qui élabore à partir du signal d'erreur l'ordre de commande destiné à diminuer l'écart $\varepsilon(t)$.
- **Actionneur :** Il reçoit du régulateur le signal de commande et agit directement sur le système à commander. Il représente le "muscle" qui va piloter l'évolution du système (par exemple : amplificateur de puissance, moteur, vérin, vanne, etc ...). C'est l'organe d'action qui apporte l'énergie au système pour produire l'effet souhaité.
- **Processus :** C'est l'installation à asservir
- **Capteur :** Organe de mesure qui forme une image aussi fidèle que possible de la grandeur réglée (brute) $y(t)$ et la transforme en un signal compréhensible par le comparateur (le plus souvent électrique). La précision et la rapidité sont deux caractéristiques importantes du capteur.

Les principaux signaux dans une chaîne de commande en boucle fermée sont :

- **Consigne (Grandeur de commande) $w(t)$** : Signal à poursuivre généralement déterministe, elle correspond à la valeur souhaitée en sortie (grandeur de commande).
- **Écart ou erreur $\varepsilon(t)$** : Représente la différence entre la consigne et la sortie. Cette mesure ne peut être réalisée que sur des grandeurs comparables, on la réalisera donc en général en la consigne et la mesure de la sortie.
- **Commande $u(t)$** : Signal délivré par le régulateur au système à régler. Ce signal doit normalement tendre à faire diminuer l'erreur.
- **Perturbation $d(t)$** : On appelle perturbation tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la sortie. Un système asservi doit pouvoir maintenir la sortie à son niveau indépendamment des perturbations.
- **Bruit sur la mesure $n(t)$** : Signal aléatoire représentant le bruit intervenant sur la mesure.
- **Grandeur réglée brute (grandeur commandée) $y(t)$** : Grandeur physique réglée représentant le phénomène physique que doit asservir le système de commande. Seule une image peut en être obtenue par l'intermédiaire d'un capteur.
- **Grandeur réglée mesurée $y_m(t)$** : Image de la grandeur réglée brute $y(t)$. C'est la seule information dont dispose le régulateur, lequel asservit donc en réalité la grandeur réglée mesurée $y_m(t)$ et non directement la grandeur réglée brute $y(t)$. C'est pourquoi la qualité de la mesure (capteur et traitement lui étant associés) est primordiale en automatique.

A cet effet, on peut définir un **asservissement (système asservi)** comme un système asservi dit suiveur, c'est la consigne qui varie. Exemple : une machine-outil qui doit usiner une pièce selon un profil donné, un missile qui poursuit une cible, pilotage automatique d'un avion. Son fonctionnement tend à annuler l'écart entre une grandeur commandée (la sortie $y(t)$) et une grandeur de commande (la consigne $w(t)$).

4. Exemples introductifs

4.1. Asservissement de la température d'une pièce :

On peut représenter graphiquement le principe de la commande de température par un schéma fonctionnel qui peut ainsi prendre la forme de la figure 1.12 :

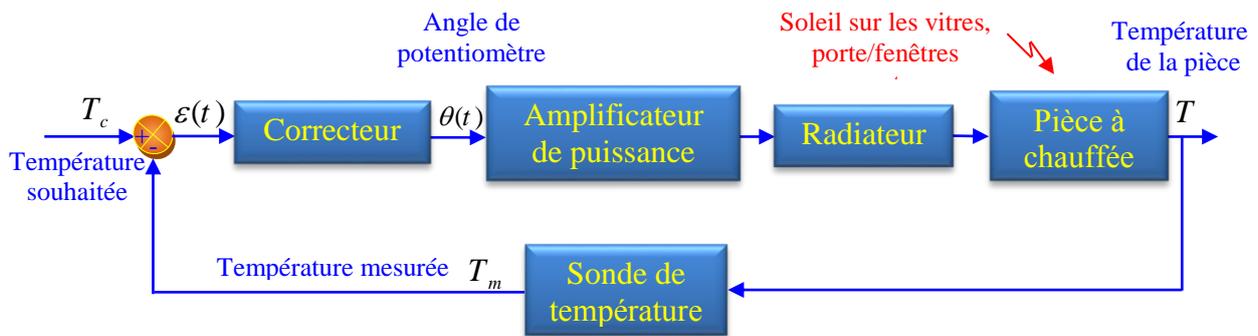
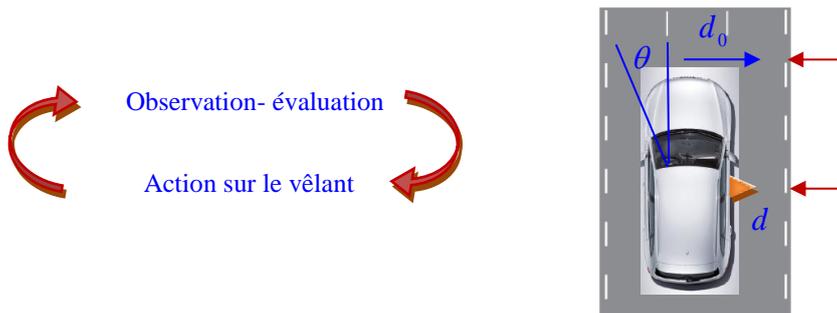


Fig.1.12: Asservissement de la température d'une pièce

La température souhaitée représente la consigne (fixée par l'utilisateur) est comparée à la valeur mesurée par la sonde de température (Thermomètre).

Le régulateur délivre un signal de commande en fonction de la valeur et du signe de l'écart entre la valeur souhaitée et la température de la pièce, soit de chauffer si la température de la pièce est inférieure à la température de consigne, soit d'arrêter de chauffer si la température de consigne est atteinte (c'est le principe du thermostat).

4.2. Conducteur au volant d'un véhicule :



Le conducteur doit suivre la route en se fixant pour objectif de laisser une distance d_0 entre le véhicule et le bord de la route schématisé par un trait (consigne). Pour se faire, il observe la route et son environnement et évalue la distance qui sépare son véhicule du bord de la route. Il détermine en fonction de sa position actuelle l'angle qu'il doit donner au volant pour maintenir son objectif pendant toute la durée du déplacement. Si un coup de vent dévie le véhicule (perturbation), le conducteur agit pour s'opposer à cette perturbation.

Graphiquement, le schéma fonctionnel peut prendre la forme de la figure suivante :

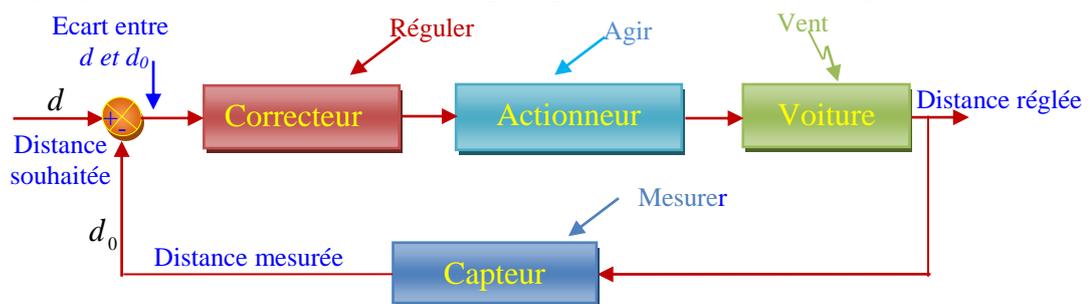


Fig. 1.13: Conduite d'un véhicule.

5. Raisonnement d'un asservissement

La notion de commande en boucle fermée fait partie de la vie quotidienne : se déplacer dans une pièce, conduire une voiture, ranger un objet dans une armoire, etc. Tous ces petits gestes de la vie quotidienne font intervenir un capteur (la vue, le toucher) qui informent notre cerveau de la situation réelle. Ce dernier compare en permanence la situation observée avec la situation souhaitée (la consigne) et commande nos muscles (les organes de commande), pour tenter de rapprocher la situation réelle de celle qui est désirée.

Exemple 1.4 : Quand nous écrivons sur une feuille de papier, la consigne est de suivre le trait droit tracé. Essayez d'écrire droit en fermant les yeux !

Exemple 1.5 : La maman qui remplit la mini-baignoire du bébé trempe son coude dans l'eau pour obtenir un mélange eau chaude - eau froide correspondant à une consigne qu'elle s'est fixée. On peut imaginer le drame si elle remplit la baignoire « en boucle ouverte » et qu'elle y plonge d'un coup le bébé !

Exemple 1.6 : Quand nous préparons une sauce, la consigne est d'obtenir la saveur souhaitée. Si on ne goûte pas, c'est raté !

L'asservissement remplace l'homme dans diverses tâches. Pour se faire, l'adaptation de la démarche de raisonnement en trois phases : observation, réflexion et action est nécessaire.

Graphiquement, le schéma fonctionnel peut prendre la forme de la suivante :

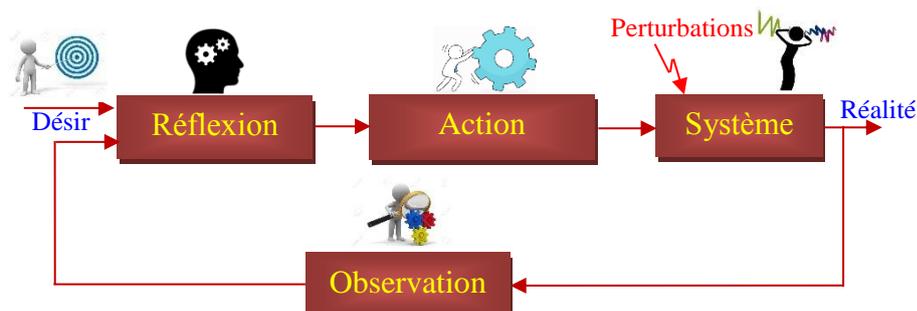


Fig. 1.14: Asservissement et comportement humain

❖ Régulation et asservissement :

- **Régulation :** On appelle régulation un système asservi qui doit maintenir l'erreur ε entre l'entrée u et la sortie y nulle, quelles que soient les perturbations, la grandeur d'entrée u restant constante ou variant par palier (Régulation de température par exemple).

- **Asservissement :** On appelle asservissement un système asservi qui doit maintenir l'erreur ε nulle ou minimale quelles que soient les variations de u (consigne variable ou suit une grandeur physique indépendante du système lui-même).

6. Performances d'un asservissement :

Tout système asservi ou régulé doit posséder des performances. Celles-ci peuvent être résumées en trois points : la stabilité, la rapidité et précision.

6.1. Stabilité :

- On dit qu'un système est stable si pour une entrée (consigne) bornée en amplitude, tous les autres signaux sont aussi bornés en amplitude quelles que soient les perturbations.
- Un système est stable au voisinage d'un point (trajectoire), lorsque de faibles perturbations entraînent de faibles écarts par rapport à ce point (trajectoire).

Les courbes 1 et 2 de la figure 1.15 sont caractéristiques d'un asservissement stable. En effet, pour une entrée constante, la sortie évolue et se stabilise à une valeur finale constante. La courbe 3 est caractéristique d'un asservissement instable : la sortie diverge. Une boucle instable est une boucle inutilisable.

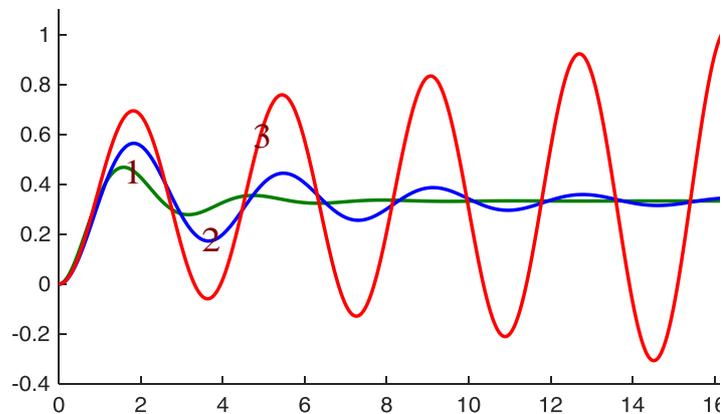


Fig. 1.15: Systèmes stables/instables

6.2. Rapidité :

✚ La rapidité d'un système asservi est déterminée par la durée de son régime transitoire, que l'on caractérise par son temps de réponse à un pourcentage donné, à une entrée en échelon. On utilise fréquemment le temps de réponse à 5% (le temps que met la réponse indiciale du système pour ne plus sortir d'un intervalle de $\pm 5\%$ autour de sa réponse finale).

Plus le temps de réponse est faible, plus l'asservissement est dit rapide. Plus la réponse indicielle converge vite vers la valeur finale, le système est plus rapide.

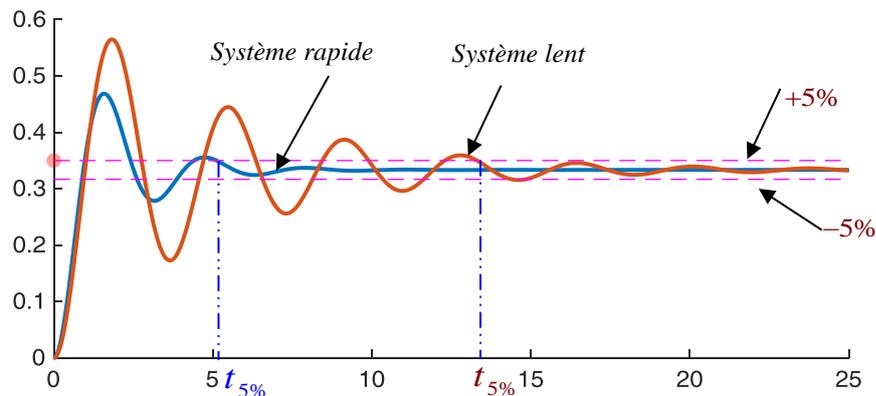


Fig. 1.16: Système rapide/lent

6.3. Précision :

La précision est caractérisée à chaque instant par l'écart $\varepsilon(t)$ entre la consigne $w(t)$ et la sortie $y(t)$. Plus l'écart entre ces grandeurs est petit, plus l'asservissement est précis. On distingue deux types de précision :

- ✚ **Précision dynamique :** Elle dépend de l'évolution de $\varepsilon(t)$ (erreur pendant le régime transitoire du système). Un écart transitoire apparaît à chaque changement de consigne ou suite à une perturbation.
- ✚ **Précision statique :** Elle caractérise l'erreur statique (erreur pendant le régime permanent du système). L'erreur permanente est donnée par : $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(t)$ (Théorème de la valeur finale).

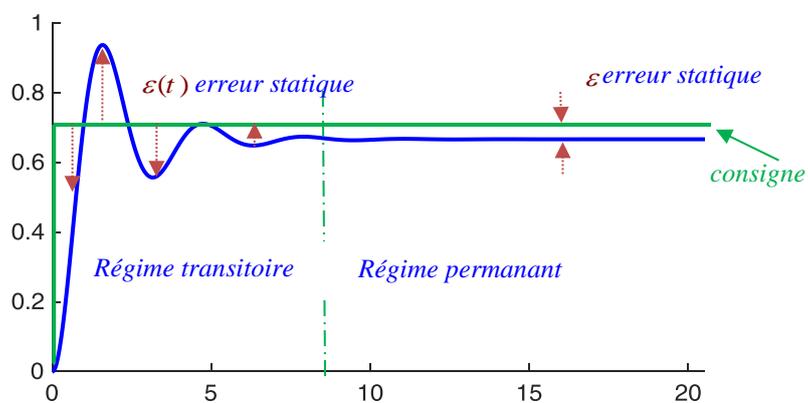


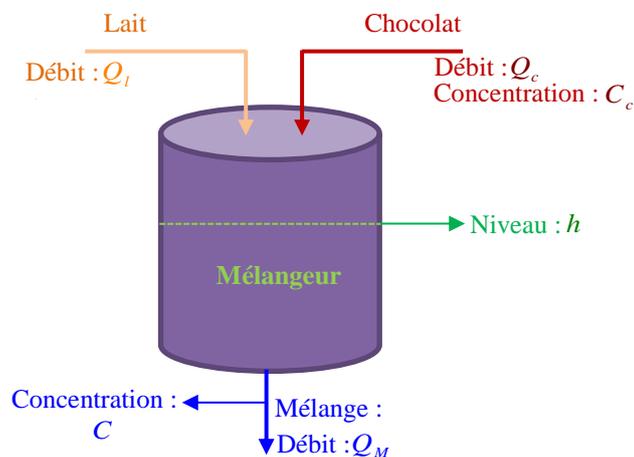
Fig.1.17: Erreur statique/dynamique

Exercices sur le chapitre 1

Exercice 1 : Mélangeur de lait et de chocolat :

Afin de fabriquer industriellement du lait chocolaté, on mélange du chocolat à du lait. On souhaite contrôler la qualité du mélange obtenu à partir d'une analyse donnant la concentration en chocolat. Le niveau permet de connaître le volume dans le mélangeur.

- Les grandeurs à maîtriser sont le niveau h et la concentration C .
- Les grandeurs qui agissent sur le niveau h sont le débit de lait Q_l , le débit de chocolat Q_c et le débit du mélange Q_M .
- Les grandeurs qui agissent sur la concentration du mélange C sont le débit de lait Q_l , le débit de chocolat Q_c et la concentration du chocolat C_c .



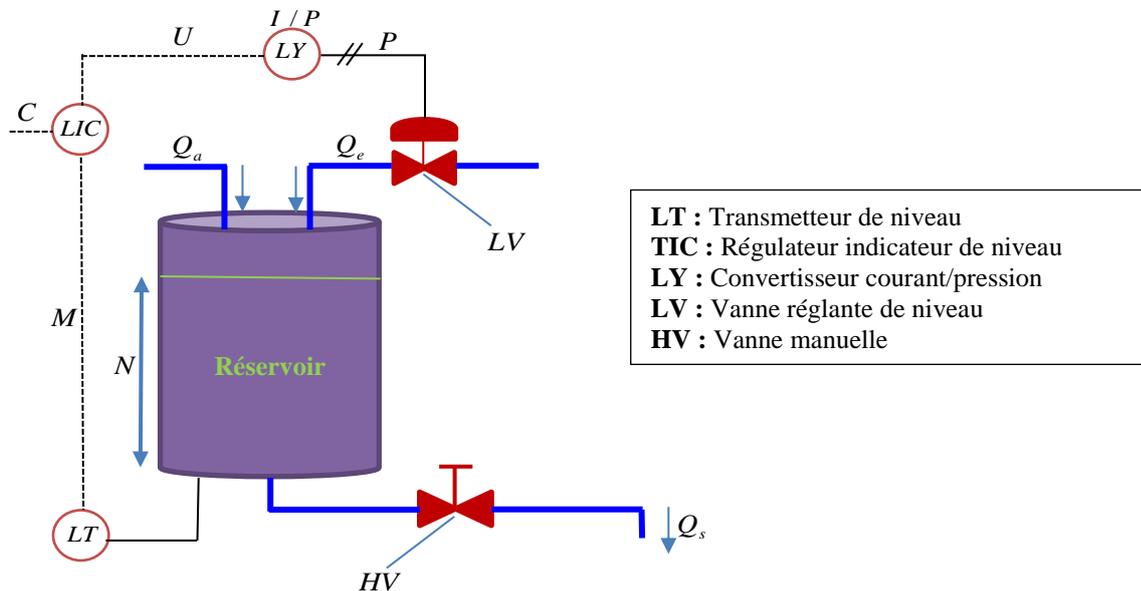
Mélange de lait et de chocol

1) Quel type de commande s'agit-il ? (Commande en boucle ouverte ou en boucle fermée), justifier votre réponse ?.

2) Déterminer le schéma fonctionnel du système

Exercice 2 : Régulation de niveau d'un réservoir d'une installation de dilution de sirop :

Le schéma d'une installation de dilution de sirop est représenté sur la figure suivante :



Le but est de maintenir le niveau N constant dans le réservoir pour assurer un débit de sortie constant Q_s , réglé par une ouverture fixée d'une vanne manuelle HV , le débit de produit recyclé Q_a n'étant pas constant puisqu'il provient d'une recyclage du produit.

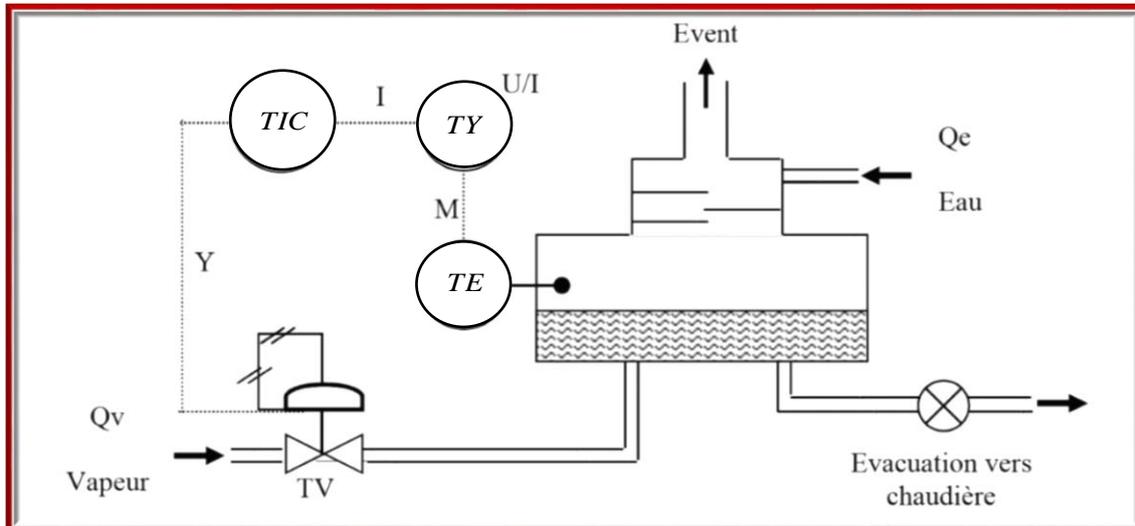
1) Etablir le schéma fonctionnel de ce procédé en incluant les perturbations

Exercice 3 : Régulation de température d'un dégazeur thermique

Un dégazeur est utilisé pour réduire la concentration en oxygène (O_2), et en gaz carbonique (CO_2) dans l'eau. Il est utilisé pour le traitement de l'eau d'appoint des chaudières industrielles. La diminution des taux d'oxygène et du gaz carbonique réduit les risques de corrosion. L'élimination se fait par création d'une atmosphère privée de ces gaz à la surface intime de l'eau de ruissellement. De plus, la propriété des gaz d'être d'autant moins solubles que la pression est faible et la température est élevée, est utilisée. Pour cela, l'eau contenue dans le dégazeur est maintenue à une légère pression (0.3 à 0.7 bar) et à la température d'évaporation correspondante (107 à 115 °C). Elle se trouve ainsi en légère ébullition (vaporisation). Le

mélange de vapeur et du gaz cédé par l'eau d'alimentation, est évacué à l'atmosphère par un évent, au fur et à mesure qu'il se forme.

La figure suivante représente le schéma de régulation de la température réglée en agissant sur le débit de vapeur.



Dégazeur thermique

TE : Sonde pour la mesure de température

TY : Module permettant de convertir un signal tension en signal courant

TIC : Régulateur industriel et indicateur (afficheur des grandeurs)

TV : Vanne de réglage de débit équipé d'un positionneur électro-pneumatique

I : signal courant normalisé 4 – 20 mA

Y : signal de commande normalisé 4 – 20 mA

- 1) Indiquer la principale source de perturbation justifiant la nécessité de faire la régulation
- 2) Etablir le schéma fonctionnel de la régulation de niveau

Chapitre 2

Modélisation des systèmes dynamiques linéaires continus

1. Modélisation :

- Ensemble des procédures permettant d'obtenir un modèle
- Modéliser un système → définir un modèle mathématique qui représente la relation entre les signaux d'entrée et les signaux de sortie.
- À l'aide de ce modèle mathématique, il est possible de prédire le comportement du système. On peut distinguer deux sortes de modèle :

1.1. Modelé de connaissance : Ce modèle est caractérisé par :

- Obtenu sur la base des lois physiques, économiques etc..,
- Difficultés de décrire fidèlement les phénomènes complexes,
- Utilisation des hypothèses simplificatrices,
- Dilemme- précision-simplicité,
- Les paramètres ont un sens physique.

1.2. Modelé de représentation : Ce modèle est caractérisé par :

- Modèle déterminé à partir de données expérimentales (données entrée-sortie),
- Modèle approché plus simple, mais suffisant pour donner une bonne idée du comportement dynamique du système
- Système "boite noire",
- Paramètres du modèle n'ont aucun sens physique.

Quand le système étudié est complexe, l'écriture des lois physique régissant le système devienne difficile. Dans ce cas, on cherchera un modèle de représentation permettant de modéliser le fonctionnement de système étudié.

2. Représentation des systèmes par leurs équations différentielles :

On représente classiquement l'évolution d'un système dynamique (linéaire et continu monovarié) par une équation différentielle à coefficients constants liant les grandeurs d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ de la manière suivante :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

avec

- Les coefficients a_i et b_i sont des constantes réelles.
- n et m sont des entiers positifs tels que $m \leq n$ pour que le système soit causal; n est l'ordre du système;

La solution de cette équation représente l'évolution de la sortie du système $y(t)$ au cours du temps en fonction de l'entrée $u(t)$ et de conditions initiales.

Exemple 2.1 : Considérons le circuit RC suivant

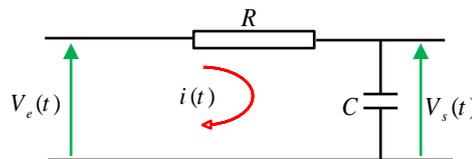


Fig.2.1 : Circuit RC

Pour des conditions initiales nulles (système au repos à l'origine), les lois de la physique régissant le comportement de ce système électrique conduisent aux équations suivantes

$$V_e(t) = Ri(t) + V_s(t) \tag{1}$$

Avec

$$V_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt \text{ or } i(t) = C \frac{dV_s(t)}{dt}$$

$$RC \frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t) = V_e(t)$$

Exemple 2.2: Considérons le circuit RLC suivant :

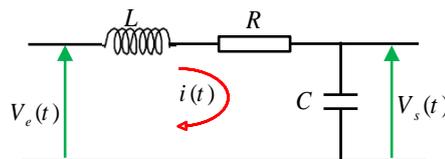


Fig.2.2 : Circuit RLC

On veut déterminer la relation liant la tension d'alimentation $V_e(t)$ et la tension $V_s(t)$.

Pour des conditions initiales nulles, les équations électriques nous donnent:

$$V_e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + V_s(t)$$

$$V_s(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt \text{ or } i(t) = C \frac{d}{dt} V_s(t)$$

On obtient alors une équation différentielle reliant l'entrée à la sortie

$$LC \frac{d^2 V_s(t)}{dt^2} + RC \frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t) = V_e(t)$$

Exemple 2.3 : il s'agit de modéliser un mouvement d'une roue par rapport au châssis par l'intermédiaire d'un amortisseur et un ressort. Ce système peut être représenté par une masse reliée en série à un ressort et un amortisseur monté en parallèle.

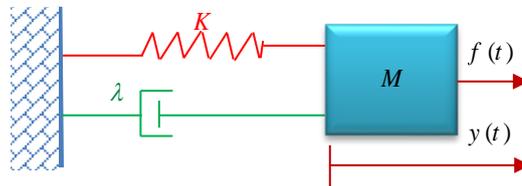


Fig.2.3 : système masse- ressort- amortisseur

On note $f(t)$ la force exercée sur la masse M et $y(t)$ la position de cette masse par rapport à l'équilibre. En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur la masse M soumise à l'action du ressort ($-Ky(t)$), de l'amortisseur ($-\lambda \frac{dy(t)}{dt}$) et à la force $f(t)$, on obtient l'équation suivante:

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \lambda \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t)$$

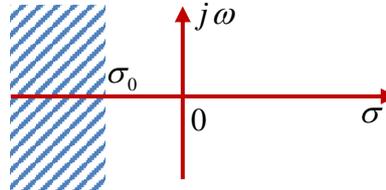
3. Transformée de Laplace :

La transformée de Laplace est une méthode de résolution algébrique des équations différentielle. En effet, il s'agit d'un outil mathématique qui transforme une équation différentielle, posée dans le domaine réel du temps, en une équation algébrique, plus simple, dans le domaine de la variable complexe $p = \sigma + j\omega$, dite *variable symbolique*.

Définition : Soit $f(t)$ une fonction causale d'une variable réelle t , définie pour $t > 0$. On appelle transformée de Laplace de $f(t)$, et l'on note $\mathcal{L}[f(t)]$, la fonction de la variable complexe $p = \sigma + j\omega$, $\omega = 2\pi f$ suivante :

$$\mathcal{L} [f(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt ,$$

Remarque 2.1 : $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$ ($F(p)$ existe si l'intégral existe). Généralement cette intégrale est absolument et uniformément convergente quand la partie réelle de p est supérieure à une valeur donnée σ_0 appelée seuil de convergence de l'intégrale (*).



La partie suivante est un rappel sur la transformée de Laplace et quelques-unes de ses propriétés les plus utilisées

Exemple 2.4 (Fonction amortie) : la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{-at}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [f(t)] = F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} dt \\ &= -\frac{1}{p+a} e^{-(p+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p+a} \end{aligned}$$

3.2. Propriétés fondamentales de la transformée de Laplace (TL) :

Les principales propriétés de la transformée de Laplace sont :

✚ **Linéarité :** Soient λ_1 et λ_2 deux constantes, $f_1(t)$, $f_2(t)$ deux fonctions causales et $F_1(p)$, $F_2(p)$ sa transformées de Laplace respectivement, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)] &= \mathcal{L} \lambda_1 [f_1(t)] + \mathcal{L} \lambda_2 [f_2(t)] \\ &= \lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p) \end{aligned}$$

✚ **Démonstration :**

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)] &= \int_0^{\infty} \lambda_1 f_1(t) e^{-pt} dt + \int_0^{\infty} \lambda_2 f_2(t) e^{-pt} dt \\ &= \lambda_1 \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-pt} dt + \lambda_2 \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-pt} dt \\ &= \lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p) \end{aligned}$$

✚ **Dérivation temporelle :** On montre que

$$\mathcal{L} (f'(t)) = pF(p) - f(0)$$

✚ Démonstration :

On a $\mathcal{L} [f(t)] = F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$

En utilisant l'intégration par partie, on aura :

$u = f(t)$	$dv = e^{-pt} dt$
$du = f'(t) dt$	$v = -e^{-pt} / p$

Or $uv' = (uv)' - vu' \Rightarrow \int uv' = uv - \int vu'$

$$\begin{aligned}
 F(p) &= \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} f(t) \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt \\
 &= \frac{f(0)}{p} + \frac{1}{p} F(f'(t)) \\
 &\Rightarrow F(f'(t)) = pF(p) - f(0)
 \end{aligned}$$

D'une manière générale, on peut écrire :

$$\text{On a } \mathcal{L} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = p^n F(p) - \sum_{k=n+1}^{2n} \left(p^{2n-k} \frac{d^{k-n-1} f(0)}{dt^{k-n-1}} \right)$$

Par exemple $\mathcal{L} \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = p^2 F(p) - pF(0) - f'(0)$

Remarque 2.2 : Si les conditions initiales sont nulles, ce qui est à priori très souvent le cas, on peut retenir simplement les relations suivantes :

$$\mathcal{L} [f'(t)] = pF(p) ; \mathcal{L} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] = p^n F(p)$$

✚ Intégration par rapport au temps : Soit $P(t)$ une primitive d'une fonction

$f(t) (P(t) = \int f(t) dt)$ et $F(p)$ sa transformée de Laplace.

$$\mathcal{L} [P(t)] = F(P(t)) = \frac{F(p)}{p} + \frac{P(0)}{p}$$

• Démonstration :

On a $\mathcal{L} [P(t)] = \int_0^\infty P(t) e^{-pt} dt$

En utilisant l'intégration par partie, on aura :

$$u = P(t) \qquad dv = e^{-pt} dt$$

$du = P'(t)dt$	$v = -e^{-pt}/p$
----------------	------------------

Or $uv' = (uv)' - vu' \Rightarrow \int uv' = uv - \int vu'$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [P(t)] &= \int_0^\infty P(t)e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} P(t) \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty P'(t)e^{-pt} dt \\ &= \frac{P(0)}{p} + \frac{1}{p} \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \\ \Rightarrow \mathcal{L} [P(t)] &= \frac{1}{p} \mathcal{L} [f(t)] + \frac{P(0)}{p} = \frac{F(p)}{p} + \frac{P(0)}{p} \end{aligned}$$

Dans le cas général, et si en supposant que toutes les primitives de $f(t)$ sont nulles pour $t \rightarrow 0$, par valeurs positives, on trouve,

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt^n \right] = \frac{1}{p^n} \mathcal{L} [f(t)] = \frac{F(p)}{p^n}$$

✚ **Changement d'échelle des temps :** Un changement de l'échelle des temps se traduit par le changement de la variable $t \rightarrow kt$ ou $t \rightarrow \frac{t}{k}$ dans la fonction $f(t)$

$$\mathcal{L} [f(kt)] = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right); \quad \mathcal{L} \left[f\left(\frac{t}{k}\right) \right] = kF(p)$$

• **Démonstration :**

On a $\mathcal{L} [f(kt)] = \int_0^\infty f(kt)e^{-pt} dt$

On fait le changement de variable suivant :

On pose $u = kt \Rightarrow du = kdt \Rightarrow dt = \frac{du}{k}$

Donc on aura, $\mathcal{L} [f(kt)] = \frac{1}{k} \int_0^\infty f(u)e^{-\frac{p}{k}u} du = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$

De même, on trouve que

$$\mathcal{L} \left[f\left(\frac{t}{k}\right) \right] = kF(kp)$$

✚ **Multiplication par t :**

$$\mathcal{L} [-tf(t)] = \frac{dF(p)}{dp}$$

• **Démonstration :**

On calcul $\frac{dF(p)}{dp}$ comme suit ;

$$\begin{aligned} \frac{dF(p)}{dp} &= \frac{d}{dp} \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right) = \int_0^{\infty} f(t) \frac{d}{dp} (e^{-pt}) dt = \int_0^{\infty} f(t) (-t) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{\infty} -t f(t) e^{-pt} dt = \mathcal{L} [-t f(t)] \end{aligned}$$

Et plus généralement $\mathcal{L} [-t^n f(t)] = \frac{d^n F(p)}{dp^n}$

✚ **Multiplication par une fonction exponentielle :**

$$\mathcal{L} [e^{-at} f(t)] = F(p+a)$$

• **Démonstration :**

On a
$$\begin{aligned} \mathcal{L} [e^{-at} f(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p+a)t} dt \\ &= F(p+a) \end{aligned}$$

❖ **Théorèmes relatifs à la Transformée de Laplace :**

✚ **Théorème du retard- Translation :** Considérons la fonction $f(t - \tau)$ (la fonction $f(t)$ à laquelle on a fait subir un changement d'origine de temps, autrement dit, un retard d'un temps τ .

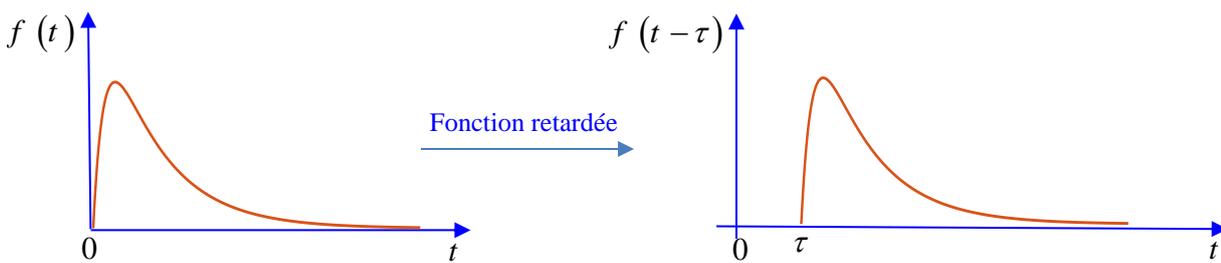


Fig2.4 : Représentation temporelle d'une fonction retardée

On prouve que

$$\mathcal{L} [f(t - \tau)] = e^{-p\tau} F(p) \text{ pour tout } \tau > 0$$

• **Démonstration :**

On a
$$\mathcal{L} [f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \text{ pour } t \geq 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} [f(t - \tau)] = \int_0^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt \text{ pour } t \geq \tau$$

Effectuant dans cette intégrale le changement de variable suivant :

$u = t - \tau \Rightarrow t = u + \tau$ et $dt = du$, on trouve alors,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt &= \int_0^{\infty} f(u) e^{-p(u+\tau)} du = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(u) e^{-pu} du \\ &= e^{-p\tau} F(p) \end{aligned}$$

✚ **Théorème de la valeur initiale :**

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow \infty} (pF(p)) \text{ si la limite existe}$$

• **Démonstration :**

On a $\mathcal{L}[f'(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt$ pour $t \geq 0$

En utilisant la transformée de Laplace de la dérivée, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0) \\ \Rightarrow \mathcal{L} \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt \right) &= \lim_{p \rightarrow \infty} (pF(p) - f(0)) \end{aligned}$$

Nous retiendrons $\lim_{p \rightarrow \infty} (pF(p)) = f(0)$

✚ **Théorème de la valeur finale :**

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (pF(p)) \text{ si la limite existe}$$

• **Démonstration :**

On a $\mathcal{L}[f'(t)] = F(p) = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt$ pour $t \geq 0$

De même que le cas précédent, en utilisant la transformée de Laplace de la dérivée, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0) \\ \Rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} \left(\int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt \right) &= \lim_{p \rightarrow 0} (pF(p) - f(0)) \\ \Rightarrow f(t) \Big|_0^{\infty} &= \lim_{p \rightarrow 0} (pF(p)) - f(0) \\ \Rightarrow f(\infty) - f(0) &= \lim_{p \rightarrow 0} (pF(p)) - f(0) \end{aligned}$$

Nous retiendrons $\lim_{p \rightarrow 0} (pF(p)) = f(\infty)$

✚ **Théorème de Duhamel (ou de Borel) - Intégrale de convolution :** Le produit de convolution de deux fonction f et g continues et causales est donné par :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad \forall t \geq 0$$

Soit à démontrer que :

$$\mathcal{L} [f(t) * g(t)] = \mathcal{L} \left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \right] = F(p).G(p) \quad \forall t \geq 0$$

• **Démonstration :**

On a $\mathcal{L} [f(t) * g(t)] = \int_0^\infty (f(t) * g(t))e^{-pt} dt$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \right) e^{-pt} dt \\ &= \int \int_x f(t-\tau)g(\tau)e^{-pt} d\tau dt \\ &= \int \int_x f(t-\tau)g(\tau)e^{-p(t-\tau)}e^{-p\tau} dt d\tau \end{aligned}$$

Et puisque $f(t-\tau) = 0$ pour $t < \tau$, nous aurons alors ;

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [f(t) * g(t)] &= \int_0^\infty \int_\tau^\infty f(t-\tau)g(\tau)e^{-p(t-\tau)}e^{-p\tau} dt d\tau \\ &= \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty f(t-\tau)g(\tau)e^{-p(t-\tau)} dt \right) e^{-p\tau} d\tau \\ &= \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-p(t-\tau)} dt \right) g(\tau)e^{-p\tau} d\tau \end{aligned}$$

Posons $u = t - \tau \Rightarrow dt = du$ les bornes d'intégrale deviennent alors

$t = \tau \Rightarrow u = 0$ et $t \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [f(t) * g(t)] &= \int_0^\infty \underbrace{\left(\int_0^\infty f(u)e^{-pu} du \right)}_{F(p)} g(\tau)e^{-p\tau} d\tau \\ &= \int_0^\infty F(p)g(\tau)e^{-p\tau} d\tau \\ &= F(p) \underbrace{\int_0^\infty g(\tau)e^{-p\tau} d\tau}_{G(p)} \end{aligned}$$

On trouve finalement que $\mathcal{L} [f(t) * g(t)] = F(p)G(p)$

❖ **Transformée de Laplace de quelques signaux usuels :**

✚ **Echelon unité :**

L'échelon unité est la fonction $u(t)$ définie par $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$

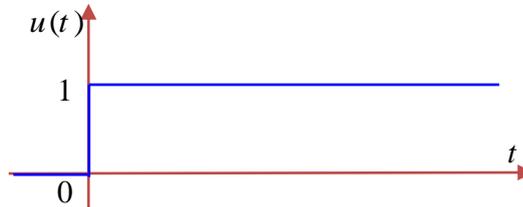


Fig2.5 : Fonction échelon unité

Par définition $\mathcal{L} [u(t)] = \int_0^{\infty} u(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p}e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}$

$$\mathcal{L} [u(t)] = \frac{1}{p}$$

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, toute échelon (non unitaire) d'amplitude A , aura pour transformée de Laplace

$$\mathcal{L} [Au(t)] = \frac{A}{p}$$

✚ **Impulsion de Dirac :**

Il s'agit en théorie d'une fonction nulle pour tout t sauf pour $t = 0$ où elle a une valeur infinie (∞). L'aire comprise entre la courbe représentative de cette fonction $\delta(t)$ et l'axe des abscisses t vaut 1. Le schéma de la figure suivante représente cette fonction en faisant tendre le paramètre T .

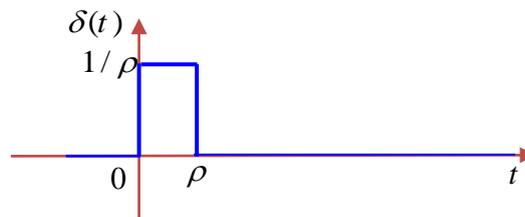


Fig2.6 : Fonction impulsion de Dirac

Par définition $\mathcal{L} [\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-pt} dt = \int_0^T \frac{1}{T}e^{-pt} dt = -\frac{1}{Tp}e^{-pt} \Big|_0^T = \frac{1}{Tp}(1 - e^{-pT})$

L'impulsion de Dirac est l'impulsion unité avec $T \rightarrow 0$ par conséquent l'amplitude $\frac{1}{T} \rightarrow \infty$.

On trouve alors que $\mathcal{L} [\delta(t)] = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{1}{Tp}(1 - e^{-pT}) \right) = 1$

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, toute impulsion de type $A\delta(t)$, aura pour transformée de Laplace $\mathcal{L}[A\delta(t)] = A$

✚ **Rampe ou échelon de vitesse :**

elle est définie comme suit :

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ t & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

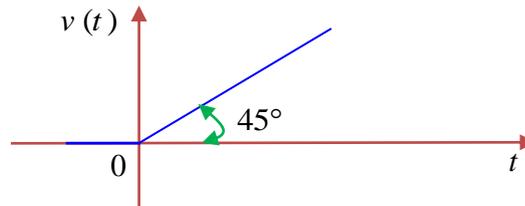


Fig2.7 : Fonction rampe unité

Il, s'agit en réalité de l'intégrale de la fonction échelon $u(t)$.

Par définition $v(t) = tu(t)$

En utilisant de propriété de la fonction dérivée

$$\mathcal{L}[v(t)] = \mathcal{L}\left[\int u(t)\right] = \frac{U(p)}{p} + \frac{v(0)}{p} \text{ avec } v(0) = 0$$

$$\mathcal{L}[v(t)] = \frac{1}{p^2}$$

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, toute rampe de type $v(t) = At$, aura

pour transformée de Laplace $\mathcal{L}[Av(t)] = \frac{A}{p^2}$

✚ **Signal sinusoïdal $\sin(\alpha t), \cos(\alpha t)$:**

On peut écrire la relation suivante :

$$\cos(\alpha t) + j \sin(\alpha t) = e^{j\alpha t}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\cos(\alpha t) + j \sin(\alpha t)] = \mathcal{L}[e^{j\alpha t}]$$

Donc la transformée de Laplace du signal $e^{j\alpha t}$ se calcule comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{j\alpha t}] &= \frac{1}{p - j\omega} = \frac{p - j\omega}{(p - j\omega)(p + j\omega)} \\ &= \frac{p - j\omega}{p^2 + \omega^2} \\ &= \frac{p}{p^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$\mathcal{L} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] = \frac{p}{p^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

En utilisant la propriété de la linéarité on trouve

$$\mathcal{L} [\cos(\omega t)] = \frac{p}{p^2 + \omega^2} ; \mathcal{L} [\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

3.3. Transformée de Laplace inverse (Intégrale de Mellin-Fourier):

De même qu'une fonction de temps peut avoir une transformée de Laplace, il est possible à partir d'une fonction $F(p)$ de trouver son originale, autrement dit, la transformation de Laplace inverse consiste à rechercher la fonction temporelle $f(t)$ qui correspond à une fonction $F(p)$ donnée. Il s'agit ici de calculer une intégrale dans le plan complexe comme suit :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt} dp$$

où c est une constante, appelée abscisse de convergence

Cette méthode est difficile à utiliser et on préfère généralement :

- Décomposer $F(p)$ en termes de fonctions simples de p de premier et de deuxième espèce : cette méthode, qui s'applique dans le cas, fréquent où $F(p)$ se présente sous la forme d'une fonction fractionnelle.
- Recourir aux tables de Transformées de Laplace. Dans ce cas, $F(p)$ est immédiatement reconnaissable dans la table (voir à la fin de ce chapitre).

✚ **Propriété de Linéarité :**

Si $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(p)]$ et $f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(p)]$ alors;

$$\mathcal{L}^{-1}[\lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p)] = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^{tes}$$

- ❖ **Transformée inverse par décomposition en éléments simples :** La transformée de Laplace $F(p)$ peut être décomposée en une somme de fonctions fractions rationnelles simples sous la forme suivante

$$F(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 + a_0} = \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}$$

où $m \leq n$ et z_i sont les zéros et p_i les pôles de $F(p)$. On distingue en général trois cas selon la nature des pôles :

✚ **Pôles réels et distincts :** Si les pôles sont réels et distincts, on peut représenter $F(p)$ par :

$$F(p) = \frac{C_1}{p + p_1} + \frac{C_2}{p + p_2} + \dots + \frac{C_n}{p + p_n}$$

avec $C_i = (p + p_i) F(p) \Big|_{p=-p_i}$

C_i : Constante appelée " résidu au pôle $p = -p_i$ "

En utilisant la propriété de la linéarité de la transformée inverse de Laplace, on peut prendre la transformée inverse de chacun des termes pour obtenir la fonction originale $f(t)$ comme suit:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_1}{p + p_1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_2}{p + p_2}\right] + \dots + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_n}{p + p_n}\right]$$

Chaque terme est la transformée d'une exponentielle $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C_i}{p + p_i}\right] = C_i e^{-p_i t}$, finalement :

$$f(t) = (C_1 e^{-p_1 t} + C_2 e^{-p_2 t} + \dots + C_n e^{-p_n t}) u(t)$$

Exemple 2.5 : Calculer la transformée de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ de la fonction suivante:

$$F(p) = \frac{p + 1}{p^2 + 5p + 6}$$

Solution :

- Mettre le dénominateur sous forme de produit : $F(p) = \frac{p + 1}{p^2 + 5p + 6} = \frac{p + 1}{(p + 2)(p + 3)}$

- Puis décomposer en éléments simples (): $F(p) = \frac{C_1}{p + 2} + \frac{C_2}{p + 3}$

- Ensuite, on calcul les résidus : $\begin{cases} C_1 = (p+2)F(p)|_{p=-2} = -1 \\ C_2 = (p+3)F(p)|_{p=-3} = 2 \end{cases} \Rightarrow F(p) = \frac{-1}{p+2} + \frac{2}{p+3}$
- Exprimer la solution dans le domaine temporel : $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = (-e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$ pour $t \geq 0$ (à ne pas oublier).

✚ Pôles complexes et distincts : Dans le cas d'une pôle complexe, il est possible de raisonner comme dans le cas des pôles réelles mais cela fait apparaître des coefficients complexes. Il est préférable de ne travailler qu'avec des coefficients réels. Pour cela, on réalisera la décomposition en gardant les polynômes du second ordre au dénominateur :

Exemple 2.6 : Calculer la transformée de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ de la fonction suivante:

$$F(p) = \frac{p+4}{p(p^2+2p+6)}$$

Solution : La décomposition de $F(p)$ se fait de la manière suivante :

$$F(p) = \frac{p+4}{p(p^2+2p+6)} = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2p+C_3}{p^2+2p+6}$$

On remarque que le polynôme p^2+2p+6 n'a pas des solutions réelles, alors de préférence on utilise la méthode d'identification pour calculer les coefficients C_1, C_2 et C_3 comme suit.

$$F(p) = \frac{p+4}{p(p^2+2p+6)} = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2p+C_3}{p^2+2p+6} = \frac{(C_1+C_2)p^2 + (2C_1+C_3)p + 6C_1}{p(p^2+2p+6)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (C_1+C_2) = 0 \\ (2C_1+C_3) = 1 \\ 6C_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \left(C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = -\frac{2}{3}, C_3 = -\frac{1}{3} \right)$$

Il vient alors : $F(p) = \frac{2/3}{p} - \frac{2/3p+1/3}{p^2+2p+6} = \frac{2/3}{p} - \frac{2/3p}{(p+1)^2+5} - \frac{1/3}{(p+1)^2+5}$

Ou encore $F(p) = \frac{2/3}{p} - \frac{2}{3} \frac{p}{(p+1)^2+(\sqrt{5})^2} - \frac{1}{3\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{(p+1)^2+(\sqrt{5})^2}$

Or $\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\mathcal{L}[\cos(\omega t)] = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(p+a)$

alors l'original donne $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}e^{-t} \cos(\sqrt{5}t) - \frac{1}{3\sqrt{5}}e^{-t} \sin(\sqrt{5}t) \right) u(t)$

✚ **Pôles réels et multiples :** Dans le cas de pôles réelles multiples, la décomposition en fractions simples de la racine multiple est la somme des fractions simples des puissances décroissantes. Dans le cas où un de ces pôles se répète k fois, on peut représenter $F(p)$ comme suit :

$$F(p) = \frac{C_k}{(p + p_i)^k} + \frac{C_{k-1}}{(p + p_i)^{k-1}} + \dots + \frac{C_1}{p + p_i} + \frac{D_n}{p + p_n} + \frac{D_{n-1}}{p + p_{n-1}} + \dots + \frac{D_1}{p + p_i}$$

Avec

- Cas des pôles simples : $D_n = (p + p_n) F(p) \Big|_{p=-p_n}$
- Cas des pôles multiples : $C_{k-i} = \frac{1}{i!} \left(\frac{d^i}{dp^i} (p + p_i)^k F(p) \right) \Big|_{p=-p_i} \quad (i = 0, \dots, k-1)$

Exemple 2.7 : Calculer la transformée de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ de la fonction suivante:

$$F(p) = \frac{5p + 16}{(p + 2)^2 (p + 5)}$$

Solution : Dans ce cas $F(p)$ possède un pôle simple ($p = -5$) et un autre multiple ($p = -2$)

la décomposition en fractions simples s'écrit :

$$F(p) = \frac{5p + 16}{(p + 2)^2 (p + 5)} = \frac{C_2}{(p + 2)^2} + \frac{C_1}{(p + 2)} + \frac{D_1}{(p + 5)}$$

avec

$$C_2 = \frac{1}{0!} (p + 2)^2 F(p) \Big|_{p=-2} = 2$$

$$C_1 = \frac{1}{1!} \left(\frac{d}{dp} (p + 2)^2 F(p) \right) \Big|_{p=-2} = \frac{d}{dp} \left(\frac{5p + 16}{(p + 5)} \right) \Big|_{p=-2} = \frac{9}{(p + 5)^2} \Big|_{p=-2} = 1$$

$$D_1 = (p + 5) F(p) \Big|_{p=-5} = -1$$

$$F(p) = \frac{2}{(p+2)^2} + \frac{1}{(p+2)} - \frac{1}{(p+5)}$$

En utilisant la table de transformée de Laplace, on obtient aussitôt :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = (2te^{-2t} + e^{-2t} - e^{-5t})u(t) \text{ pour } t \geq 0$$

✚ Table de transformée de Laplace :

Le tableau 1.1 présente la liste des transformées de Laplace les plus courantes.

$F(p)$	$f(t) \ t \geq 0$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Échelon unitaire $u(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe unitaire $tu(t)$	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at} , $a = C^{te}$	$\frac{k}{p+a}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^n}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$sh(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$ch(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$

$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \sin(\varphi) + \omega \cos(\varphi)}{p^2 + \omega^2}$
$\frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)$

4. De l'équation différentielle à la fonction de transfert :

Soit un système dynamique à temps continu de signal d'entrée $u(t)$ et de signal de sortie $y(t)$, tous deux liés par une équation différentielle ordinaire linéaire

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

Si nous appliquons la transformation de Laplace (le théorème de la dérivation) aux deux membres de cette équation, où on transforme séparément chaque terme et on effectue l'addition à la fin tout en supposant nulles les différentes conditions initiales avec $U(p) = \mathcal{L}[u(t)]$ et $Y(p) = \mathcal{L}[y(t)]$, il vient :

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) Y(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) U(p)$$

D'où

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Cette fraction rationnelle de deux polynômes de la variable complexe p est appelée fonction de transfert du système et communément notée :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

C'est-à-dire le rapport des transformées de Laplace de la sortie et de la transformée de Laplace de son entrée lorsque toutes les conditions initiales sont nulles :

Comme cette fonction est une fraction rationnelle de deux polynômes en p , il est possible de factoriser ces deux polynômes dans le corps des complexes. On obtient

$$G(p) = \frac{b_m (p - z_m)(p - z_{m-1}) \dots (p - z_1)}{a_n (p - p_n)(p - p_{n-1}) \dots (p - p_1)} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

avec

- Les zéros z_m du système sont les valeurs de p qui annulent le numérateur $N(p)$
- Les pôles p_n du système sont les valeurs de p qui annulent le dénominateur $D(p)$.
- Un système qui possède un pôle $p = 0$ est dit intégrateur.
- Un système qui possède un zéro $p = 0$ est dit dérivateur.
- Le facteur constant $\frac{b_m}{a_n}$ est appelé gain statique du système
- $D(p) = 0$ est l'équation caractéristique.
- n est l'ordre du système

On peut alors représenter le système sous la forme graphique ci-dessous :



Fig 2.8 : Diagramme fonctionnel d'une fonction de transfert

Exemple 2.8 : Fonction de transfert du circuit RLC

Nous avons rencontré dans l'exemple 2.2 l'équation différentielle exprimant la relation entre la tension de sortie $V_s(t)$ d'un circuit RLC et la tension d'entrée $V_e(t)$.

$$LC \frac{d^2 V_s(t)}{dt^2} + RC \frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t) = V_e(t)$$

Appliquons la transformation de Laplace aux deux membres de cette équation en supposant les conditions initiales toutes nulles et en posant $V_e(p) = \mathcal{L}[V_e(t)]$ et $V_s(p) = \mathcal{L}[V_s(t)]$

$$LCp^2 V_s(p) + RCp V_s(p) + V_s(p) = V_e(p)$$

Soit

$$(LCp^2 + RCp + 1)V_s(p) = V_e(p)$$

La fonction de transfert du circuit RLC est donc

$$G(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

Exemple 2.9 : Fonction de transfert du système masse-ressort-amortisseur

La fonction de transfert représentant ce système s'écrit :

$$M \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \lambda \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t)$$

De la même manière que le système précédent, on trouve

$$(Mp^2 + \lambda p + K)Y(p) = F(p)$$

Ce qui donne la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + K}$$

5. Blocs fonctionnels et sous-systèmes :

La représentation par le schéma fonctionnel, appelé aussi diagramme fonctionnel, permet de représenter de manière graphique un système physique. C'est un moyen à la fois utile et commode pour représenter les relations fonctionnelles entre les différents organes d'un système de commande.

Un diagramme fonctionnel est composé quatre types d'éléments :

- **Bloc :** Possède une entrée $U(p)$ et une sortie $Y(p)$ à l'intérieur duquel on précise l'élément (constituant) qu'il représente, ou on inscrit la fonction de transfert $G(p)$ ou simplement G de l'élément (1).
- **Sommateur ou comparateur :** Le sommateur permet d'additionner algébriquement des variables entre elles. Il possède plusieurs entrées mais une seule sortie. C'est un cas particulier du sommateur. Un comparateur permet d'élaborer la différence entre deux entrées (de comparer) (2).
- **Flèches :** Chaque flèche représente une grandeur physique entrant ou sortant d'un élément, le sens des flèches représentant le sens de circulation des informations, est important ; car il permet de distinguer l'entrée de la sortie.
- **Jonction :** Une jonction permet de prélever une information en un point d'un schéma fonctionnel. Un prélèvement d'information ne modifie pas la variable (3).

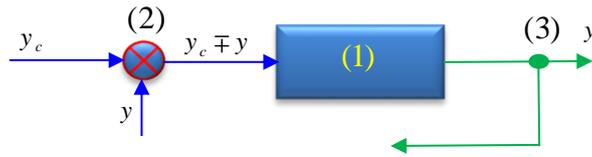


Fig 2.9 : Bloc (schéma) fonctionnel

✦ Schéma canonique d'un système asservi :

Matériellement, un système de commande en boucle fermée est constitué de plusieurs organes. Le schéma fonctionnel est constitué de plusieurs blocs connectés les uns aux autres par les signaux d'entrée et de sortie par une série de transformation, ce schéma fonctionnel peut être réduit au schéma canonique suivant :

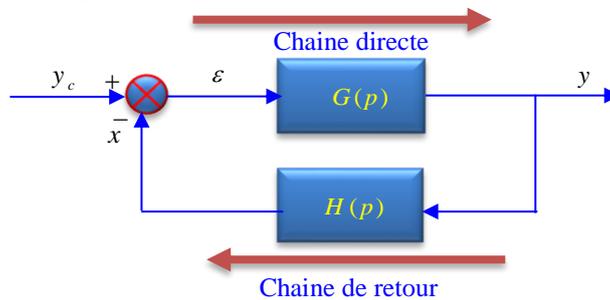


Fig 2.10 : Schéma canonique d'un système asservi

Ce schéma permet d'introduire les principales fonctions de transfert de l'asservissement :

Désignation	Forme mathématique
Fonction de transfert de la chaîne directe	$G(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)}$
Fonction de transfert de la chaîne de retour	$H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)}$
Fonction de transfert en boucle ouverte	$G(p)H(p) = \frac{X(p)}{\varepsilon(p)}$
Fonction de transfert de l'erreur (écart)	$\frac{\varepsilon(p)}{Y_c(p)} = \frac{1}{1+G(p)H(p)}$
Fonction de transfert en boucle fermée	$\frac{Y(p)}{Y_c(p)} = \frac{G(p)}{1+G(p)H(p)}$

Application de la forme canonique (Circuit RLC) :

Rappelons que le comportement dynamique de ce circuit est donné par les équation suivantes:

$$\begin{cases} V_e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + V_s(t) \\ V_s(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} V_e(p) - V_s(p) = (Lp + R)I(p) \\ V_s(p) = \frac{1}{Cp} I(p) \end{cases}$$

Ces équations peuvent être traduites par le schéma fonctionnel suivant :

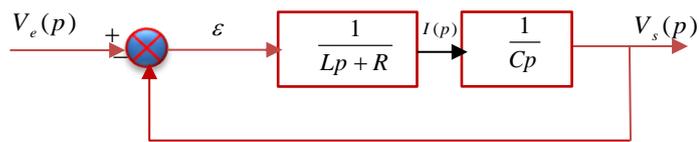
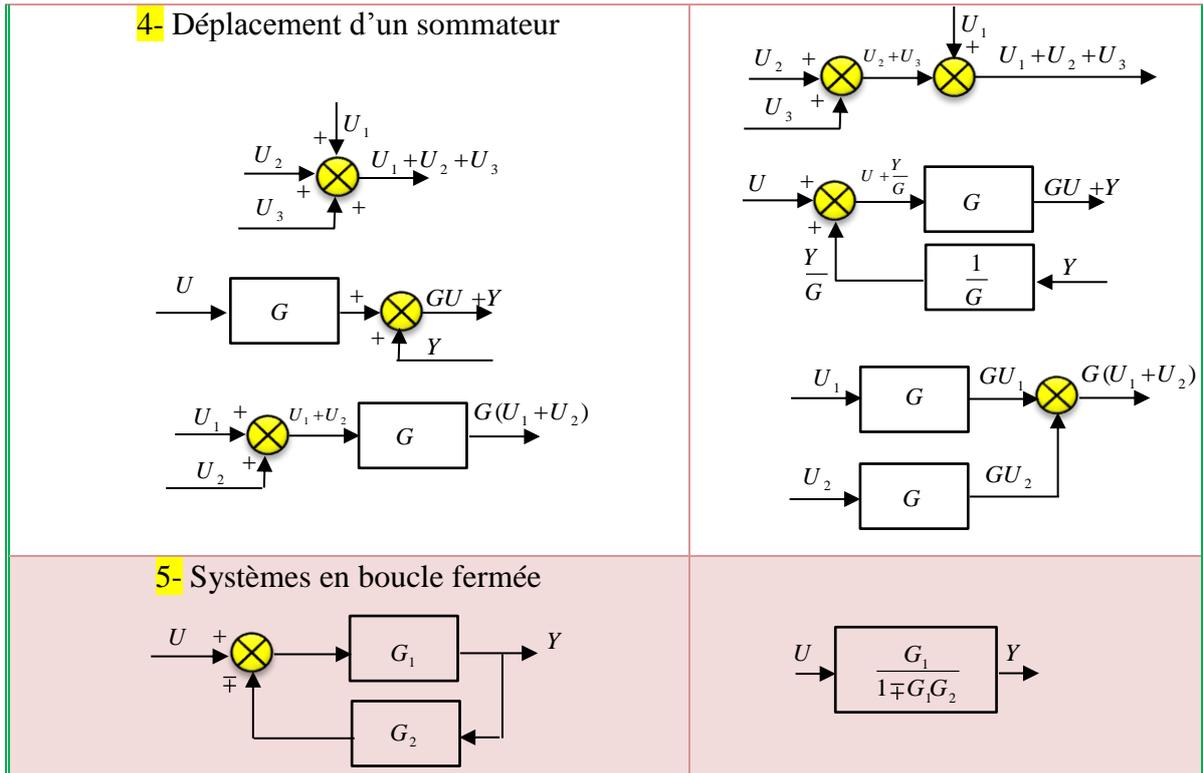


Fig 2.11 : Schéma fonctionnel d'un circuit RLC

6. Règles de simplification :

Il existe une multitude de transformations graphiques permettant de transformer le schéma fonctionnel global. Le but est généralement d'obtenir un schéma réduit. On donne ci-dessus quelques-unes de ces transformations.

Schéma fonctionnel original	Schéma fonctionnel équivalent
<p>1- Eléments en série (ou cascade)</p>	
<p>2- Eléments en parallèle</p>	
<p>3- Déplacement d'une jonction</p>	



7. Représentation des systèmes par les graphes de fluence :

Cette représentation, très proche de la représentation par diagramme fonctionnel, utilise les propriétés des systèmes linéaires.

- Un graphe de fluence est un diagramme qui représente un système d'équation de manière simple lorsque le nombre de variables augmente. Il consiste en un réseau, dans lequel des nœuds sont reliés entre eux par des branches orientées.
- Chaque variable est représentée par un nœud et une liaison entre variables par un arc, (une branche orientée) indiquée par une lettre placée près de sa flèche.

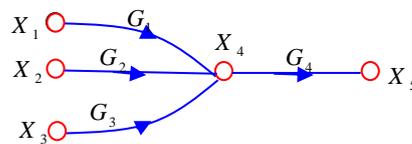


Fig2.12: Graphe de fluence

Ce graphe de fluence, est équivalent aux équations algébriques suivantes :

$$\begin{cases} X_4 = G_1X_1 + G_2X_2 + G_3X_3 \\ X_4 = G_4X_4 = G_4(G_1X_1 + G_2X_2 + G_3X_3) \end{cases}$$

Remarque 2.3 : L'orientation d'une branche représente une seule relation dans le sens indiqué.

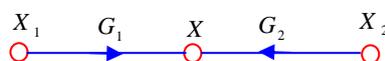


Fig2.13: Orientation d'une branche

Il vient pour la figure 2. 14: $X = G_1X_1 + G_2X_2$ non pas $X_2 = \frac{1}{G_2}X$ ou $X_1 = \frac{1}{G_1}X$

Les principaux éléments d'un graphe de fluence sont illustrés dans le graphe ci-dessous :

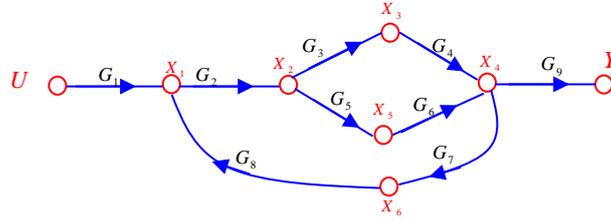


Fig2.14: Exemple graphe de fluence

- **Nœud source (entrée) :** Est un nœud associé à une variable d'entrée. Il n'admet que des arcs divergents : Exemple le nœud U .
- **Nœud puits (sortie) :** Est un nœud associé à une variable de sortie. Il n'admet que des arcs convergents : Exemple le nœud Y .
- **Chaîne :** Succession continue, unidimensionnelle de branches : Exemple : la chaîne $U - X_1 - X_2 - X_3 - X_4 - Y$, $X_1 - X_2 - X_5 - X_4 - X_6 - X_1$, $X_1 - X_2 - X_5 - X_4 - Y$.
- **Chaîne d'action (parcours) :** Est une chaîne commençant en un nœud d'entrée et finissant en un nœud de sortie, elle ne passe pas deux fois par le même point : Exemple : $U - X_1 - X_2 - X_3 - X_4 - Y$, $U - X_1 - X_2 - X_5 - X_4 - Y$.
- **Boucle :** Chaîne commençant et finissant au même nœud : Exemple : $X_1 - X_2 - X_5 - X_4 - X_6 - X_1$, $X_1 - X_2 - X_3 - X_4 - X_6 - X_1$.
- **Gain de chaîne :** Est le produit des gains dans la chaîne : exemple le gain de la boucle $X_1 - X_2 - X_5 - X_4 - X_6 - X_1$ est $G_2G_5G_6G_7G_8$.

Remarque 2.4 : Un nœud peut toujours être transformé en un nœud de sortie.

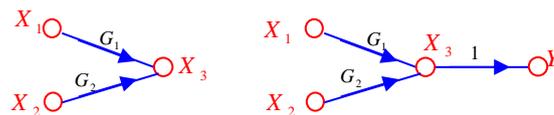


Fig2.15: Transformé en un nœud de sortie

Algèbre des graphes- Transformations élémentaires :

Schéma original	Forme mathématique	Schéma équivalent
Branches en série 	$\begin{cases} X_2 = G_1 X_1 \\ X_3 = G_2 X_2 \end{cases} \Rightarrow X_3 = G_1 G_2 X_1$	
Branches en série 	$X_2 = G_1 X_1 + G_2 X_1 = (G_1 + G_2) X_1$	
Absorption d'un nœud 	$\begin{cases} X_3 = G_1 X_1 + G_2 X_2 \\ X_4 = G_3 X_3 = G_3 G_1 X_1 + G_3 G_2 X_2 \end{cases}$	
Bou de contre-réaction 	$\begin{cases} X_2 = G_1 X_1 + G_3 X_3 \\ X_3 = G_2 X_2 = G_2 G_1 X_1 + G_2 G_3 X_3 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} X_3 (1 - G_2 G_3) = G_2 G_1 X_1 \\ X_3 = \frac{G_2 G_1}{1 - G_2 G_3} \end{cases}$	

8. Règle de Mason (1956) :

La formule de Mason permet déduire simplement la fonction de transfert à partir de son graphe de fluence.

Si U et Y sont respectivement l'entrée et la sortie du graphe, la transmittance globale

$T = \frac{Y}{U}$ entre une source et un puits d'un graphe de fluence se calcule par :

$$T = \frac{Y}{U} = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\Delta}$$

avec :

- P_i : est la transmittance (gain) associée au $i^{ème}$ chaîne d'action entre U et Y
- Δ : est le déterminant du graphe donné par :

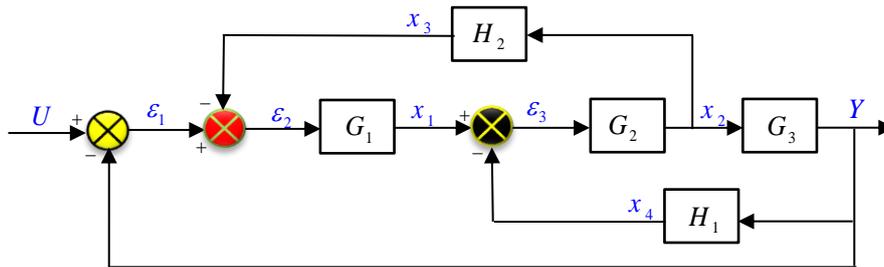
$$\Delta = 1 - \sum_i B_i + \sum_{ij} B_i B_j - \sum_{ijk} B_i B_j B_k + \dots$$

Où d'une autre manière

- $\Delta = 1 - \sum(\text{gains des boucles individuelles}) - \sum(\text{gains des boucles individuelles}) + \sum(\text{produits des gains de toutes les paires possibles de boucles ne se touchent pas}) - \sum(\text{produits des gains de tous les triplets possibles de boucles ne se touchent pas}) + \dots$
- $\Delta_i = 1 - (\text{gain de boucle obtenu en supprimant tous les nœuds traversés par le parcours } i)$.

9. Calcul des fonctions de transfert des systèmes bouclés :

Soit le système représenté par le schéma fonctionnel suivant :

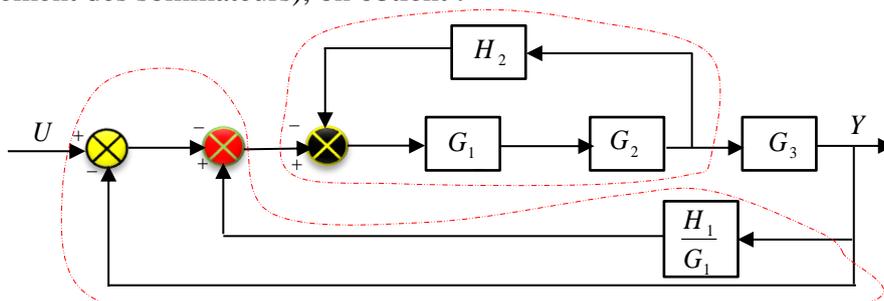


Déterminez les fonctions de transfert $G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$ par simplifications successives des blocs fonctionnels, puis en utilisant la règle de Mason.

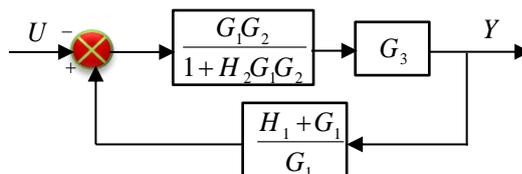
Solution :

1) 1^{ère} méthode : Par simplifications successives des blocs fonctionnels :

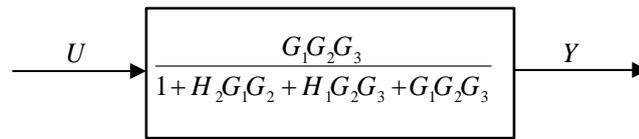
- Déplaçant vers la gauche le 3^{ème} sommateur (en noire) et appliquant la règle n° 4.1 (regroupement des sommateurs), on obtient :



- Regroupons les boucles cerclées en pointillées :



- Eliminons de nouveau la boucle de réaction :

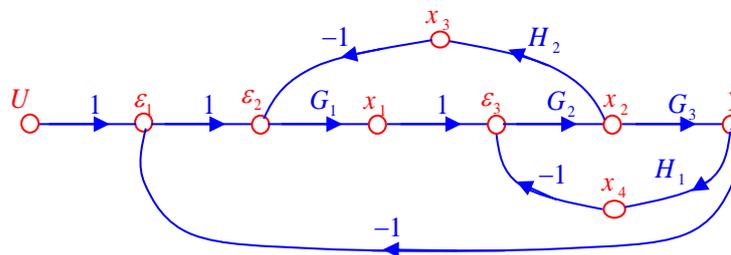


- De cette forme canonique, on déduit la fonction de transfert cherchée :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{G_1G_2G_3}{1 + H_2G_1G_2 + H_1G_2G_3 + G_1G_2G_3}$$

2) 2^{ème} méthode : Par application de la règle de Mason :

Le graphe de fluence de ce système est représenté comme suit :



- Les parcours :

(les chemins de U vers Y qui ne coupent pas le même point plus d'une fois :

$$P_1 = G_1G_2G_3$$

- Les boucles et leurs gains :

$$B_1 = -G_1G_2G_3, B_2 = -H_1G_2G_3, B_3 = -H_2G_1G_2$$

- Les Δ_i :

- $\Delta_i = 1 -$ (les boucles restant après élimination de la chaîne i). Si aucune restante alors

$$\Delta_i = 1.$$

Si nous éliminons le parcours $P_1 = G_1G_2G_3$ du système, il ne reste plus de boucle complète.

Alors :

$$\Delta_1 = 1$$

- Le déterminant du graphe Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - \sum_i B_i + \sum_{ij} B_i B_j - \sum_{ijk} B_i B_j B_k + \dots \\ &= 1 - (-G_1G_2G_3 - H_1G_2G_3 - H_2G_1G_2) + (0) - (0) + (0) \dots \\ &= 1 + G_1G_2G_3 + H_1G_2G_3 + H_2G_1G_2 \end{aligned}$$

Finalement, la fonction de transfert

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3}{H_2 G_1 G_2 + H_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3}$$

Exercices sur le chapitre 2

Exercice 1 :

Calculer les transformées de Laplace des fonctions temporelles suivantes (à l'aide de la table)

$$\begin{aligned} 1) f(t) &= (t^2 + 3t - 2)u(t) & 2) f(t) &= 2e^{-3t}u(t-4) & 3) f(t) &= 5(1 - e^{-3t}) \\ 4) f(t) &= t \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) & 5) f(t) &= t \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) & 6) f(t) &= 10te^{-2t}\delta(t-3) \\ 7) f(t) &= 5tu(t+2) - \sin\left(3\pi t - \frac{\pi}{10}\right)u(t-3) \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Calculez les transformées inverses de Laplace des fonctions rationnelles en p suivantes :

$$\begin{aligned} 1) F(p) &= \frac{p+1}{p^3 + p^2 - 6p} & 2) F(p) &= \frac{2p^2 + 7p + 8}{p^2 + 3p + 2} & 3) F(p) &= \frac{1}{p^2 + 2p + 2} \\ 4) F(p) &= \frac{p}{(p-2)^2(p+3)} & 5) F(p) &= \frac{p+3}{(p+2)^2} + \frac{2p-1}{p^2+1} & 6) F(p) &= \frac{p}{(p-2)^2(p+3)}e^{-2p} \end{aligned}$$

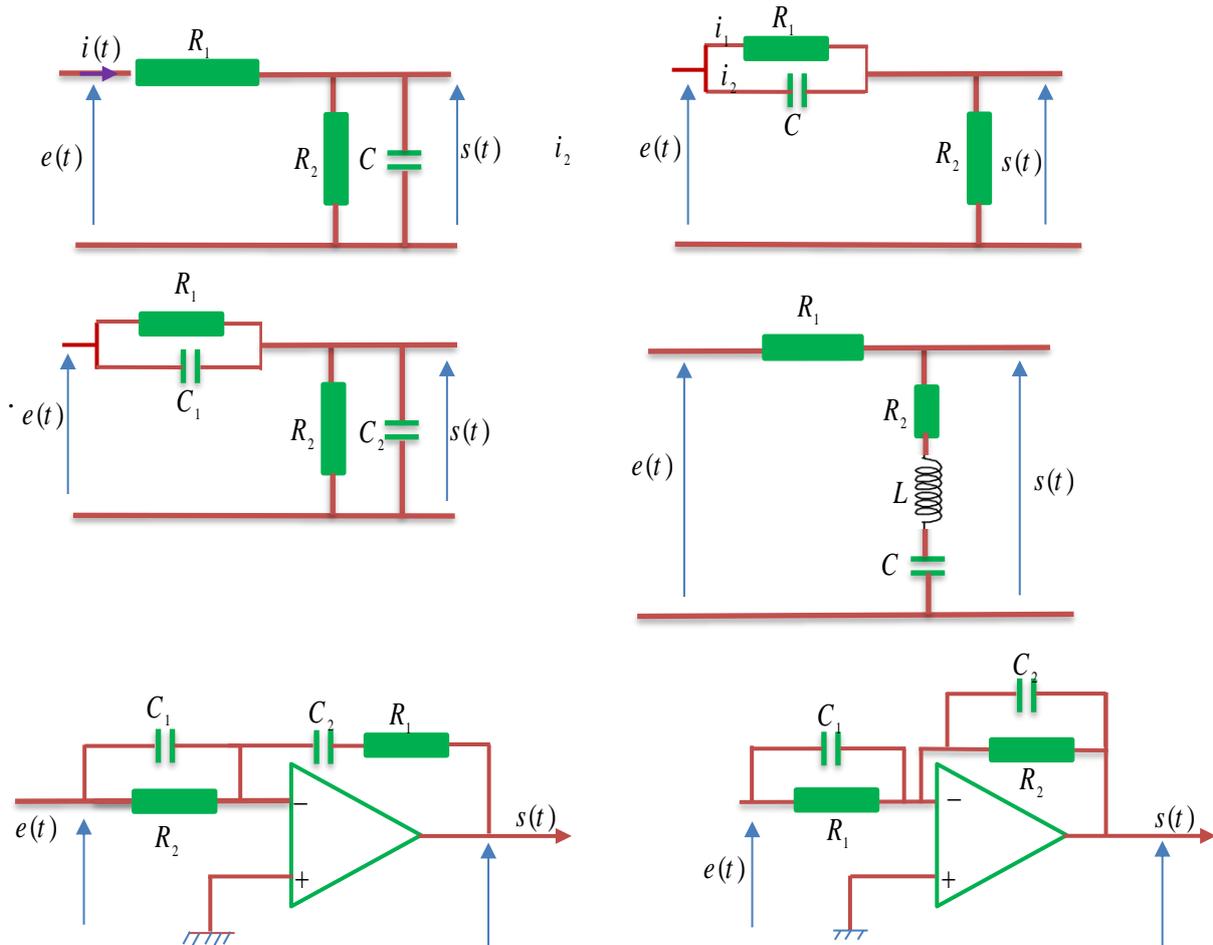
Exercice 3 :

Résoudre les équations différentielles suivantes à l'aide de la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} 1) \ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 2y(t) &= e^{-2t}u(t) \quad \text{avec} \quad y(0) = -1 \quad \text{et} \quad \dot{y}(0) = -2 \\ 2) \ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) &= \sin(2t) \quad \text{avec} \quad y(0) = 1 \quad \text{et} \quad \dot{y}(0) = 2 \\ 3) \ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) &= 0 \quad \text{avec} \quad y(0) = 3, \quad \dot{y}(0) = -2 \quad \text{et} \quad \ddot{y}(0) = 7 \end{aligned}$$

Exercice 4 :

En supposant les conditions initiales nulles (condensateurs déchargés initialement). Déterminer pour chaque montage ci-dessous, la fonction de transfert

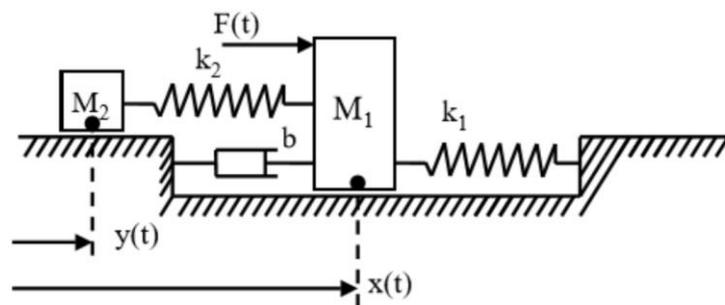


Exercice 5 :

On considère le système de deux masses M_1 et M_2 , évoluant sur un plan horizontal, sans frottement.

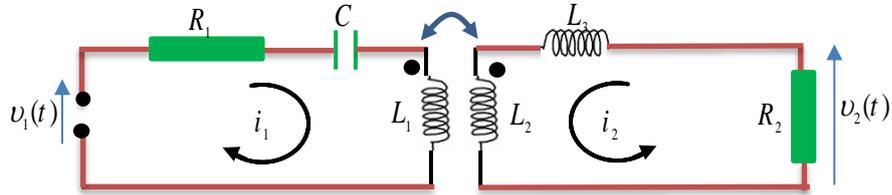
1) Déterminer l'équation différentielle reliant le mouvement de la masse M_2 ($y(t)$) en fonction de la force appliquée F ($u(t)$)

2) Dédurre sa fonction de transfert



Exercice 6 :

Il s'agit de la détermination d'une fonction de transfert par les impédances opérationnelles. On supposera qu'à $t = 0$ on a $i_1 = i_2 = 0$.



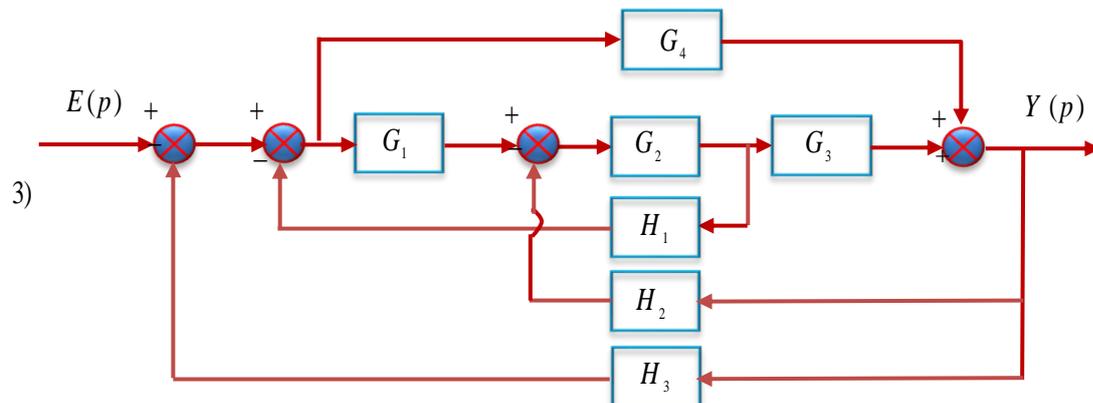
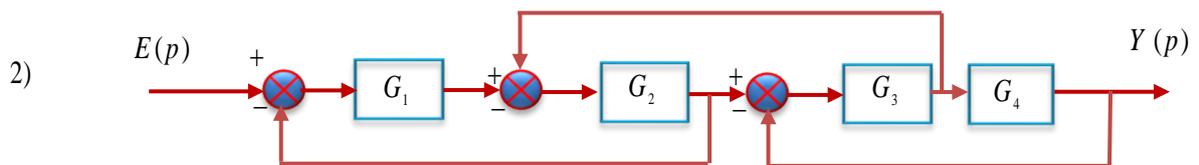
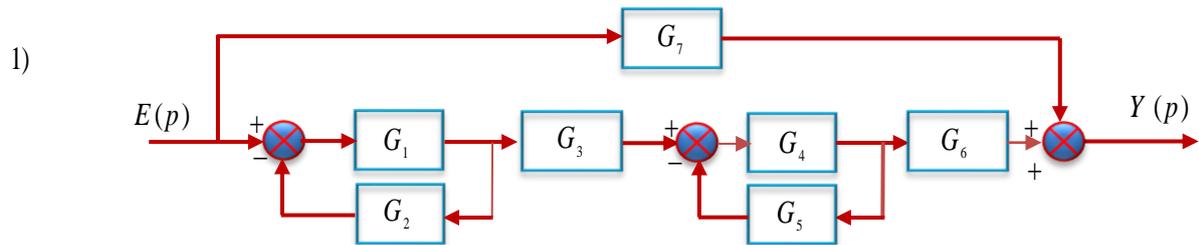
1) Déterminer l'équation différentielle reliant $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

2) Déterminer la fonction de transfert correspondante $G(p) = \frac{v_1(p)}{v_2(p)}$.

3) Déterminer le modèle d'état de ce système

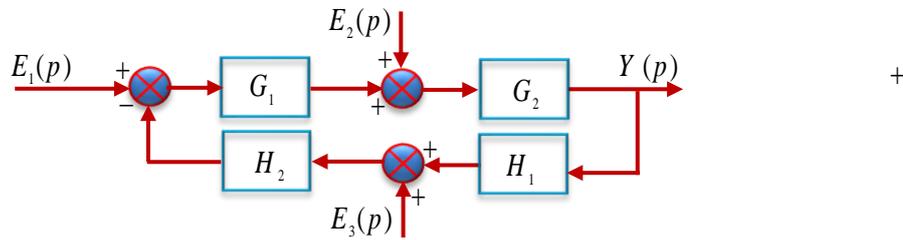
Exercice 7:

Déterminez les fonctions de transfert entre $E(p)$ et $Y(p)$ par simplifications successives des blocs fonctionnels, puis en utilisant la règle de Mason.

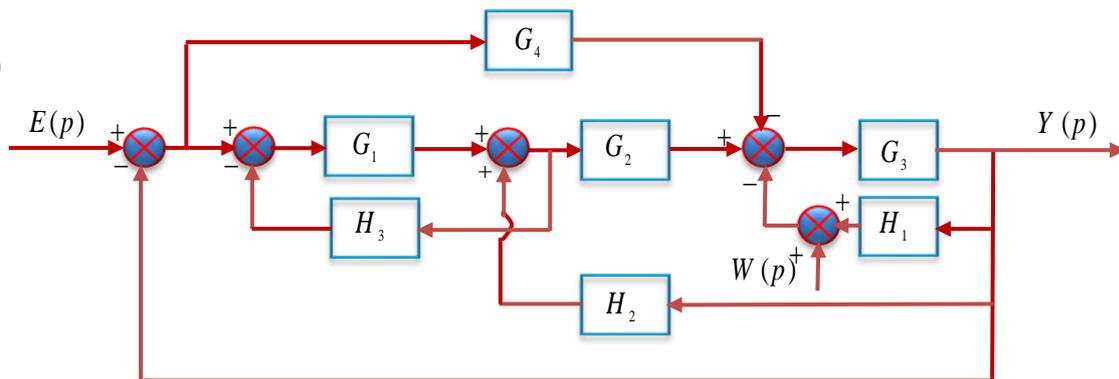


Exercice 8 : Trouver l'expression de la sortie $Y(p)$ en fonction des différentes entrées $E_1(p)$, $E_2(p)$ et $E_3(p)$ pour les systèmes suivants :

1)



2)



Chapitre 3

Réponses temporelles des systèmes linéaires

1. Définition de la réponse d'un système :

Définition : L'analyse temporelle consiste à étudier la réponse d'un système $y(t)$ représenté par sa fonction de transfert à un signal d'entrée $u(t)$ variant dans le temps (peut en principe être quelconque). Cette réponse permet d'évaluer les performances en rapidité, précision, stabilité. De même pour pouvoir comparer les caractéristiques de plusieurs systèmes entre eux, il convient de leur appliquer un même signal.

Classiquement, on peut apprendre beaucoup des systèmes en observant la réponse aux entrées suivantes :

<i>L'impulsion</i>	→	<i>Réponse impulsionnelle</i>
<i>L'échelon</i>	→	<i>Réponse indicielle</i>
<i>La rampe</i>	→	<i>Réponse à une rampe</i>
<i>La sinusoïde</i>	→	<i>Réponse fréquentielle</i>

Les systèmes les plus élémentaires (les plus simples) sont des systèmes du premier et du second ordre dont l'étude temporelle va être détaillée par la suite.

L'objet de ce chapitre est alors d'étudier les réponses temporelles des systèmes du premier et du second ordre aux signaux de référence, auxquels se ramèneront les systèmes d'ordre supérieur, par approximation.

1.1. Entrées canoniques :

✚ **Echelon unité (fonction d'Heavyside) :** C'est l'entrée la plus utilisée. Elle correspond à un changement brusque de consigne (saut). Cette fonction est définie par :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad \text{sa transformée de Laplace est : } U(p) = \frac{1}{p}$$

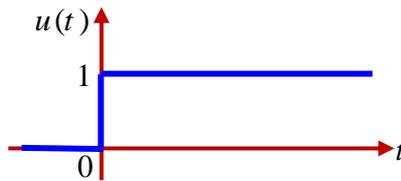


Fig.3.1 : Fonction Echelon

- ✚ **Impulsion unitaire (impulsion de Dirac) :** Une impulsion est une fonction du temps de durée très courte mais dont l'amplitude est suffisamment grande pour que l'effet en soit sensible. L'impulsion est dite unitaire si la surface est égale à 1. On la note généralement $\delta(t)$. Elle est définie par :

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \text{ et } t \geq \tau \\ \lim_{\tau \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tau} \right) & \text{si } 0 < t < \tau \end{cases} \quad \text{sa transformée de Laplace est : } \delta(p) = 1$$

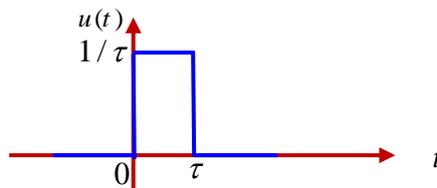


Fig.3.2 : Impulsion de Dirac $\delta(t)$

- ✚ **Echelon de vitesse (rampe unité) :** La vitesse de variation de cette fonction est constante et égale à 1. Ce signal est le signal de base permettant d'analyser la réponse d'un système en poursuite. Elle est définie par :

$$r(t) = tu(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad \text{sa transformée de Laplace est : } R(p) = \frac{1}{p^2}$$

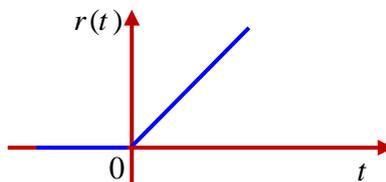


Fig.3.3 : Rampe unité $r(t)$

- ✚ **Echelon d'accélération (parabole unitaire) :** Soit $f(t)$ la fonction échelon d'accélération, définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} u(t) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad \text{sa transformée de Laplace est : } F(p) = \frac{1}{p^3}$$

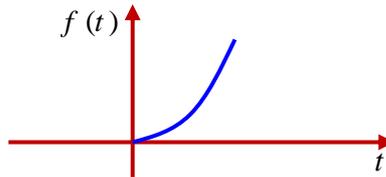


Fig.3.4 : Parabole unitaire $f(t)$

✚ **Signal harmonique :** Ce signal est le signal de base de l'étude fréquentielle des systèmes linéaires, c'est à dire la réponse en fréquence du système. (Très utilisé notamment afin de caractériser les filtres en électronique). Il est défini par :

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t + \varphi) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad \text{sa transformée de Laplace est : } F(p) = \frac{p \sin(\varphi) + \omega \cos(\varphi)}{p^2 + \omega^2}$$

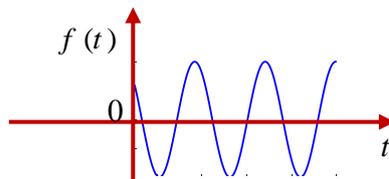


Fig.3.5 : Signal harmonique $f(t)$

1.2. Réponses particulières d'un système scalaire :

On considère ici un système scalaire, c'est à dire monovariante.



Pour connaître le comportement du système et le comparer à d'autres systèmes, on étudie les réponses à quelques signaux particuliers.

✚ **Réponse impulsionnelle :**

On appelle réponse impulsionnelle, la réponse notée $g(t)$, obtenue par l'application d'une impulsion de Dirac $\delta(t)$ à l'entrée du système, celui-ci étant initialement au repos.



Fig.3.6 : Impulsion de Dirac-Réponse impulsionnelle

- ✚ **Réponse indicielle :** On appelle réponse indicielle, la réponse notée $h(t)$, obtenue par l'application d'un échelon unité $u(t)$ à l'entrée du système, celui-ci étant initialement au repos.

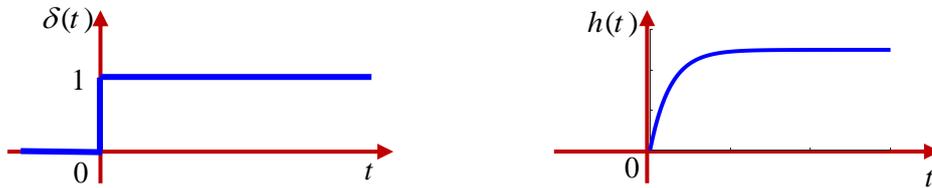


Fig.3.7 : Echelon unitaire-Réponse indicielle

- ✚ **Réponse à un signal quelconque :** Pour un système scalaire, linéaire et invariant, initialement au repos, la réponse $y(t)$ à un signal d'entrée quelconque $u(t)$ est donnée par le produit de convolution noté $(*)$ entre $u(t)$ et la réponse impulsionnelle $g(t)$ du système :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau).g(t - \tau)d\tau = u(t) * g(t)$$

✚ **Remarques 3.1:**

- La formule précédente est fondamentale. Elle permet, en connaissant le système par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ et l'entrée $u(t)$, de déterminer $y(t)$. Elle peut donc remplacer totalement l'équation différentielle régissant le système.
- Dans ce cas la sortie $y(t)$ est la convolution du signal d'entrée avec la réponse impulsionnelle du système.
- Le produit de convolution est commutatif : $u(t) * g(t) = g(t) * u(t)$
- Par la propriété de convolution temporelle de la transformée de Laplace, nous avons avec conditions initiales nulles : $Y(p) = \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[g(t) * u(t)] = G(p).U(p)$

2. Etude des systèmes du premier ordre :

Définition : On appelle système du 1^{er} ordre, un système régi par une équation linéaire différentielle du premier ordre à coefficients constants de la forme :

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t)$$

Ce système dynamique est caractérisé par deux paramètres :

- **Le gain statique** du système K s'exprime dans la même unité que le rapport $\frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)}$.

Pour un système stable (la sortie est constante en régime permanent), le gain statique représente la valeur prise par sa réponse à une entrée en échelon unitaire quand $t \rightarrow \infty$.

- **La constante de temps** du système τ s'exprime en secondes et caractérise la vitesse (dynamique) de réaction d'un système.

Si les conditions initiales sont nulles, la transformée de Laplace des deux membres donne : $\tau p Y(p) + Y(p) = K U(p)$

la fonction de transfert d'un système du premier ordre s'écrit alors :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K}{\tau p + 1}$$

Cette fonction de transfert possède un pôle simple: $p = -\frac{1}{\tau}$

✚ Remarque 3.2 :

- “Conditions initiales nulles” signifie que le système part du repos ou de son point de fonctionnement. Donc à l'instant $t = 0$, le système est en régime permanent. Cette remarque est valable pour toute la suite de ce cours.
- Le système est appelé élémentaire lorsque la dérivée de l'entrée $u(t)$ n'apparaît pas dans le second membre de l'équation différentielle.

2.1. Réponse impulsionnelle du système du 1^{er} ordre :

C'est la réponse à une impulsion de Dirac $\delta(t)$. Dans ce cas nous avons :

$e(t) = \delta(t) \Rightarrow \mathcal{L}[e(t)] = 1$. Le signal de sortie s'exprime comme suit :

$$Y(p) = G(p)E(p) = \frac{K}{\tau p + 1}$$

La sortie temporelle correspondante $y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{\tau p + 1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{\tau} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}}\right]$$

$$y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \text{pour } t \geq 0$$

L'allure de cette réponse est représentée par la figure 3.7 comme suit:

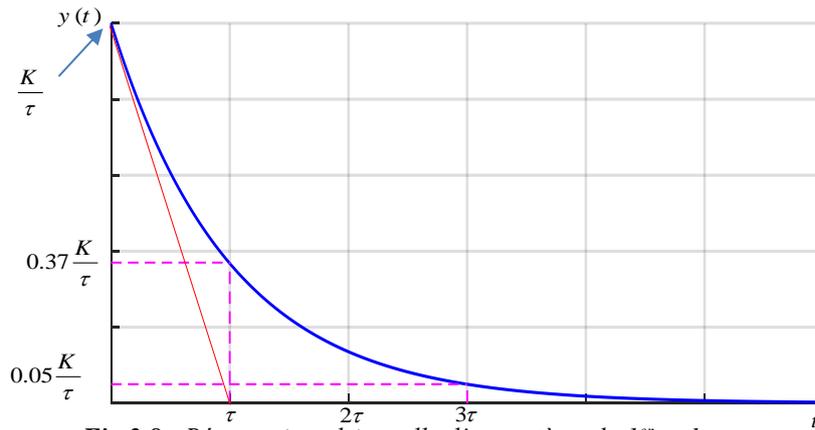


Fig.3.8 : Réponse impulsionnelle d'un système du 1^{er} ordre

Les points particuliers de cette réponse sont donnés dans le tableau ci-dessous :

- Point de départ : $y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} (y(t)) = \lim_{p \rightarrow \infty} (pY(p)) = \frac{K}{\tau}$ (Théorème de la valeur initiale)
- Point d'arrivé : $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (pY(p)) = 0$ (Théorème de la valeur finale)

t	0	τ	3τ	$+\infty$
$y(t)$	$\frac{K}{\tau}$	$0.37 \frac{K}{\tau}$	$0.05 \frac{K}{\tau}$	0
$\frac{dy(t)}{dt}$	$-\frac{K}{\tau^2}$	$-0.37 \frac{K}{\tau^2}$	$-0.05 \frac{K}{\tau^2}$	0

2.1.1. Identification des systèmes du 1^{er} ordre à partir de la réponse impulsionnelle :

Il est possible d'identifier les deux paramètres (K et τ) de la fonction de transfert d'un système du premier ordre à partir de la courbe de sa réponse impulsionnelle :

- La valeur de τ : On lit soit l'abscisse du point qui correspond à 37% de $\frac{K}{\tau} \rightarrow \tau$ ou soit l'abscisse qui correspond à 0.05% de $\frac{K}{\tau} \rightarrow 3\tau$
- La valeur de K : à partir de la valeur initiale de la réponse impulsionnelle $\frac{K}{\tau} \rightarrow K$

2.2. Réponse indicielle du système du 1^{er} ordre :

C'est la réponse à un échelon $u(t)$. On se propose de déterminer la réponse indicielle à un échelon d'amplitude E_0 : dans ce cas-là :

$$E(p) = \frac{E_0}{p} \Rightarrow Y(p) = \frac{E_0}{p} G(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{\tau p + 1}$$

La sortie temporelle correspondante $y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{E_0 K}{p \tau p + 1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{KE_0}{p} - \frac{K \frac{KE_0}{p}}{p + \frac{1}{\tau}}\right]$$

$$y(t) = KE_0(1 - e^{-t/\tau}) \text{ pour } t \geq 0$$

La courbe correspondante est donnée par la figure ci-dessous :

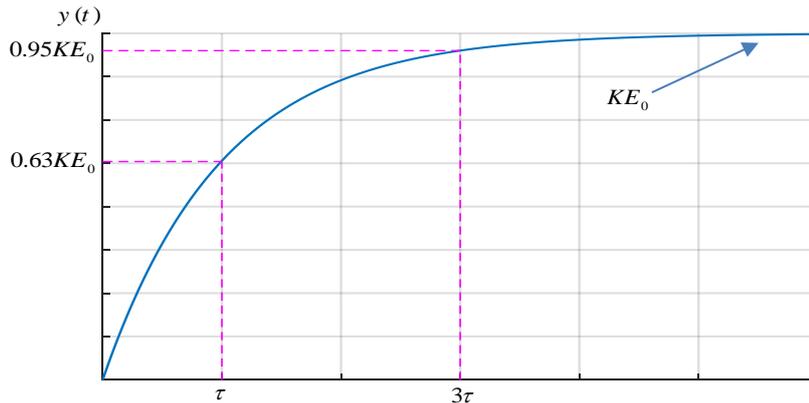


Fig.3.9 : Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

Les points particuliers de cette réponse sont donnés dans le tableau ci-dessous :

- Point de départ : $y(0) = \lim_{t \rightarrow 0} (y(t)) = \lim_{p \rightarrow \infty} (pY(p)) = 0$ (Théorème de la valeur initiale)
- Point d'arrivée : $y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (y(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (pY(p)) = KE_0$ (Théorème de la valeur finale)

t	0	τ	3τ	$+\infty$
$y(t)$	0	$0.63KE_0$	$0.95KE_0$	KE_0
$\frac{dy(t)}{dt}$	KE_0 / τ	-	-	0

2.2.1 : Caractéristiques temporelles du système du 1^{er} ordre :

⚡ Temps de réponse à 5% (t_r) : On appelle temps de réponse d'un système, le temps que met la réponse indicielle du système pour ne plus sortir d'un intervalle de $\pm 5\%$ autour de sa réponse finale.

On cherche $t_{5\%}$ tel que $y(t_{5\%}) = 0.95KE_0$, on a :

$$\begin{aligned}
 y(t_{5\%}) = y(t_r) = 0.95KE_0 &\Rightarrow KE_0(1 - e^{-t_r/\tau}) = 0.95KE_0 \\
 &\Rightarrow 1 - e^{-t_r/\tau} = 0.95 \\
 &\Rightarrow \frac{t_r}{\tau} = -\ln(0.05) \\
 &\Rightarrow t_r = 3\tau
 \end{aligned}$$

✚ **Temps de montée (t_m)** : C'est le temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur finale (valeur en régime permanent) :

Soient t_1 et t_2 les instants où la réponse vaut respectivement 10% et 90% de sa valeur finale.

$$\begin{cases}
 KE_0(1 - e^{-t_1/\tau}) = 0.1KE_0 \Rightarrow t_1 = -\tau \ln(0.9) \\
 KE_0(1 - e^{-t_2/\tau}) = 0.9KE_0 \Rightarrow t_2 = -\tau \ln(0.1)
 \end{cases}$$

Donc $t_m = t_2 - t_1 \approx 2.2\tau$

✚ **Intérêt de la constante de temps** : Elle fournit une indication sur le comportement du système :

- Si τ est petite, alors t_r est faible et le système est rapide
- plus τ est élevée, plus le système est lent.

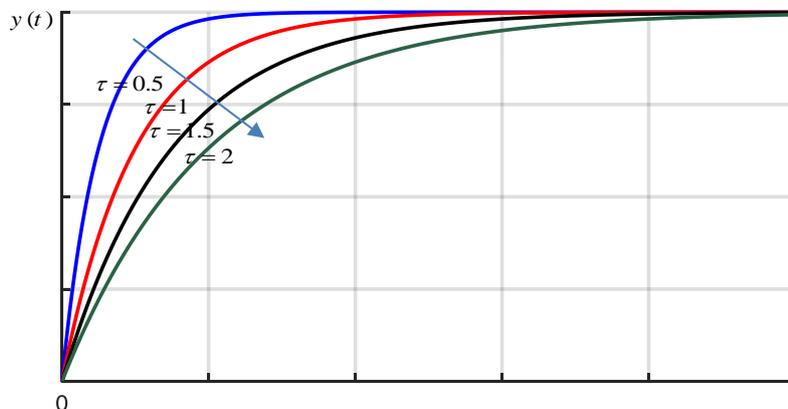


Fig.3.10 : Influence de la constante de temps (τ) sur la réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

2.2.2 : Identification des systèmes du 1^{er} ordre à partir de la réponse indicielle :

- La valeur de K : à partir de l'asymptote horizontale (ne pas oublier de diviser par la valeur de l'échelon E_0 $\left(K = \frac{\Delta y(t)|_{t \rightarrow \infty}}{\Delta u(t)} \right)$
- La valeur de τ : On lit soit l'abscisse du point qui correspond à 95% de $KE_0 \rightarrow 3\tau$, méthode peu précise, car au niveau du point mesuré, la courbe est trop horizontale.

ou soit l'abscisse du point qui correspond à 67% de $KE_0 \rightarrow \tau$, méthode assez précise, car au niveau du point mesuré, la courbe présente une tangente éloigné de zéro.

Exemples de systèmes du 1^{er} ordre :

Circuit RC :

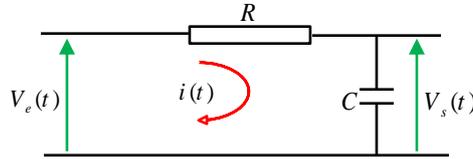


Fig.3.11 : Circuit RC

Ce circuit étant soumis à une tension $V_e(t)$ en entrée, quelle tension $V_s(t)$ délivre-t-il en sortie ?

On utilise les lois de Kirchoff, les équations électriques du système sont :

$$V_e(t) = Ri(t) + V_s(t)$$

$$V_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t)dt \text{ or } i(t) = C \frac{dV_s(t)}{dt}$$

D'où l'équation différentielle du premier ordre liant l'entrée et la sortie du système

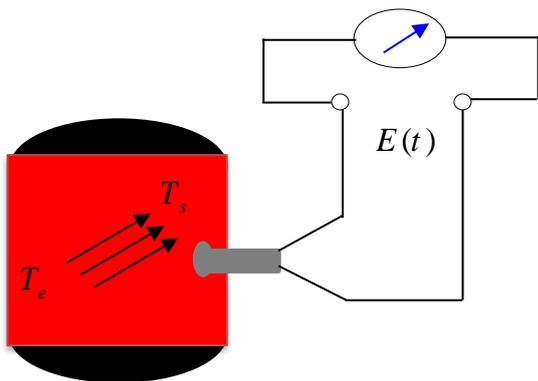
$$RC \frac{dV_s(t)}{dt} + V_s(t) = V_e(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace et en supposant que le système part du repos on aura:

$$RCpV_s(p) + V_s(p) = V_e(p) \text{ soit } G(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)} = \frac{1}{RCp + 1} = \frac{K}{\tau p + 1}$$

Avec $K = \frac{\Delta V_s(t)}{\Delta V_e(t)} = 1$ et $\tau = RC$.

Système thermique (Echangeur thermique)



- m : masse de la soudure [kg]
- S : surface d'échange de chaleur de la soudure [m^2]
- T_e : Température du milieu à mesurer [$^{\circ}C$] (entrée)
- T_s : Température de la soudure du thermocouple [$^{\circ}C$]
- α : Coefficient de transfert de chaleur [$j / sec.m^2^{\circ}C$]
- C_T : Capacité calorifique de la soudure [$j / kg^{\circ}C$]
- $E(t)$: tension de sortie [mV] (sortie)
- = KT_s (proportionnelle à $T_s(t)$)

Fig.3.12. Echangeur de chaleur

Ce système est régi par l'équations suivante :

$$\alpha S (T_e - T_s) dt = mC_T dT_s$$

Qui est équivalent à :

$$\frac{mC_T}{\alpha S} \frac{dE(t)}{dt} + E(t) = KT_e(t)$$

En appliquant la transformation de Laplace et en supposant que les conditions initiales sont nulles, on obtient :

$$\frac{mC_T}{\alpha S} pE(p) + E(p) = KT_e(p)$$

D'où la fonction de transfert du premier ordre suivante :

$$W(p) = \frac{T_e(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{mC_T}{\alpha S} p} = \frac{K}{1 + \tau p} \text{ avec } \tau = \frac{mC_T}{\alpha S}$$

✚ Réservoir hydraulique ou pneumatique :

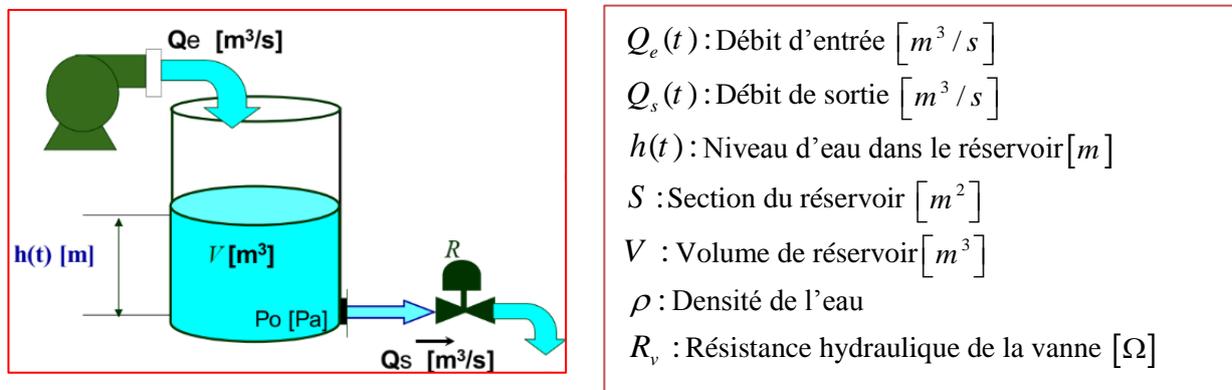


Fig.3.13. Réservoir hydraulique ou pneumatique

Ce système est régi par l'équations suivante :

$$Q_e(t) - Q_s(t) = \frac{dV}{dt} = S \frac{dh(t)}{dt}$$

$$Q_s(t) = \frac{(P_0 - 0)}{R_v} = \frac{\rho g}{R_v} h(t)$$

On peut écrire alors :

$$S \frac{dh(t)}{dt} + \frac{\rho g}{R_v} h(t) = Q_e(t)$$

En appliquant la transformation de Laplace et en supposant que les conditions initiales sont nulles, on obtient :

$$SpH(p) + \frac{\rho g}{R_v} H(p) = Q_e(p) \Rightarrow \left(1 + \frac{SR_v}{\rho g}\right) H(p) = \frac{R_v}{\rho g} Q_e(p)$$

On obtient alors la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{H(p)}{Q_e(p)} = \frac{\frac{R_v}{\rho g}}{1 + \frac{SR_v}{\rho g}} = \frac{K}{1 + \tau p} \text{ avec } \tau = \frac{SR_v}{\rho g} \text{ et } K = \frac{R_v}{\rho g}.$$

3. Etude des systèmes de 2^{ème} ordre :

Définition : Un système linéaire continu et invariant d'entrée $e(t)$ et de sortie $y(t)$, est dit de second ordre, lorsqu'il est régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du 2^{ème} ordre de la forme :

$$a_2 \frac{dy^2(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 e(t)$$

Ou sous une forme canonique :

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = K \omega_n^2 e(t)$$

où ω_n, ξ et K sont des constantes réelles positives. Ils ont la signification suivante :

- ω_n : Pulsation propre non amortie (ou pulsation naturelle) du système,
- ξ : Coefficient (ou facteur) d'amortissement du système,
- Gain statique du système (gain en régime permanent).

Ces trois grandeurs suffisent à caractériser tout système du 2^{ème} ordre : ce sont ses grandeurs caractéristiques.

La fonction de transfert se déduit de l'équation différentielle du système en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres (en prenant des conditions initiales nulles):

$$p^2 Y(p) + 2\xi\omega_n p Y(p) + \omega_n^2 Y(p) = K \omega_n^2 E(p)$$

La fonction de transfert du système est alors :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1}$$

Exemples de systèmes du 2^{ème} ordre :

Circuit RLC : Soit le circuit RLC suivant d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$

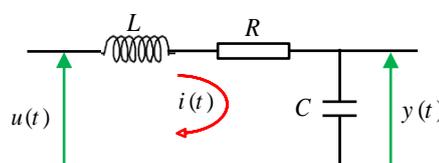


Fig.3.14 : Circuit RLC

Les lois de Kirchhoff donnent :

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + y(t) \\ y(t) = \frac{1}{C} \int i(t)dt \Rightarrow i(t) = C \frac{dy(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow LC \frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

En prenant la transformée de Laplace de cette expression (considérant des conditions initiales nulles), il vient :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1} = \frac{K}{\omega_n^2 p^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1}$$

Dans cet exemple $\omega_n = 1/\sqrt{LC}$, $\xi = R\sqrt{C/4L}$ et $K = 1$.

✚ **Système masse - ressort - amortisseur :** Soit le système mécanique masse-ressort-amortisseur suivant :

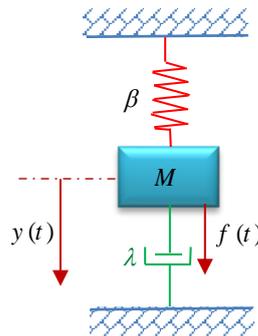


Fig.3.15 : Système masse- ressort-amortisseur

Ce système peut être régit par l'équation différentielle suivante :

$$M \frac{d^2y(t)}{dt^2} = f(t) - \lambda \frac{dy(t)}{dt} - \beta y(t)$$

En réordonnant les termes, on obtient :

$$M \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \lambda \frac{dy(t)}{dt} + \beta y(t) = f(t)$$

Si les conditions initiales sont nulles, la transformée de Laplace des deux membres donne :

$$Mp^2Y(p) + \lambda pY(p) + \beta Y(p) = F(p)$$

Alors la fonction de transfert est donnée par :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{1}{Mp^2 + \lambda p + \beta} = \frac{1/\beta}{\frac{M}{\beta}p^2 + \frac{\lambda}{\beta}p + 1} = \frac{K}{\omega_n^2 p^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1}$$

Dans cet exemple $\omega_n = \sqrt{\beta/M}$, $\xi = \frac{\lambda}{2M\sqrt{\beta}}$ et $K = 1/\beta$.

3.1. Réponse impulsionnelle et indicielle du système du 2^{ème} ordre:

La transmittance de la sortie $Y(p)$ est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1} E(p)$$

L'étude des différentes formes de la sortie d'un système d'ordre deux s'effectue en analysant les racines de son polynôme caractéristique (pôles), donné par le dénominateur de la fonction de transfert :

$$p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2 = 0$$

La nature de la réponse $y(t)$ dépend du signe du déterminant du polynôme caractéristique :

$$\Delta = 4(\xi^2 - 1)$$

Ainsi, on distingue 3 cas selon le signe du déterminant de l'équation Δ .

✚ Cas1 : Déterminant positif ($\Delta > 0 \Rightarrow \xi > 1$)

Dans ce cas, le polynôme caractéristique admet 2 racines réelles, la réponse est dite *apériodique*.

Les deux racines p_1 et p_2 sont:

$$p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2 = (p - p_1)(p - p_2) = 0$$

avec:

$$p_1 = \omega_n \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right), \quad p_2 = \omega_n \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

et en terme de constantes de temps ;

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_n \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right)}, \quad \tau_2 = \frac{1}{\omega_n \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)}$$

✚ Cas2 : Déterminant nul ($\Delta = 0 \Rightarrow \xi = 1$)

Dans ce cas le polynôme caractéristique admet une racine double réelles. Ainsi, nous obtenons une réponse apériodique qui tend très rapidement (régime critique) vers l'asymptote K (systèmes à amortissement critique).

$$p^2 + 2\omega_n p + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow (p + \omega_n)^2 = 0 \Rightarrow p = -\omega_n$$

✚ **Cas3 : Déterminant négatif** ($\Delta < 0 \Rightarrow \xi < 1$)

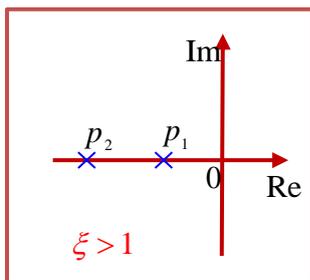
Dans ce cas le polynôme caractéristique admet deux racines complexes conjuguées et la réponse est dite *oscillatoire amortie*.

$$Y(p) = \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} U(p) = \frac{K \omega_n^2}{(p - \bar{p}_1)(p - \bar{p}_2)} U(p)$$

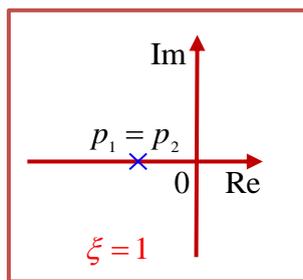
avec \bar{p}_1, \bar{p}_2 sont des pôles complexes conjugués tels que :

$$\bar{p}_1 = \omega_n \left(-\xi - j\sqrt{\xi^2 - 1} \right), \quad \bar{p}_2 = \omega_n \left(-\xi + j\sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

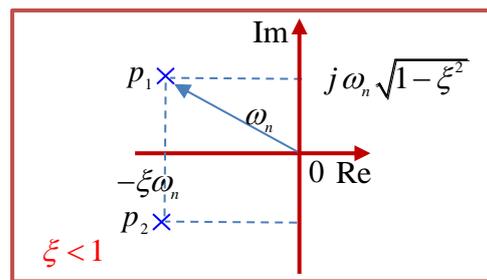
La figure ci-dessous donne la position des pôles dans le plan complexe en fonction de la valeur du coefficient d'amortissement.



deux pôles réels négatifs



pôles réel négatif double



deux pôles complexes conjugués à partie réelle négative

3.1.1. Réponse impulsionnelle :

✚ **Cas1 :** ($\xi > 1$)

Comme dans le cas du système du 1^{er} ordre, l'entrée est une impulsion de Dirac $\delta(t)$, alors sa transformée de Laplace $U(p) = 1$.

Alors on peut décomposer la sortie du système $Y(p)$ en éléments simples sous la forme :

$$Y(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = \frac{C_1}{p + \frac{1}{\tau_1}} + \frac{C_2}{p + \frac{1}{\tau_2}} = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \left(\frac{1}{p + \frac{1}{\tau_1}} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_2}} \right)$$

En appliquant Laplacien inverse, on trouve la réponse impulsionnelle comme suit :

$$y(t) = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \left[e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2} \right]$$

La figure suivante représente la réponse d'un système du 2^{ème} ordre pour $\xi = 1.2$. Le système revient au repos, il est donc stable.

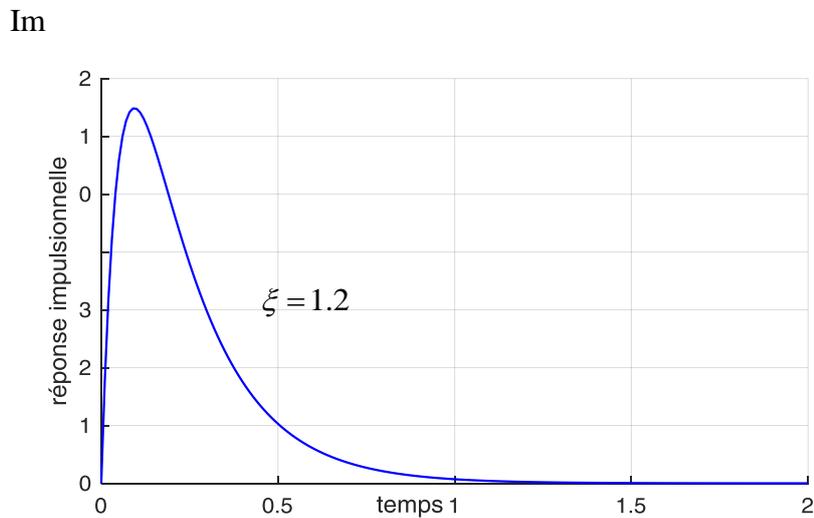


Fig.3.16 : Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2 avec $\xi > 1$

✚ **Cas2 :** ($\xi = 1$), dans ce cas nous aurons :

$$Y(p) = \frac{K \omega_n^2}{(p^2 + 2\omega_n p + \omega_n^2)} = \frac{K \omega_n^2}{(p + \omega_n)^2}$$

d'où , la réponse $y(t)$ a pour expression :

$$y(t) = K \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

Comme dans le cas précédent, nous obtenons une réponse similaire de ($\xi > 1$).

✚ **Cas3 :** ($\xi < 1$), dans ce cas $Y(p)$ ne se décompose pas, nous pouvons écrire :

$$Y(p) = \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{K \omega_n^2}{(p + \xi\omega_n)^2 + \omega_n^2 - \xi^2\omega_n^2}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$Y(p) = b \cdot \frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}, \text{ avec } \omega^2 = \omega_n^2(1 - \xi^2), b = \frac{K \omega_n^2}{\omega} \text{ et } a = \xi\omega_n$$

La réponse temporelle a donc pour expression

$$y(t) = b \cdot e^{-at} \sin(\omega t) = \frac{K \omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t)$$

l'allure de la réponse pour $\xi = 0.1$ est représenté sur la figure suivante :

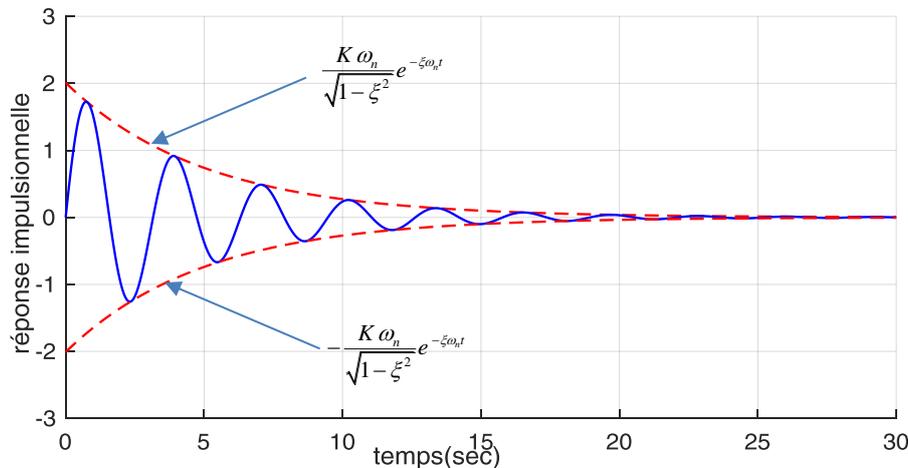


Fig.3.17 : Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2 avec $\xi < 1$

3.1.2. Réponse indicielle :

Comme dans le cas du système du 1^{er} ordre, l'entrée appliquée est un échelon d'amplitude E_0 ,

$e(t) = E_0 \mu(t)$ soit dans le domaine de Laplace $E(p) = \frac{E_0}{p}$. L'expression de la sortie du système

est alors:

$$Y(p) = G(p)U(p) = \frac{E_0}{p} \frac{KE_0\omega_n^2}{p^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}p + 1} = \frac{E_0}{p} \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

✚ **Cas1 :** ($\Delta > 1 \Rightarrow \xi > 1$): La décomposition en éléments simples nous donne :

$$Y(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = KE_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_1}} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_2}} \right]$$

La réponse temporelle $y(t)$ correspondante s'écrit comme suit :

$$y(t) = KE_0 \left[1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_2} \right]$$

La figure suivante représente la réponse d'un système du second ordre pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement ξ .

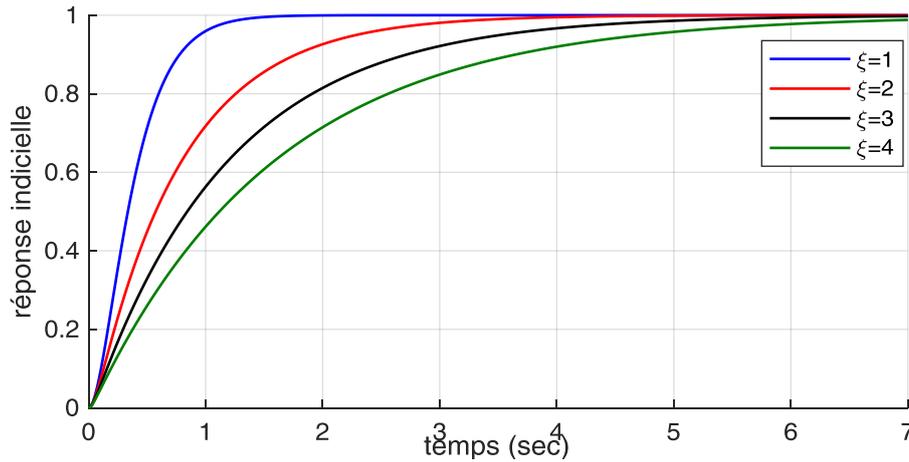


Fig.3.18 : Réponse impulsionnelle d'un système d'ordre 2 avec $\xi < 1$

Remarques 3.3 :

- Quelques soient les valeurs de τ_1 et τ_2 , la réponse indicielle $y(t)$ est monotone croissante sur \mathbb{R}^+ , donc pas de dépassement. La réponse est alors qualifiée d'apériodique puisqu'elle ne présente aucun dépassement relativement à la valeur finale. Plus le facteur d'amortissement est grand, plus la réponse est aplatie. La réponse la plus rapide est obtenue pour un facteur d'amortissement très proche de 1.
- La réponse est dans ce cas très semblable à celle d'un 1^{er} ordre. La différence est remarquable à $t = 0$: le 1^{er} ordre démarre directement avec une pente différente de zéro alors que le système du 2^{ème} ordre présente une pente nulle (on dit que la réponse est de forme S).

✚ **Cas 2 :** ($\Delta = 0 \Rightarrow \xi = 1$) dans ce cas nous avons :

$$Y(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{E_0}{p} \frac{K \omega_n^2}{(p + \omega_n)^2} = KE_0 \left[-\frac{\omega_n}{(p + \omega_n)^2} - \frac{1}{p + \omega_n} + \frac{1}{p} \right]$$

Finalement, la réponse $y(t)$ a pour expression :

$$y(t) = KE_0 \left[1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t} \right]$$

Comme dans le cas précédent, nous obtenons une réponse apériodique qui tend très rapidement (régime critique) vers l'asymptote KE_0 (voir la figure 3.19).

✚ **Cas 3 :** ($\Delta < 0 \Rightarrow \xi < 1$): Nous avons maintenant :

$$Y(p) = \frac{E_0}{p} \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2} = \frac{KE_0}{p} \frac{K \omega_n^2}{(p + \omega_n)^2} = KE_0 \left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2\xi \omega_n}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2} \right]$$

La réponse temporelle correspondante est de la forme :

$$y(t) = b.e^{-at} \sin(\omega t) = KE_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \varphi\right) \right]$$

avec $\left\{ \cos(\varphi) = \xi, \sin(\varphi) = \sqrt{1-\xi^2} \right.$

La réponse obtenue, est constituée d'une sinusoïde amortie par une exponentielle décroissante, avec une asymptote horizontale en KE_0 . La Figure 3.8 montre l'évolution de la réponse indicielle d'un système d'ordre deux, lorsque t tend vers l'infini la sortie $y(t)$ tend vers l'asymptote K en présentant un régime dit oscillatoire amorti. D'autre part, on constate que la réponse présente un maximum plus important que l'asymptote finale, $y(\infty) = KE_0$. On parlera alors de dépassement du signal de sortie.

La figure suivante représente différentes réponses indicielles, en fonction du facteur d'amortissement ξ

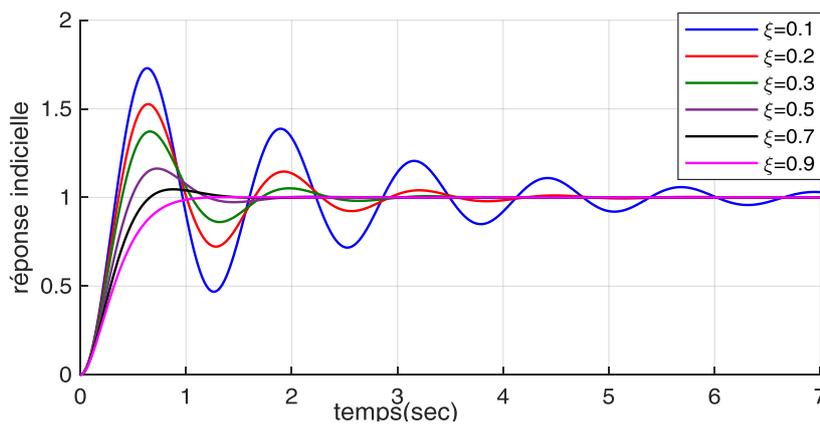


Fig .3.19 : Influence du facteur d'amortissement ξ sur la réponse indicielle

La figure suivante représente différentes réponses indicielles, en fonction de la pulsation propre non amortie ω_n .

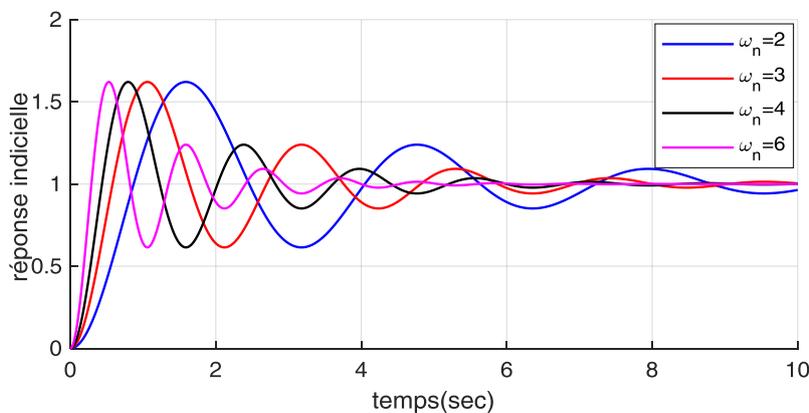


Fig.3.20 : Influence de la pulsation des oscillations libres ω_n sur la réponse indicielle

✚ **Temps de pic** (t_{pic}) : Temps nécessaire pour atteindre le 1^{er} dépassement. Il est défini

lorsque le signal de sortie atteint sa valeur maximum. $t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$.

✚ **Temps de réponse ou d'établissement (settling time t_r)** : Temps requis pour que la courbe de sortie atteigne et reste à l'intérieur d'une bande de $n\%$, exprimée en pourcentage

(généralement 5%), relativement à sa valeur finale. $t_r(n\%) = \frac{1}{\omega_n \xi} \ln\left(\frac{100}{n}\right)$.

✚ **Pseudo-période (T_p)** : La pseudo-période T_p définie par la période de la sinusoïde amortie (C'est le temps qui s'écoule entre deux maxima successifs (ou deux minima)).

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}.$$

Pour plus de détails sur les méthodes de calcul de ces paramètres, voir la référence [cours_d'asservissement]

Remarque 3.4:

- Les courbes des fonctions $s(t) = 1 \pm \frac{\exp(-\xi\omega_n t)}{\sqrt{1-\xi^2}}$ sont les courbes enveloppes de la réponse indicielle (voir la figure 3.21). La sortie demeure toujours à l'intérieur de cette paire d'enveloppes. La constante de temps de ces enveloppes est $\tau = \frac{1}{\xi\omega_n}$.
- La vitesse de décroissance de la réponse transitoire dépend de la constante de temps τ . Pour ω_n donné, le temps d'établissement t_r est une fonction du coefficient d'amortissement ξ . Les systèmes très légèrement amortis, présentent un t_r plus important que celui pour les systèmes correctement amortis. Pour les systèmes très amortis ($\xi > 1$), le temps d'établissement devient important à cause du départ très lent de la réponse.
- La description analytique exacte du temps d'établissement est difficile à obtenir. Il est cependant démontré que, pour un critère de $\pm 5\%$ et $0 < \xi < 0.9$, ce temps t_r varie légèrement et reste approximativement égal à 3 fois la constante de temps τ . Il atteint un minimum autour de $\xi \simeq 0.68$ puis augmente, presque linéairement, pour les grandes valeurs de ξ .

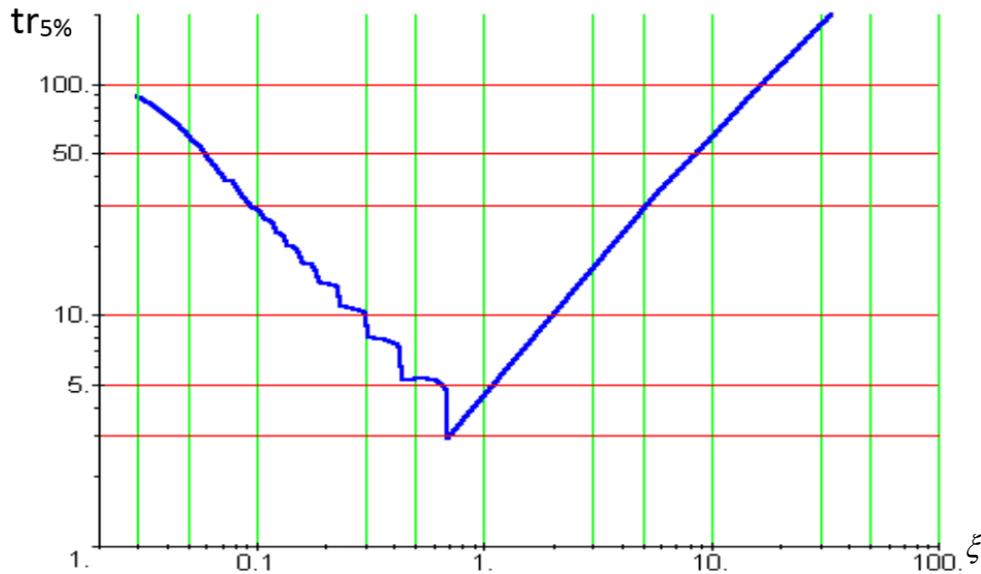


Fig.3.22 : Temps de réponse à 5% d'un système linéaire du 2nd ordre

- Il est donc possible de remonter aux paramètres du système à partir de relevés graphiques effectués sur la courbe de réponse indicielle du système. Le gain statique du système est calculé de la même manière qu'un système d'ordre un, c'est-à-dire

$$K = \frac{\Delta y(t)}{\Delta e(t)} = \frac{y(\infty)}{E_0}$$

Exemple : Soit la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{9}{p^2 + 3p + 9}$$

on peut déduire : $\omega_n^2 = 9 \Rightarrow \omega_n = 3$. On obtient alors :

$$2\xi\omega_n = 3 \Rightarrow \xi = 0.5 \quad \text{et} \quad K = 1$$

$$\text{Le dépassement : } D \% = 100 \exp\left(\frac{-0.5\pi}{\sqrt{1-0.5^2}}\right) = 16,3\%$$

$$\text{La pseudo-période : } T_p = \frac{2\pi}{3\sqrt{1-0.5^2}} = 2.41s$$

$$\text{Le temps de pic : } t_{pic} = \frac{\pi}{3\sqrt{1-0.5^2}} = 1.20s$$

$$\text{Le temps de montée : } t_m = \frac{\pi}{2 \times 3\sqrt{1-0.5^2}} = 0.6s$$

$$\text{Le temps de réponse : } t_r = \frac{1}{3 \times 0.5} \ln\left(\frac{100}{5}\right) \approx 2s$$

4. Systèmes d'ordre supérieur :

Un intérêt particulier a été accordé dans les paragraphes précédents aux systèmes du 1^{er} et du 2^{ème} ordre. Les notions de base abordées jusqu'à présent s'étendent aux systèmes d'ordre supérieur à deux, mais la caractérisation théorique de leurs réponses est plus délicate.

Définitions :

- Un système d'ordre élevé comporte un grand nombre de paramètres et étudier ses réponses temporelles (surtout si on l'effectue de la même manière que celui du 2^{ème} ordre) peut se révéler fastidieux. L'objectif est de pouvoir déterminer le comportement d'un système en fonction de ses réponses temporelles tout en considérant un nombre restreint de paramètres (un système relativement simple).
- Un système d'ordre élevé comporte un grand nombre de pôles (réels ou complexes conjugués) et tous ne possèdent pas la même influence sur les réponses temporelles.
- La forme générale de la réponse temporelle d'un système d'ordre supérieur est constituée de la somme de fonctions du temps élémentaires (appelées mode du système) définies par la nature des pôles (réels, complexes conjugués).
- La réponse transitoire d'un tel système peut être fortement marquée par certains pôles plutôt que d'autres. Ces pôles dits dominants sont situés près de l'axe imaginaire dans la carte des pôles. Ils correspondent à des constantes de temps élevées ou à des amortissements faibles, la réponse se comporte donc comme un système du 1^{er} ou du 2^{ème} ordre.

On propose par la suite une démarche à suivre pour appréhender un tel système, en prenant comme exemple illustratif un système d'ordre 3.

Dans ce cas, la fonction de transfert d'un système d'ordre 3 admet trois pôles réels ou un pôle réel et une paire de pôles complexes conjugués.

✚ Cas de pôles réels :

Dans ce cas la fonction de transfert s'écrit comme suit :

$$G(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)}$$

Ce système possède donc trois pôles réels $p_i = -\frac{1}{\tau_i}$ ($i = 1, 2, 3$)

Le régime transitoire est apériodique et ne présente en conséquence aucune oscillation.

Si les trois constantes de temps sont de même ordre de grandeur, la contribution de chacune dans le régime transitoire est pratiquement la même. En revanche, si les constantes de temps sont dans un rapport nettement disproportionné, il est possible de négliger la ou les plus petite(s) constante(s) par rapport à la ou les constante(s) de temps dominante(s).

Pour fixer les idées, soit $\tau_1 = 3, \tau_2 = 0.3$ et $\tau_3 = 0.1$ auxquelles correspondent les pôles $p_1 = -0.33, p_2 = -3.33$ et $p_3 = -10$ et sa réponse indicielle unitaire vaut :

$$\frac{G(p)}{p} = \frac{1}{p} \frac{1}{(1+3p)(1+0.3p)(1+0.1p)} = \frac{1}{p} - \frac{3.44}{1+3p} + \frac{0.05}{1+0.3p} - \frac{0.0017}{1+0.1p}$$

d'où $y(t) = 1 - 1.15e^{-0.33t} + 0.16e^{-3.33t} - 0.017e^{-10t}$

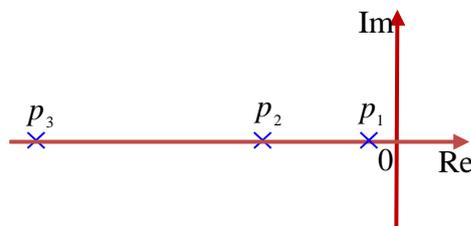


Fig.3.23 : pôles de la fonction de transfert d'ordre 3.

Le comportement transitoire est celui imposé par la constante dominante $\tau_1 = 3$ et donc du pôle dominant $p_1 = -0.33$, le moins éloigné de l'axe des imaginaires (les plus proches de 0). Le temps de réponse est pratiquement égal à $t_r \approx 3\tau_1 \approx 9$.

La figure suivante représentant les réponses à un échelon unitaire confirme cette approximation, avec $K = 1$.

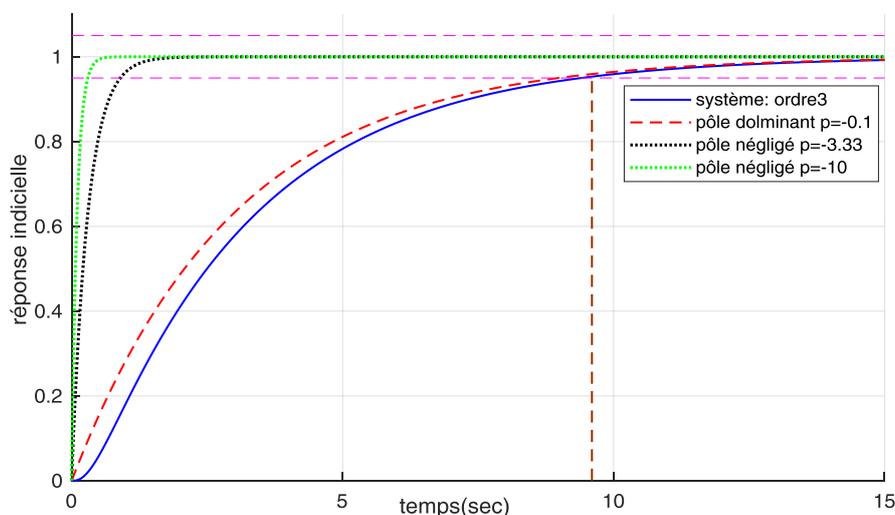


Fig.3.24 : réponse indicielle et pôles dominants d'un système d'ordre 3.

Analyse :

- Lorsque le temps s'écoule, les termes en e^{-10t} et $e^{-3.33t}$ décroissent très rapidement et devient très vite négligeables.
- Les pôles les plus petits correspondant aux termes qui durent le plus longtemps (dominant la réponse temporelle) conservent plus longtemps leur influence sur l'allure de la réponse temporelle. Dans notre exemple, -0.33 est le pôle lent et -3.33 et -10 sont les pôles rapides.
- Le tracé de la réponse $y(t)$ montre que le système du 3^{ème} ordre précédent a un comportement transitoire très voisin d'un système d'ordre 1 qui n'aurait qu'un seul pôle dominant -0.33 : $y(t) = -1.15e^{-0.33t}$. Dans ces cas, on peut alors représenter le système de manière suffisamment fidèle par ses pôles dominants, ce qui présente l'avantage de simplifier les calculs, notamment ceux nécessaires à l'obtention des réponses temporelles.
- Un pôle peut être négliger dès qu'il est 3 ou 4 fois supérieur au précédent.

Cas de pôles réels :

En considérant un système d'ordre trois, une seule possibilité alors pour les pôles de la fonction de transfert : une paire de pôles complexes conjuguées et un pôle réel :

$$p_1 = -\xi\omega_n + j\xi\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad p_2 = -\xi\omega_n - j\xi\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad p_3 = -a, \quad a > 0$$

La fonction de transfert peut s'écrire de manière générale sous la forme :

$$G(p) = \frac{K \omega_n^2}{(p + a)(p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2)}$$

Afin de comparer la contribution de chaque pôle dans le régime transitoire, il convient de voir la position de la partie réelle dans le plan complexe. Si les pôles sont situés au voisinage d'une verticale, alors le régime transitoire est caractérisé par la contribution de chaque pôle et aucun d'entre eux ne domine.

Dans le cas contraire, deux situations sont possibles comme il est illustré sur les figures suivantes :

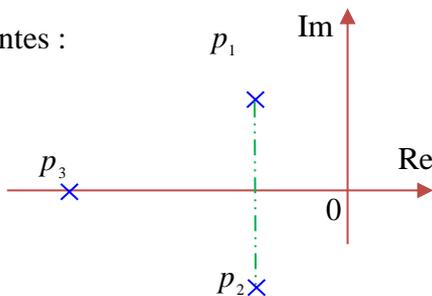


Fig3.25. pôles complexes dominants ($a \gg \xi\omega_n$)

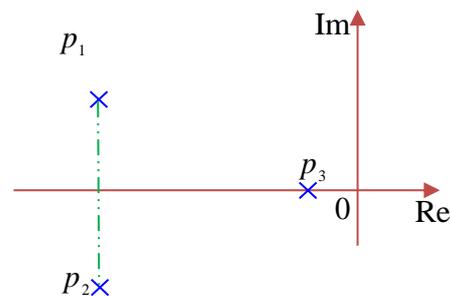


Fig3.26. pôle réel dominants ($a \ll \xi\omega_n$)

Dans le cas où $a \gg \xi\omega_n$, le système peut être approché par un modèle d'ordre deux de paramètres fondamentaux ξ et ω_n , alors que dans l'autre cas, le système peut être approché par un modèle d'ordre un de constante de temps égale à $\tau = \frac{1}{a}$.

Les figures suivantes correspondent à l'étude des exemples suivants :

Pôles complexes dominants	pôle réel dominant
$p_1 = -0.1 + j 0.3$	$p_1 = -0.1 + j 0.3$
$p_2 = -0.1 - j 0.3$	$p_2 = -0.1 - j 0.3$
$p_3 = -1$	$p_3 = -0.05$

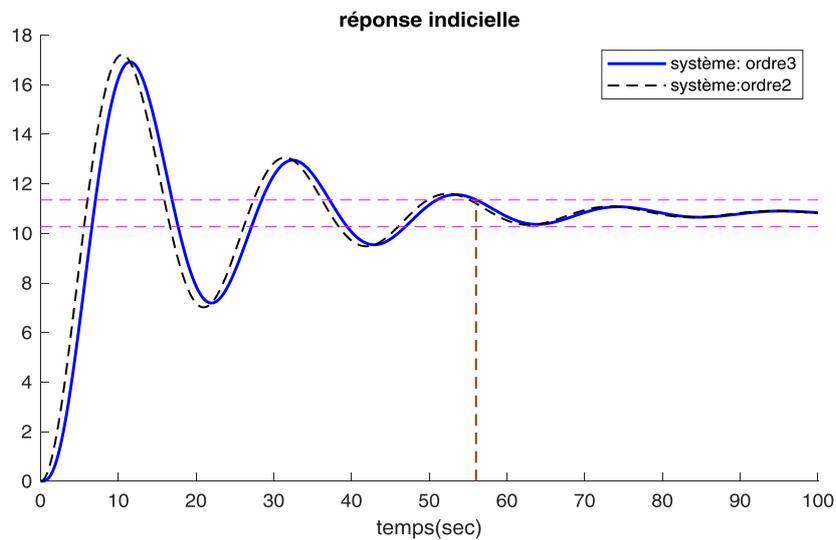


Fig3.27 : cas de pôles complexes dominants

5. Influence des zéros sur l'allure de la réponse indicielle

- Les zéros ont seulement une influence transitoire sur le comportement d'un système.
- La présence des zéros peut provoquer des dépassements indésirables sur la réponse indicielle d'un système, ou encore sur le signal de commande.
- Les zéros n'interviennent qu'au niveau des amplitudes des fonctions temporelles, mais pas du tout sur les paramètres dynamiques.

Exercices sur le chapitre 3

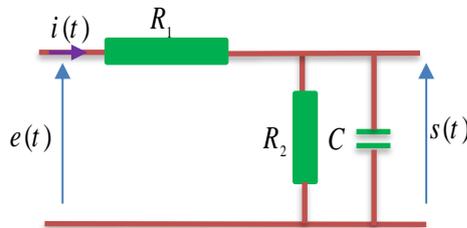
Exercice 01 : Soit les systèmes suivants du 1^{er} ordre ;

$$1) G_1(p) = \frac{2}{p+1}, \quad 2) G_2(p) = \frac{3}{2p+3} \quad 3) G_3(p) = \frac{10}{p+10}$$

Calculez pour chaque système ;

- 1) Le gain statique K et la constante de temps τ
- 2) Les réponses indicielles $h(t)$,
- 3) Le temps de montée t_m et le temps de réponse t_r à 5%

Exercice 02 : Soit le circuit RC suivant :

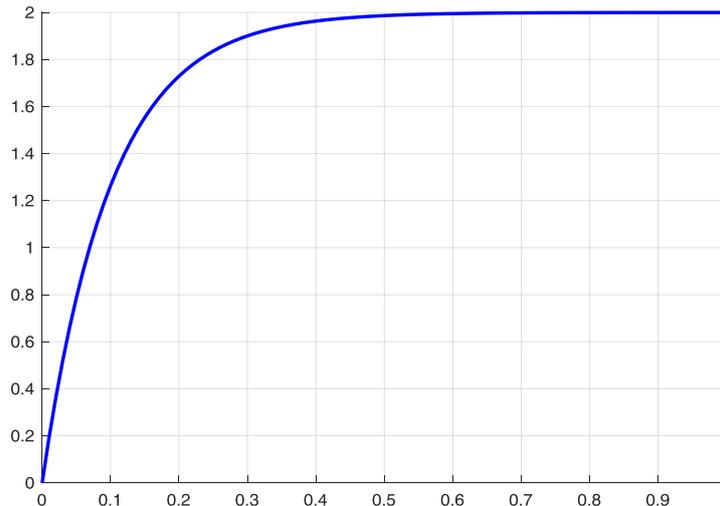


- 1) Déterminer la fonction de transfert $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ et montrer qu'il s'agit d'un système du premier ordre.
- 2) Le gain statique K et la constante de temps τ en fonction de R_1 , R_2 et C
- 3) Pour $C = 2\mu F$, $R_1 = R_2 = 1M\Omega$
 - 3.1) Calculer les valeurs de gain statique K et de constant de temps τ
 - 3.2) Donner l'expression de la réponse indicielle.

Exercice 03 : On cherche à identifier les paramètres d'un système du 1^{er} ordre à partir de sa réponse indicielle. Soit $G(p)$ la fonction de transfert d'un système du 1^{er} ordre donné par

$$G(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

$E_0 = 2V$. La réponse indicielle $y(t)$ est représentée sur la figure suivante :



- 1) Calculer le gain statique K et la constante de temps τ en expliquant bien la méthode utilisée
- 2) Dédurre alors sa fonction de transfert $G(p)$.

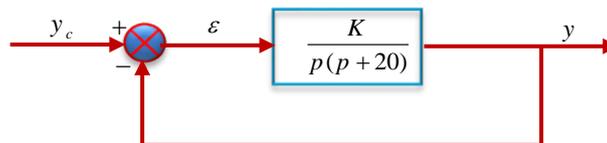
Exercice 04 : Soit les systèmes suivants du 2^{ème} ordre ;

$$1) G_1(p) = \frac{200}{p^2 + 10p + 100}, \quad 2) G_2(p) = \frac{10}{p^2 + 0.2p + 1} \quad 3) G_3(p) = \frac{20}{p^2 + 2p + 4}$$

Calculez pour chaque système ;

- Le gain statique K et la constante de temps τ
- La pulsation propre non amortie ω_n
- Le facteur d'amortissement ξ
- Le temps de pic t_{pic}
- Le premier dépassement $D\%$
- Le temps de réponse t_r à 5%
- Le pseudo période T_p

Exercice 05 : Soit le système à retour unitaire suivant :

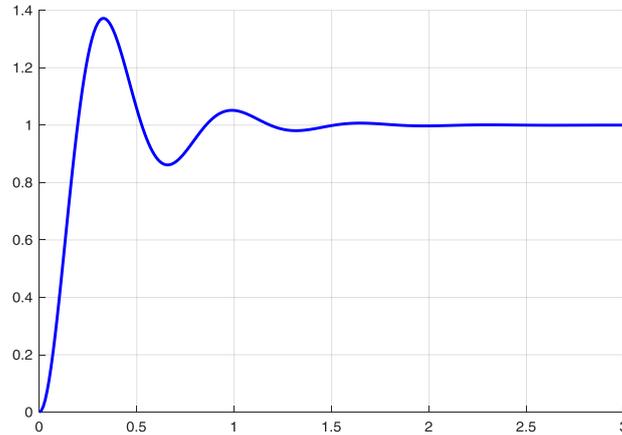
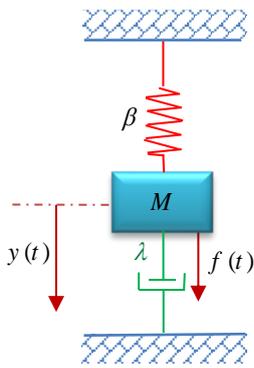


- 1) Calculez K afin d'assurer un dépassement $D \leq 10\%$ sur la réponse indicielle.
- 2) Calculez K afin d'obtenir un système avec un amortissement critique.
- 3) Calculez K afin d'obtenir un système avec un amortissement idéal.

Exercice 06 : Soit le système mécanique suivant (figure a).

1) Déterminer la fonction de transfert de ce système en fonction de β , M et λ puis montrer qu'il s'agit d'un système du second ordre.

2) Quand une force $F = 2N$ est appliquée à l'instant $t = 0$ la masse M se met à osciller comme illustré par la figure (b)



- Déterminer le gain statique K , le facteur d'amortissement ξ et la pulsation ω_n à partir de la courbe de la figure (b)

Exercice 07 : Soit le système asservi représenté par la figure (a) où le bloc $G(p)$ représenté par la figure (b).

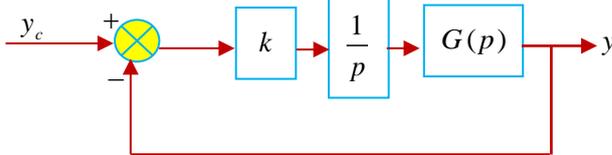


Figure (a)

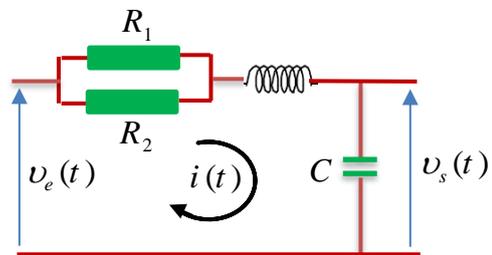
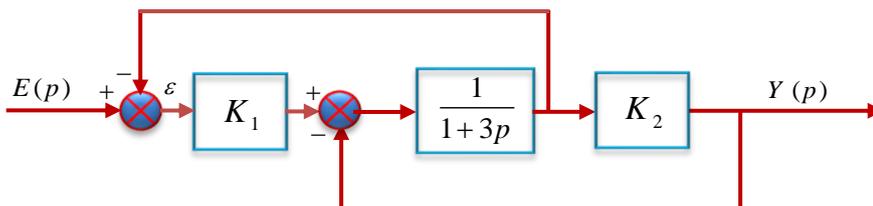


Figure (b)

1) Trouver l'équation différentielle du circuit représenté sur la figure (b)

2) Dédire la fonction de transfert $G(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$.

Exercice 08: Soit le système décrit par le diagramme fonctionnel suivant :



- 1) Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $G(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}$ par la méthode de votre choix,
- 2) Mettre $G(p)$ sous sa forme canonique,
- 3) Déterminer K_1 et K_2 pour avoir un temps de réponse inférieur à $t_r(5\%) \leq 0.5s$ et un dépassement $D_1 \leq 10\%$.

Exercice 09 : Considérons un système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = 2e(t)$$

On injecte dans ce système un signal d'entrée $e(t)$ correspondant à un échelon. Soit $e(t) = u(t)$. On cherche à identifier l'expression du signal de sortie $y(t)$.

- 1) Calculer la fonction de transfert de ce système (conditions initiales supposées nulles).
- 2) Quels sont les pôles et les zéros ?
- 3) Donner le diagramme des pôles et des zéros
- 4) Trouver alors l'expression de la sortie $y(t)$.

Exercice 10 : On suppose que les conditions initiales sont nulles,

Soit $h(t)$ une réponse indicielle définie par : $h(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)u(t)$, avec $u(t)$ représente un signal échelon unitaire.

- 1) Calculer la réponse impulsionnelle $g(t)$
- 2) Dédire alors la fonction de transfert $G(p)$

Chapitre 4

Réponses fréquentielles des systèmes linéaires

1. Définition :

L'analyse fréquentielle est l'étude du comportement et de la réponse d'un système linéaire d'ordre quelconque à une entrée sinusoïdale. La réponse en fréquence du système est l'étude du régime permanent.

Considérons un système linéaire d'ordre quelconque de fonction de transfert $G(p)$ avec une entrée sinusoïdale d'amplitude donnée U_0 et de pulsation donnée ω du type $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$. La propriété de linéarité du système fait que la sortie sera également une sinusoïde, de même pulsation que le signal d'entrée mais d'amplitude différente et déphasé par rapport au signal d'entrée. On aura : $y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

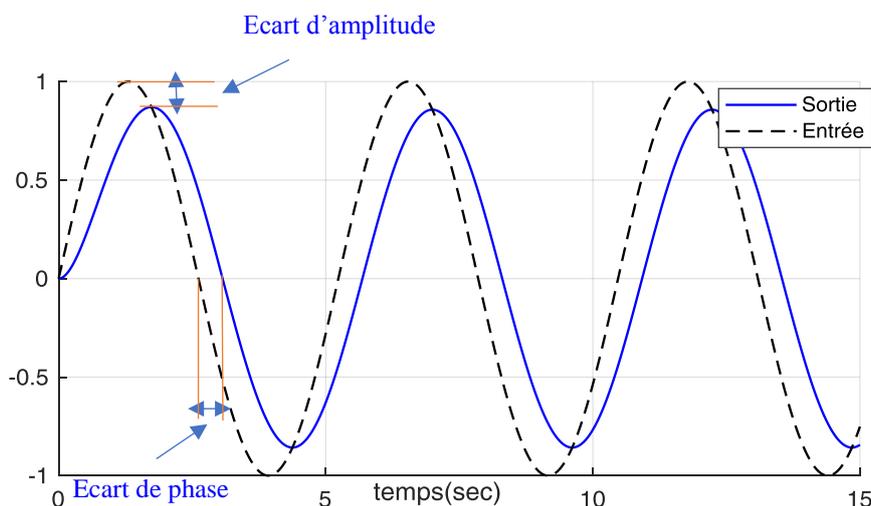


Fig.4.1 : Réponse d'un système linéaire à une entrée sinusoïdale

✚ Pourquoi réaliser une étude dans le domaine fréquentiel ?

L'analyse fréquentielle est importante pour :

- **L'analyse :**

- Analyse de stabilité des systèmes en boucle fermée : critère de stabilité de Nyquist (stabilité des systèmes linéaires en BF à partir de la réponse fréquentielle du système en BO).
- Analyse des performances des systèmes dynamiques (précision, stabilité ...).
- Analyse de la robustesse d'une loi de commande en boucle fermée en présence d'incertitudes de modélisation.

- **L'identification :**

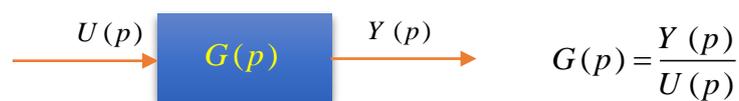
- Détermination de la fonction de transfert des systèmes compliqués (à partir de données d'excitation sinusoïdale).
- Etude de la représentation sur une bande de fréquences donnée, correspondant au fonctionnement "réel" du système.

- **La commande :**

- Le réglage d'un régulateur peut être effectué directement à l'aide d'un diagramme fréquentiel (Bode, Nyquist ou Nichols).
- Approche fréquentielle essentielle en commande robuste.
- Automatisation de la synthèse de régulateurs est souvent liée à une optimisation effectuée dans le domaine fréquentiel.

- ✚ **Fonction de transfert complexe (harmonique) – rappel :**

La fonction de transfert d'un système linéaire continu et invariant est une fonction de la forme:



Où $U(p)$ et $Y(p)$ sont les transformées dans le domaine de Laplace des fonctions temporelles $u(t)$ et $y(t)$.

La fonction de transfert complexe $G(j\omega)$ s'obtient simplement en remplaçant la variable de Laplace p par la variable $j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert $G(p)$. La fonction de transfert complexe est donc $G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$.

– Dans une analyse harmonique d'un système, on va faire le lien entre la fonction de transfert et la réponse de ce système à une sinusoïde. Cette réponse sera caractérisée par deux paramètres dépendent de la pulsation ω de l'entrée.

- **Le gain :** $|G(j\omega)|$ que l'on note en général $G(\omega)$ représente donc le rapport entre le spectre du signal de sortie et celui du signal d'entrée. Autrement dit $|G(j\omega)|$ représente le rapport des amplitudes des sinusoïdes de sortie et d'entrée, pour une pulsation ω donnée. C'est donc le gain fréquentiel du système à cette pulsation, que l'on appelle également le gain réel. Et on écrit $|G(j\omega)| = \frac{Y_0}{U_0}$

- **Déphasage :** $\varphi(\omega)$: l'équation $Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega)$ nous conduit également à l'égalité des arguments

$$\arg(Y(j\omega)) = \arg(G(j\omega)) + \arg(U(j\omega))$$

soit

$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = \arg(Y(j\omega)) - \arg(U(j\omega))$$

Cette fonction correspond au déphasage, à la pulsation ω donnée, entre la sinusoïde de sortie et celle d'entrée.

La fonction de transfert harmonique, nous fournit un gain réel $|G(j\omega)|$ et un déphasage $\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$ induit par le système vis-à-vis des composantes sinusoïdales. Elle traduit donc le comportement fréquentiel du système.

✚ Lieux de transfert :

La fonction de transfert harmonique $G(j\omega)$ est une fonction complexe de la variable ω , l'étude de cette fonction peut se faire de manière graphique par le lieux de transfert (le lieu des points $G(j\omega)$ quand la pulsation ω varie de 0 à l'infini $+\infty$).

On distingue principalement trois types de représentation : le diagramme de Bode, la représentation de Nyquist et la représentation de Black. On s'intéresse uniquement à l'étude de diagramme de Bode et de Nyquist.

2. Diagrammes de BODE (Lieu de Bode):

Les diagrammes de Bode consistent à tracer deux graphes :

Le premier représente le gain du système en decibels (dB), quand la pulsation ω (rad/s) varie, et de surcroît, avec une échelle logarithmique en abscisse.

L'amplitude en (dB) est définie par la formule suivante :

$$G_{dB} = 20 \log |G(j\omega)|$$

Le deuxième montre l'évolution de déphasage $\varphi(\omega)$ en degré ou en rad, par rapport à ω , toujours en échelle logarithmique :

La phase en (dB) est définie alors par la formule suivante :

$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega))$$

En règle générale, on porte directement les valeurs de ω sur l'axe des abscisses en respectant l'échelle logarithmique et en plaçant la pulsation $\omega=1$ à l'origine de cet axe (puisque'elle correspond à $\log \omega = 0$). On notera également que la pulsation $\omega = 0$ ne peut apparaître sur l'axe qu'en $(-\infty)$.

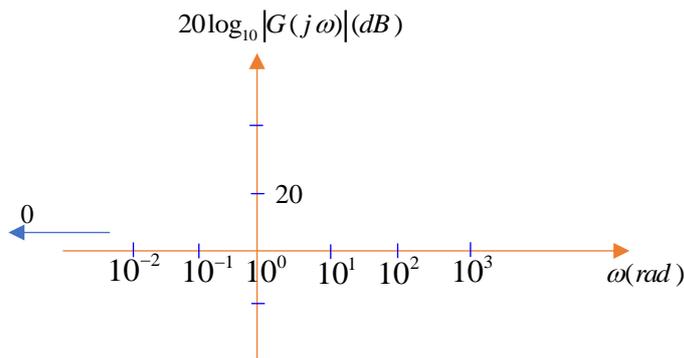


Fig.4.2 : Échelle logarithmique du diagramme de Bode

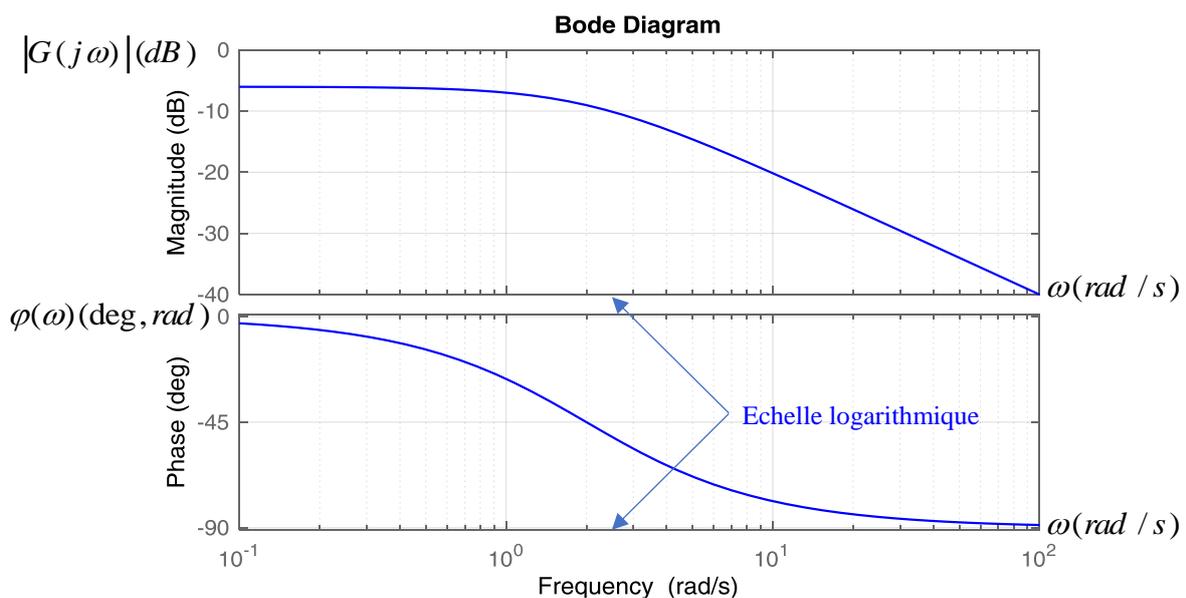


Fig.4.3 : Diagramme de Bode

Pourquoi tracer un diagramme de Bode ?:

Pour connaître le comportement d'un filtre, il est important de savoir s'il amplifie ou atténue le signal d'entrée, et de combien il le déphase. Bien sûr, le comportement d'un filtre évolue en fonction de la fréquence. Ainsi, un filtre qui amplifie le signal d'entrée pour certaines fréquences, pourra atténuer celui-ci dans certaines autres gammes de fréquences. Le diagramme de Bode permet de renseigner sur le comportement fréquentiel d'un filtre.

Comment tracer un diagramme de Bode ?:

Les fonctions qui, à la variable $\omega=0$, associent $G_{dB}(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ sont la plupart du temps compliquées à étudier.

C'est pourquoi on préfère en général tracer un diagramme de Bode simplifié que l'on appelle diagramme asymptotique.

1) On commence tout d'abord par déterminer les asymptotes de $G_{dB}(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ lorsque $\omega \rightarrow 0$, puis lorsque $\omega \rightarrow \infty$. Pour cela, on cherche un équivalent (ou une limite) de la fonction de transfert $G(j\omega)$.

2) On calcule la valeur de $G(j\omega)$ pour des valeurs particulières de ω . Par exemple, on pourra selon les cas s'intéresser à des valeurs de ω :

- Qui annulent la partie imaginaire ou la partie réelle du dénominateur de $G(j\omega)$,
- Ou pour lesquelles l'argument de $G(j\omega)$ vaut $-\pi/4$, ou $-\pi/2$, ou $-3\pi/4$...
- Ou d'autres valeurs particulières ...

On déduit de ces valeurs particulières de ω des points particuliers par lesquels passe le diagramme réel de Bode. Il est ainsi possible de placer le diagramme réel par rapport au diagramme asymptotique.

Remarque 4.1 : Si $G(j\omega) = G_1(j\omega).G_2(j\omega)...G_n(j\omega)$ (connexion en série)

Par conséquent le module en dB du système considéré est la somme des modules élémentaires en dB. Par ailleurs, la phase du système est la somme des arguments.

$$G_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| = G_{1dB} + G_{2dB} + \dots + G_{ndB}$$

$$\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \dots + \varphi_n(\omega)$$

Ainsi, l'avantage du diagramme de Bode est que les courbes des éléments constituant la fonction de transfert suivent des asymptotes. De ce fait, il est d'usage de tracer une représentation approximée de la réponse harmonique en utilisant le tracé de diagrammes asymptotiques des éléments constituant la fonction de transfert et en les additionnant afin d'obtenir le tracé asymptotique global.

3. Diagrammes de Nyquist (lieu de Nyquist) :

- Le diagramme de Nyquist d'un système est le lieu, en coordonnées polaires, des points M de coordonnées $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ (figure 4.4) (Ce diagramme est toujours orienté dans le sens des ω croissants).

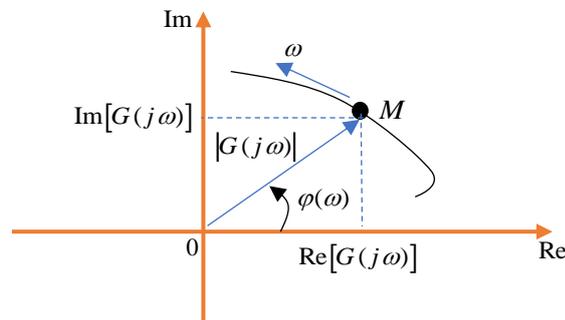


Fig.4.4 : Définition du diagramme de Nyquist.

On peut écrire alors

$$G(j\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] + \text{Im}[G(j\omega)]$$

- Le diagramme de Nyquist (lieu complet) correspond à ω variant de $-\infty$ à $+\infty$. Il s'obtient par symétrie par rapport à l'axe réel du lieu de Nyquist.
- Le diagramme de Nyquist est l'image par $G(p)$ du contour fermé appelé contour d'exclusion de Nyquist. Ce contour entoure tous les pôles et zéros de $G(p)$ à partie réelle strictement positive. Si $G(p)$ a des pôles nuls ou imaginaires purs, le contour d'exclusion les évite par des demi-cercles de rayon $\varepsilon \rightarrow 0$.

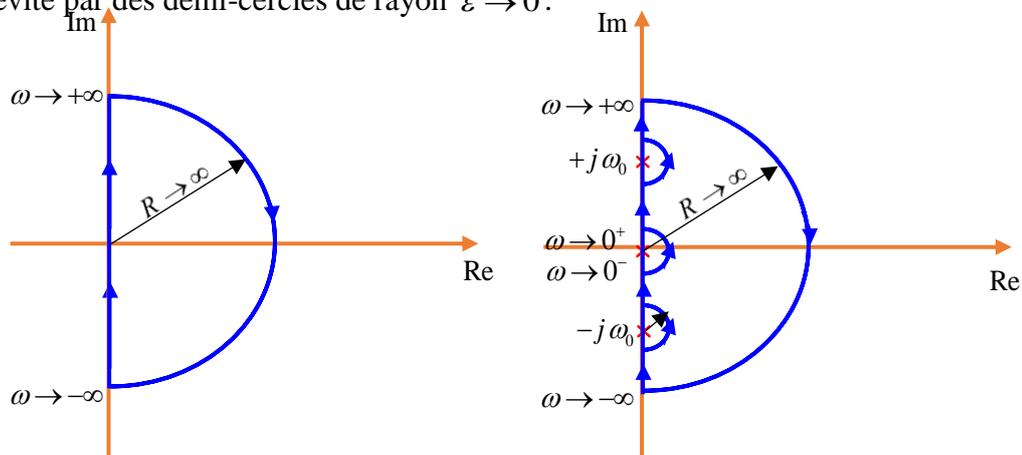


Fig.4.5 : Contour d'exclusion de Nyquist

4. Caractéristiques fréquentielles du système du 1^{er} ordre - Etude harmonique :

La fonction de transfert complexe d'un système canonique du premier ordre s'écrit et en posant $p = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1 + j\tau\omega)}$$

Avec $K > 0$ est le gain statique du système, $\tau > 0$ sa constante de temps.

- Le module : $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$
- La phase, $\varphi(\omega) = \underbrace{\arctan(\text{num})}_{=0} - \arctan(\text{den}) = -\arctan(\tau\omega)$

$$\text{rappel : } X = a + jb = \arg(X) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan(b) - \arctan(a)$$

Le tracé du diagramme asymptotique consiste à séparer l'espace des pulsations en deux domaines, selon que $\tau\omega$ est très grand ou très petit devant 1.

❖ Diagrammes Asymptotiques de Bode :

- Le module G_{dB} (en dB) en fonction de ω

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$G_{dB} = 20\log(|G(j\omega)|) = 20\log(K) - 20\log\left(\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}\right)$$

$$= 20\log(K) - 10\log(1 + (\tau\omega)^2)$$

$$\Rightarrow G_{dB} = 20\log(K) - 10\log(1 + (\tau\omega)^2)$$

- La phase (l'argument de) φ en fonction de ω

$$\varphi(\omega) = \arctan(K) - \arctan(\tau\omega)$$

Etude des asymptotes basses fréquences (lorsque $\omega \rightarrow 0$):

- Si $\tau\omega \ll 1$ soit $\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dB} = K \Rightarrow G_{dB} = 20\log(K)$

Dans ce cas, la courbe de gain suit une asymptote horizontale d'équation $G_1 = 20\log(K)$,

D'autre part, on trouve ;

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\varphi(\omega)) = 0$$

Le diagramme de phase présente lui aussi une asymptote horizontale lorsque $\omega \rightarrow 0$.

Etude des asymptotes hautes fréquences (lorsque $\omega \rightarrow \infty$):

- Si $\tau\omega \gg 1$ soit $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ nous avons

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20\log(K) - 10\log(\tau\omega)^2 \\ &= 20\log(K) - 20\log(\tau) - 20\log(\omega) \\ &= 20\log\left(\frac{K}{\tau}\right) - 20\log(\omega) \end{aligned}$$

Ceci correspond à est une droite de pente -20 dB par décade, C'est aussi équivalent à une pente de -6dB par octave.

Définition : On appelle qu'une décade correspond à l'intervalle $[\omega, 10\omega]$ et qu'une octave à l'intervalle $[\omega, 2\omega]$. Une pente de 20 dB/décade correspond aussi à 6 dB/octave.

Cette droite coupe l'autre asymptote au point $\omega = 1/\tau$ et coupe l'axe des abscisses au point $\omega = K/\tau$.

$$\begin{aligned} 20\log(K) &= 20\log(K) - 20\log(\tau\omega) \\ \Rightarrow 20\log(\tau\omega) &= 0 \\ \Rightarrow \tau\omega = 1 &\Rightarrow \omega = \frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

Remarque 4.2: Dans la courbe de gain, les asymptotes ne peuvent prendre pour pente que les valeurs multiples de 20 dB/décade. On appelle pente d'ordre n , une pente égale à $20n$ dB/décade.

D'autre part, on déduit que :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\varphi(\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\arctan\left(\frac{K}{1 + j\tau\omega}\right) \right) = -\frac{\pi}{2}$$

Donc le déphasage $\varphi(\omega) \rightarrow -\pi/2$ lorsque $\omega \rightarrow +\infty$

❖ **Etude de points particuliers du diagramme réel :**

On remarque la valeur particulière $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$. Cette valeur particulière possède deux propriétés :

$$D'une part, on a : G(j\omega_c) = \frac{K}{1+j\frac{\omega_c}{\omega_c}} = \frac{K}{1+j}$$

$$\Rightarrow |G(j\omega_c)| = \frac{K}{\sqrt{1+1}} = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

Le passage au gain en décibels nous donne

$$G_{dB}(j\omega_c) = 20\log\left(\frac{K}{\sqrt{2}}\right) = 20\log(K) - 20\log(\sqrt{2})$$

avec $20\log_{10}(\sqrt{2}) \approx 3.01$ d'où $G_{dB}(j\omega_c) = G_{max} - 3$

Le gain obtenu à la pulsation ω_c est égal au gain maximum - 3dB. Pour cette raison, on nomme ω_c la pulsation de coupure à -3dB.

En ce qui concerne la phase, on remarque que :

$$\varphi(\omega_c) = \arctan\left(\frac{K}{1+j}\right) = -\pi / 4$$

A l'issue de cette étude, nous obtenons finalement le diagramme de Bode suivant :

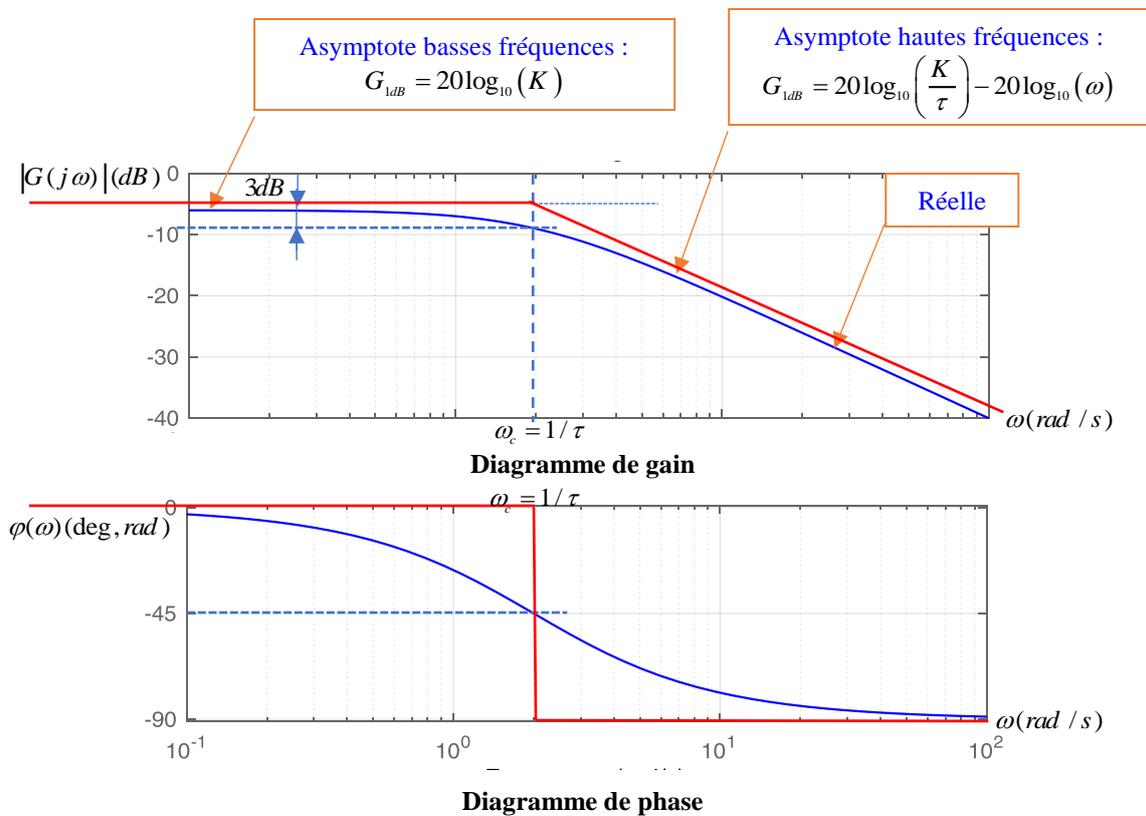


Fig.4.6 : Diagramme de Bode d'un système du premier ordre (asymptotique et réel)

❖ **Diagramme de Nyquist :**

Pour tracer le diagramme de Nyquist, il faut décomposer la fonction de transfert complexe $G(j\omega)$ en partie réelle et partie imaginaire comme suit :

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\tau\omega)} = \frac{K(1-j\tau\omega)}{(1+j\tau\omega)(1-j\tau\omega)} = \frac{K(1-j\tau\omega)}{(1+\tau^2\omega^2)}$$

$$\text{soit : } G(j\omega) = \frac{K}{1+\tau^2\omega^2} + j \frac{-K\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2} = X + jY$$

$$\text{La partie réelle : } X = \text{Re}(G(j\omega)) = \frac{K}{1+\tau^2\omega^2} > 0 \quad \forall \omega \in [0 + \infty[\quad \dots(1)$$

$$\text{La partie imaginaire : } Y = \text{Im}(G(j\omega)) = -\frac{K\tau\omega}{1+\tau^2\omega^2} < 0 \quad \forall \omega \in [0 + \infty[\quad \dots(2)$$

$$(2) \Leftrightarrow Y = -\tau\omega X \quad \dots\dots(3)$$

$$(1) \Leftrightarrow \tau^2\omega^2 = \frac{K}{X} - 1 \quad \dots\dots(4)$$

$$(3),(4) \Leftrightarrow Y^2 = \left(\frac{K}{X} - 1\right)^2 X^2 \Rightarrow X^2 - KX + Y^2 = 0$$

$$\Rightarrow \left(X - \frac{K}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2$$

Le lieu de Nyquist d'un système du premier ordre est un demi-cercle de centre $(K/2,0)$ et de rayon $K/2$ comme le montre la figure 4.5.

- Pour $\omega = 0$ (basse fréquence), $|G(j\omega)| = K$ et $\varphi(\omega) = 0$, correspond au point $(K, 0)$.
- Pour $\omega \rightarrow \infty$ (haute fréquence), $|G(j\omega)| = 0$ et $\varphi(\omega) = \frac{-\pi}{2}$, correspond au point $(0,0)$.
- Pour $\omega = \omega_c$ (pulsation de coupure), $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$ et $\varphi(\omega) = \frac{-\pi}{4}$, correspond au point $\left(\frac{K}{2}, -\frac{K}{2}\right)$.

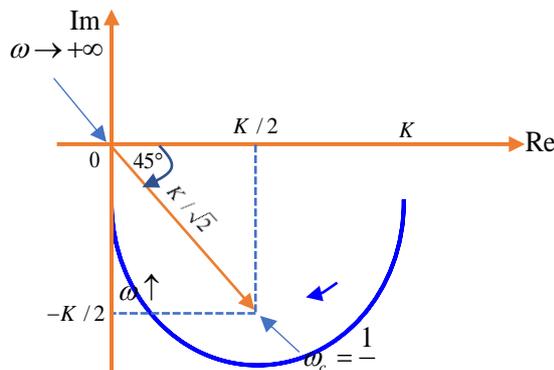


Fig.4.7 : Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre

5. Caractéristiques fréquentielles du système du 2^{ème} ordre -(Etude harmonique pour $\xi < 1$)

Rappel : La fonction de transfert d'un système canonique du second ordre s'écrit comme suit:

$$G(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1}$$

La fonction de transfert complexe d'un système canonique du second ordre s'écrit et en posant $p = j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{K}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right) + j\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)}$$

❖ Diagrammes Asymptotiques de Bode :

- Le module (gain) : $|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$

- Le module G_{dB} (en dB) en fonction de ω :

$$G_{dB} = 20\log|G(j\omega)| = 20\log(K) - 10\log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)$$

- La phase, $\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right) + \arctan\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)$

Les asymptotes sont obtenues de manière identique à celle qui a été faite pour le système canonique du premier ordre.

- Pour $\omega = 0 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1\right)$:

Le gain: $|G(j\omega)| = K \Rightarrow G_{dB} = 20\log(K)$ (asymptote horizontale).

La phase: $\varphi(\omega) = 0$ (asymptote horizontale).

- Pour $\omega \rightarrow \infty \left(\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1\right)$:

Le gain: $|G(j\omega)| \approx \frac{K\omega_n^2}{\omega^2} \Rightarrow G_{dB} = 20\log K + 40\log \omega_n - 40\log \omega$ (asymptote de pente -40dB/décade).

La phase: $\varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)\Big|_{\omega \rightarrow \infty} + \arctg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)\Big|_{\omega \rightarrow \infty} \approx -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$ (asymptote horizontale).

- Les deux asymptotes se coupent en $20\log K = 20\log K + 40\log \omega_n - 40\log \omega \Rightarrow \omega = \omega_n$ (pulsation de coupure). À cette pulsation on trouve essaiment $\varphi(\omega) = -\pi/2$.

❖ **Caractéristique fréquentielle**

✚ **Phénomène de résonance :** Pour $\omega = \omega_n$, le module peut tendre vers des valeurs très grandes quand le système n'est pas très amorti ainsi

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{2\xi} \text{ si } \xi = 0 \text{ alors } |G(j\omega)| \rightarrow \infty$$

On voit donc que dans ce cas particulier, la courbe est très loin de l'asymptote et que $|G(j\omega)|$ a une valeur bien supérieure à celle prévue par le diagramme asymptotique. Il faut donc tenir compte d'un phénomène nouveau appelé "résonance" qui se produit dans certaines conditions. Cette résonance a lieu à la pulsation ω_r pour laquelle $|G(j\omega_r)|$ est maximum. On peut calculer ω_r en annulant la dérivée du dénominateur de $|G(\omega)|$. On trouve :

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \text{ pour } 0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}, \omega_r : \text{pulsation de résonance}$$

✚ **Gain maximum:** Dans ce cas, le gain maximum vaut :

$$|G(j\omega_r)| = G_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

✚ **Facteur de résonance :** On définit alors le facteur de résonance Q (ou de surtension) par le rapport du gain maximal sur le gain à l'origine pour les fréquences très basses comme suit :

$$Q = \frac{G_{\max}}{K} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2}}$$

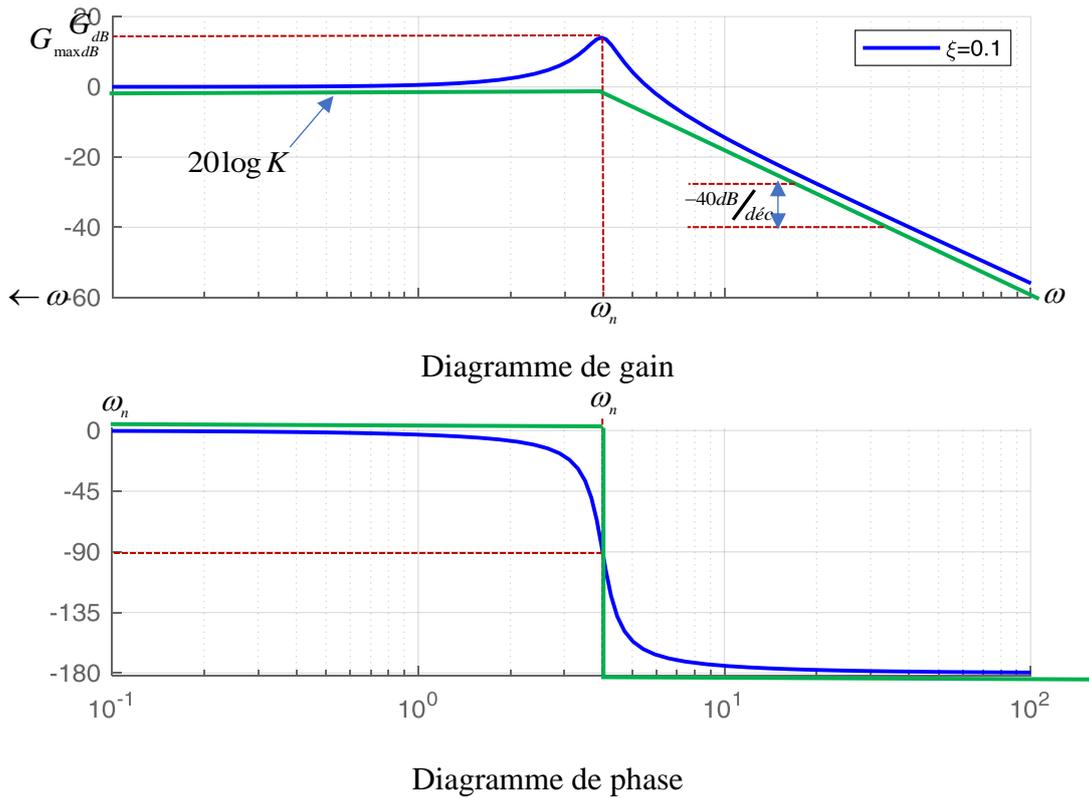


Fig.4.8 : Diagramme de Bode d'un système du second ordre (asymptotique et réel)

La figure suivante donne le diagramme de Bode en fonction du coefficient d'amortissement ξ

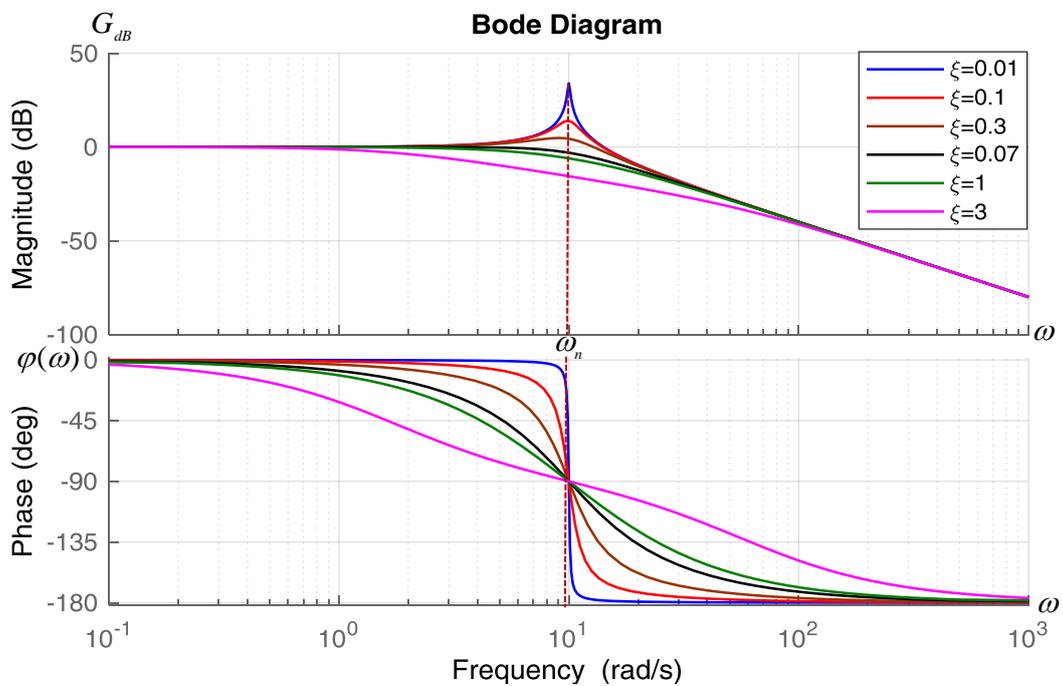


Fig.4.9 : Diagramme de Bode d'un système du second ordre en fonction de ξ

❖ **Diagrammes de Nyquist :**

Le diagramme de Nyquist d'un système du second ordre est défini à partir de l'expression suivante :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \frac{2\xi\omega}{\omega_n}} = \underbrace{\frac{K(1 - (\omega/\omega_n)^2)}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2}}_{\text{Re}(G(j\omega))} - j \underbrace{2 \frac{K\xi(\omega/\omega_n)}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2}}_{\text{Im}(G(j\omega))}$$

L'allure de la figure 4.9 peut être déduite des courbes de Bode. On voit notamment que :

- Pour $\omega = 0$: $|G(\omega)| = K$ et $\varphi(\omega) = 0^\circ$

Le point de départ: $\text{Re}(G(j\omega)) = K$ et $\text{Im}(G(j\omega)) = 0$.

- Pour $\omega \rightarrow \infty$: $|G(j\omega)| = 0$ et $\varphi(\omega) = -\pi$

Le point d'arrivé $\text{Re}(G(j\omega)) = 0$ et $\text{Im}(G(j\omega)) = 0$.

- L'intersection avec l'axe imaginaire $\text{Re}(G(j\omega)) = 0$

$$\text{Re}(G(j\omega)) \Rightarrow \frac{K(1 - (\omega/\omega_n)^2)}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2} = 0 \Rightarrow \omega = \omega_n$$

$$\text{Im}(G(j\omega)) = -2 \frac{K\xi(\omega/\omega_n)}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_n)^2} \Big|_{\omega=\omega_n} \Rightarrow \text{Im}(G(j\omega)) = -\frac{K}{2\xi}$$

Les coordonnées du point d'intersection du lieu avec l'axe imaginaire est $\left(0, -\frac{K}{2\xi}\right)$, et à ce point nous avons $\omega = \omega_n$.

- Pour un système très peu ou pas amorti, la résonance a lieu pour $\omega = \omega_c = 1/\tau$, donc pour

$$\tan(\varphi) \rightarrow -\infty \text{ soit } \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

- Plus ξ est grand, plus la courbe est " petite " et se rapproche de celle d'un système du 1er ordre (demi cercle).
- Quand $\omega \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow -\pi$. Les courbes sont donc tangentes à l'axe réel (la courbe ne passe pas au dessus de l'axe réel).
- Si $\xi < 0.707$, la courbe passe au delà du cercle de rayon K , la pulsation de résonance est obtenue pour le module maximal.

La figure suivante représente des lieux de Nyquist pour $K = 1$, $\omega_n = 1$ et pour différentes valeurs de ξ .

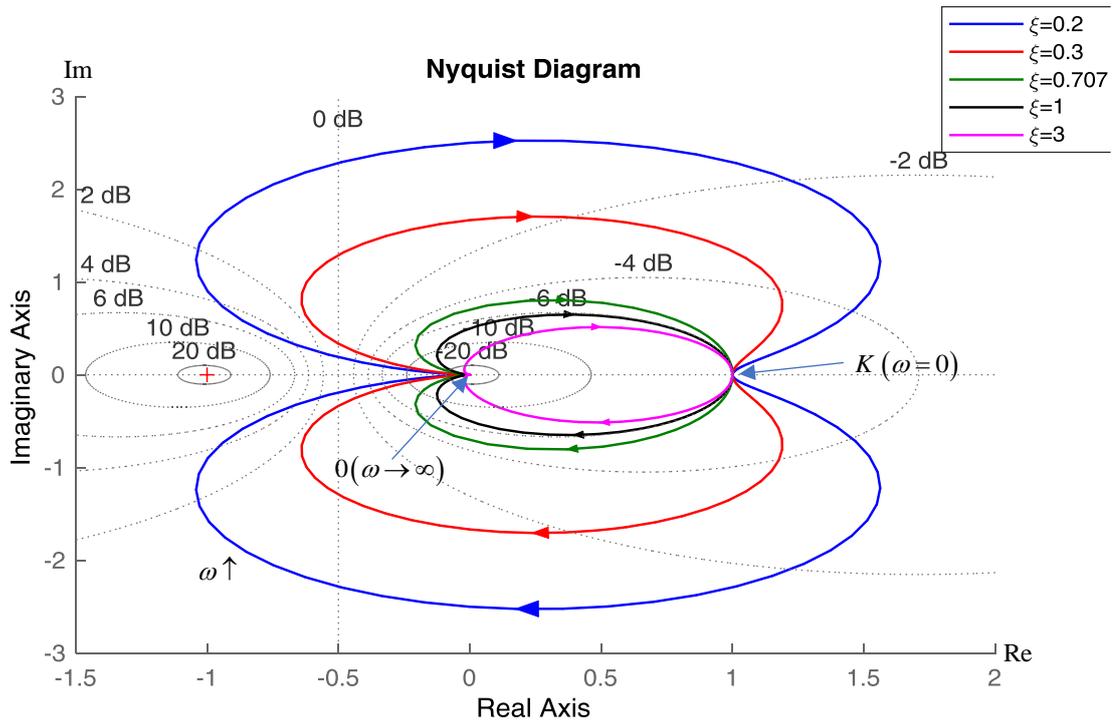


Fig.4.10 : Lieu de Nyquist d'un système du 2nd ordre en fonction de ξ

6. Marges de phase et de gain :

Il est possible de localiser les mesures de la marge de phase et du gain sur le diagramme de Bode et de Nyquist.

6.1. Marge de phase :

Pour la marge de phase : Il suffit de repérer, grâce au diagramme de gain, la position de la pulsation de coupure à 0dB puis, dans le diagramme de phase, à cette pulsation, de mesurer la marge de phase comme l'écart entre $-\pi$ et le déphasage correspondant (Figure 6.10)

d'autre façon : La marge de phase $\Delta\varphi$: caractérise l'écart en phase entre $G(j\omega)$ et $-\pi$ lorsque $|G(j\omega)| = 1$ (0dB). Elle est définie par :

$$\Delta\varphi = \pi + \varphi(G(j\omega_0))$$

avec ω_0 est la pulsation de coupure à 0 dB de la fonction de transfert complexe $G(j\omega)$:

$$20\log|G(j\omega_0)| = 0\text{dB} \Rightarrow |G(j\omega_0)| = 1, \quad \omega_0 = ?$$

6.2. Marge de gain :

Pour la marge de gain : Il suffit de repérer, grâce au diagramme de phase, la position de la pulsation de coupure à $0 -\pi$ puis, dans le diagramme de gain, à cette pulsation, de mesurer la marge de gain comme l'écart entre 0dB et le gain correspondant (Figure 6.10)

d'autre façon : La marge de gain ΔG : caractérise l'écart en gain par rapport à 0dB pour un déphasage de $-\pi$. Elle est définie par :

$$\Delta G = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|} \Rightarrow \Delta G|_{\text{dB}} = -20\log|G(j\omega_\pi)|,$$

où ω_π est la pulsation pour laquelle la phase de $G(j\omega)$ vaut :

$$\arg[G(j\omega_\pi)] = \varphi(G(j\omega_\pi)) = -\pi, \quad \omega_\pi = ?$$

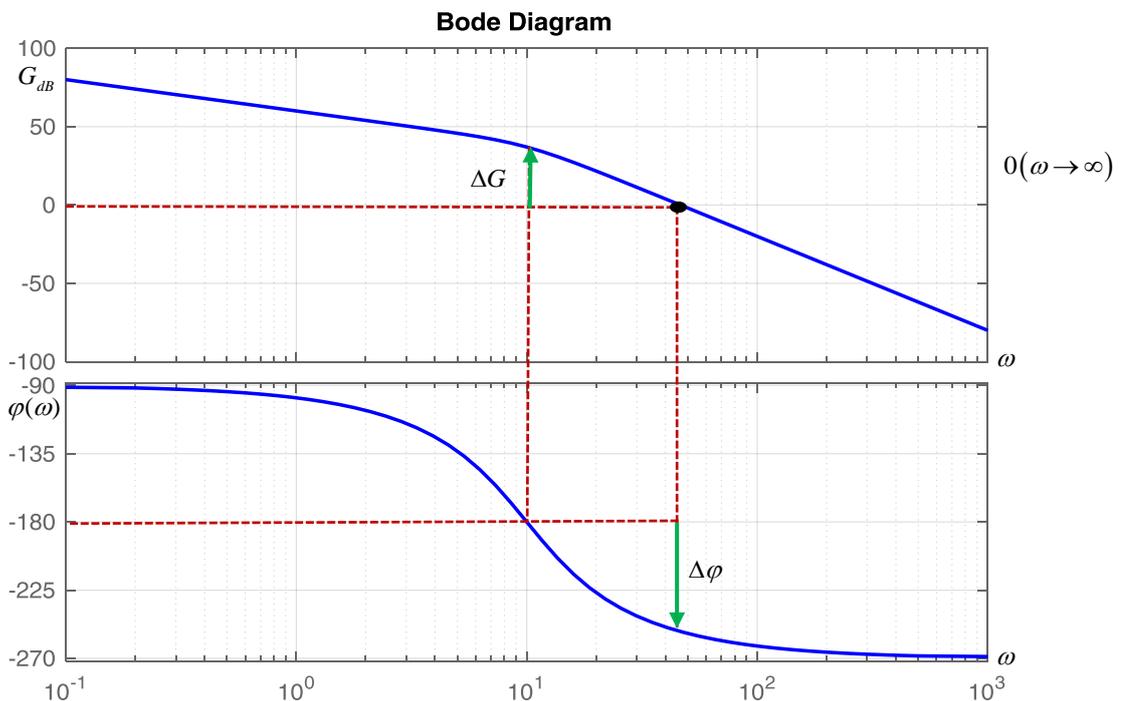


Fig.4.11 : Marges de phase et du gain mesurées sur le diagramme de Bode

Dans le plan de Nyquist, la marge de gain et de phase sont mesurées comme suit :

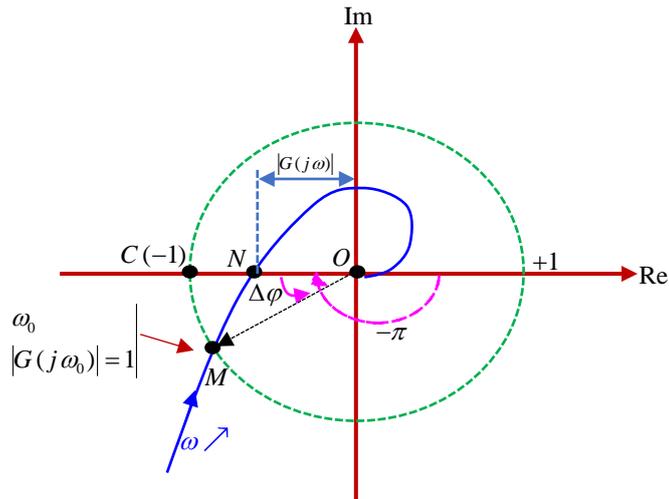


Fig.4.12 : Marges de phase et du gain mesurées sur le diagramme de Nyquist

✚ Marge de phase :

- Traçons le cercle de rayon 1 passant par O. Ce cercle passe par le point critique C .
- Le point M est défini par l'intersection du lieu de Nyquist de la fonction de transfert en BO $G(j\omega)$ avec le cercle. Ce point du lieu correspond à la pulsation ω_0 puisque, par définition, $|G(j\omega_0)| = 1$.
- En évaluant l'éloignement de ce point M par rapport au point C , la marge de phase $\Delta\varphi$ est mesurée par l'écart angulaire COB.

Comme : $\varphi(G(j\omega_0)) - \Delta\varphi = -\pi$ on a $\Delta\varphi = \pi + \varphi(G(j\omega_0))$

✚ Marge de gain :

- Le point N est défini comme le point d'intersection du lieu de Nyquist avec le demi-axe réel négatif.
- La de marge est mesurée par la distance ON définie par : $|G(j\omega)| = ON$ et $\varphi(\omega) = -\pi$
- On appel ω_π la pulsation pour laquelle se produit cette intersection. On a $|G(j\omega_\pi)| = ON$.

On définit alors la marge de gain par :

$$\Delta G = -20\log ON = -20\log |G(j\omega_\pi)|$$

Exemple 4.1 : Calculer la marge de gain et de phase de la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{5}{\left(\frac{p}{100} + 1\right)^3}$$

Calcul de la marge de gain : Le calcul de la marge de gain consiste à chercher, dans un premier temps, la valeur de ω_π , puis à calculer $\Delta G = -20 \log |G(j\omega_\pi)|$

Calcul de ω_π est telle que : $\arg[G(j\omega_\pi)] = \varphi(\omega_\pi) = -\pi$

On a la fonction de transfert complexe $G(j\omega) = \frac{5}{\left(\frac{j\omega}{100} + 1\right)^3}$

donc , $\varphi(\omega) = 0 - 3 \arctan\left(\frac{\omega}{100}\right)$

$\varphi(\omega_\pi) = -\pi \Rightarrow -3 \arctan\left(\frac{\omega_\pi}{100}\right) = -\pi \Rightarrow \omega_\pi = 100 \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = 100\sqrt{3}$

On a alors : $\Delta G = -20 \log_{10} |G(j\omega_\pi)|$ avec $\omega_\pi = 100\sqrt{3}$

$$\text{Il result alors } \Delta G = -20 \log \left[\frac{5}{\left(\sqrt{\frac{\omega_\pi^2}{100^2} + 1}\right)^3} \right] = -20 \log \left[\frac{5}{(\sqrt{3+1})^3} \right] = -20 \log \left[\frac{5}{8} \right] \Rightarrow \Delta G = 4dB$$

Calcul de la marge de phase : Le calcul de la marge de phase consiste à chercher, dans un premier temps, la valeur de ω_0 , puis à calculer $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_0)$

Calcul de ω_0 est telle que : $20 \log_{10} |G(j\omega_0)| = 0 \text{ dB} \Rightarrow |G(j\omega_0)| = 1$

On a $G(j\omega) = \frac{5}{\left(\frac{j\omega}{100} + 1\right)^3} \Rightarrow |G(j\omega_0)| = \frac{5}{\left(\sqrt{\frac{\omega_0^2}{100^2} + 1}\right)^3} = 1$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\omega_0^2}{100^2} + 1} = \sqrt[3]{5} \Rightarrow \omega_0^2 = 100^2 \left[(\sqrt[3]{5})^2 - 1 \right] \Rightarrow \omega_0 \approx 139 \text{ rad / s}$$

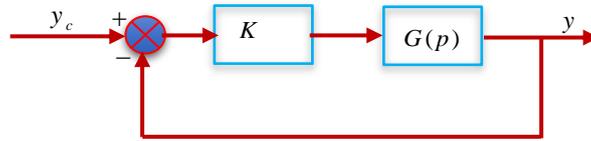
On a alors : $\Delta\varphi = \pi + \varphi(\omega_0)$ avec $\omega_0 \approx 139 \text{ rad / s}$

Comme $\varphi(\omega) = \arg(G(j\omega)) = 0 - 3 \arctan\left(\frac{\omega}{100}\right)$

Il résulte donc $\Delta\varphi = \pi + \varphi(j\omega_0) = \pi - 3 \arctan\left(\frac{139}{100}\right) = 0.3 \text{ rad} = 17^\circ$.

Exercices sur le chapitre 4

Exercice 01 : Soit le système asservi :



Tracer le diagramme asymptotique de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en BO pour les cas suivants ;

1) $K = 5, G(p) = \frac{1}{1+2p}$,

2) $K = 1, G(p) = \frac{1+p}{1+10p}$,

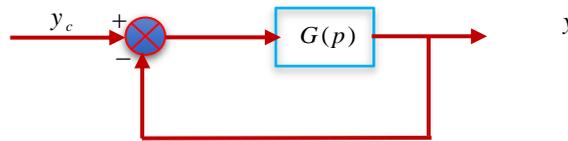
3) $K = 50, G(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}$

4) $K = 4, G(p) = \frac{1}{1-\frac{p}{2}}$,

5) $K = 15, G(p) = \frac{1}{(1+10p)(1+100p)}$,

6) $K = 1, G(p) = \frac{1}{p^2 \left(1 + \frac{p}{8}\right)}$

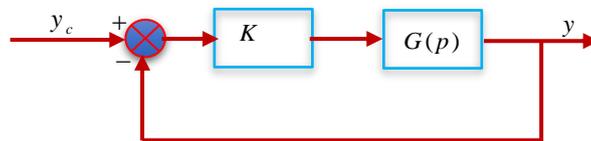
Exercice 02 : Soit le système asservi :



Construire le diagramme de Nyquist en BO pour les cas suivants :

1) $G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$, 2) $G(p) = \frac{1}{p(p-1)}$, 3) $G(p) = \frac{1+p}{p^2}$, 4) $G(p) = \frac{10}{1+\frac{p^2}{100}}$

Exercice 03 : Soit le système asservi :



avec $G(p) = \frac{1}{(10+p)^3}$

- 1) Tracer le diagramme de Bode de $G(p)$ pour $K = 1$.
- 2) Déterminer le gain K qui assure une marge de gain $\Delta G = 6dB$
- 3) Déterminer le gain K qui assure une marge de phase $\Delta\varphi = 45^\circ$

Exercice 04 : Un système est caractérisé par la fonction de transfert complexe :

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{20}{4 + j\omega}$$

- 1) Quelle est l'équation différentielle liant l'entrée $e(t)$ et la sortie $y(t)$?
- 2) Quelle est l'expression de la réponse du système à un signal d'entrée sinusoïdal $e(t) = 2\sin(10t)$?
- 3) Tracer le diagramme de Bode et de Nyquist de $G(j\omega)$

Exercice 05 : On considère un système de fonction de transfert $G(p)$ avec :

$$G(p) = \frac{K}{1 + \tau p}, \quad \tau = 0.1$$

- 1) Calculer l'expression précise de la pulsation de coupure ω_c à 0 dB définie par : $G(\omega_c) = 1$
- 2) Montrer que si $K \geq 1$, on a $\omega_c = \frac{K}{\tau}$
- 3) Calculer la valeur du gain K qui permet d'obtenir une pulsation $\omega_c = 10$ rad/s.

Chapitre 5

Stabilité et précision des systèmes asservis

La stabilité est la qualité essentielle pour un système, et donc exigée en premier. Un système instable est caractérisé soit par des oscillations d'amplitude de plus en plus grande de la sortie, soit par une croissance négative ou positive de la sortie. En effet, la stabilité du système commandé est le premier objectif qui doit être assuré pour le bon fonctionnement de l'asservissement (l'instabilité est en général synonyme de destruction du système.). Les autres objectifs d'un asservissement (précision et rapidité) ne peuvent pas être obtenus si le système commandé est instable.

Ce chapitre présente des méthodes permettant de déterminer la stabilité d'un système linéaire continu dont on connaît soit l'expression analytique de la fonction de transfert, soit une représentation graphique de sa réponse fréquentielle (Bode, Nyquist).

1. Définition :

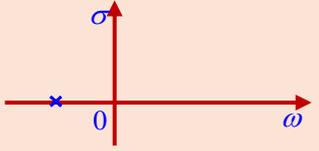
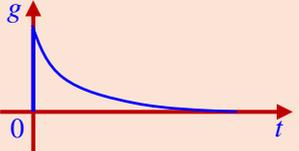
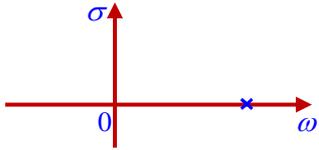
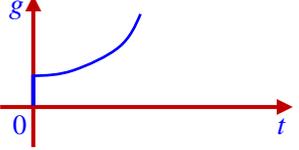
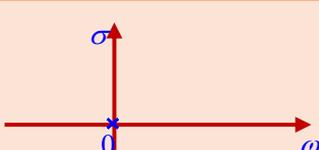
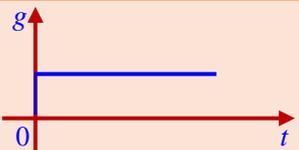
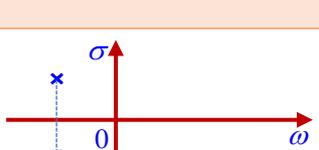
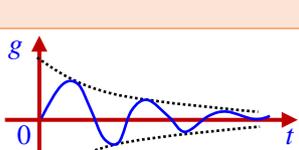
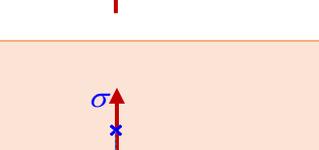
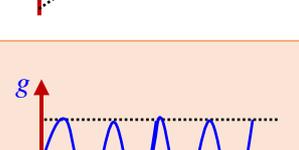
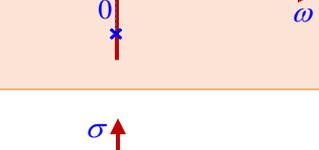
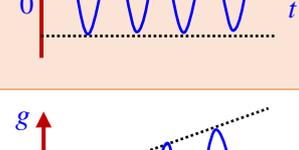
- En générale, un système est stable au voisinage d'un point (trajectoire), lorsque de faibles perturbations entraînent de faibles écarts par rapport au ce point (trajectoire).
- Un système est stable si et seulement si à tout signal d'entrée borné en amplitude, correspond un signal de sortie borné en amplitude quelles que soient les perturbations. En automatique, on définira la stabilité par une des propositions suivantes : Un système linéaire est stable.
 - Lorsque sa réponse à un échelon prend une valeur finie en régime permanent,
 - Lorsque sa réponse à une impulsion tend vers 0,
 - Lorsque sa réponse à une sinusoïde est une sinusoïde d'amplitude finie.

2. Condition générale de stabilité (Critère mathématique des pôles) :

Un système asservi (linéaire invariant à temps continu) de fonction de transfert $G(p)$ est stable si et seulement si tous les pôles de $G(p)$ appartiennent au demi-plan gauche du plan complexe, c'est-à-dire tous les pôles sont à partie réelle négative (Figure 5.1). Le demi-plan gauche est appelé « région de stabilité ».

La stabilité de la BO n'implique pas nécessairement celle de la BF et inversement.

La figure 5.1 récapitule les cas possibles suivant le signe et la nature des racines.

Type de pôle	Plan complexe $p = \sigma \pm j\omega$	Réponse impulsionnelle	Remarques
Réel négatif			stable
Réel positif			instable
Nul Multiplicité 1			stable
Complexe conjugué partie réelle négative			stable
Imaginaire conjugué partie réelle nulle			Marginalement stable
imaginaire conjugué			instable

Complexe conjugué partie réelle positive			instable
Nul Multiplicité 2			instable

Fig 5.1 : Récapitulatif des comportements des systèmes selon la position et le signe des pôles

Exemple 5.1. Soit la fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{3p^2 + 1}{p^3 - 4p^2 + 2p^2 - 1} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Son polynôme caractéristique est $D(p) = p^3 - 4p^2 + 2p^2 - 1$, nous obtenons les racines suivantes : $0.24 \pm 0.47j$ et 3.51 .

Le polynôme caractéristique admet 2 racines à partie réelle négative et un autre à partie réelle positives, donc le système est instable.

2.1. Stabilité des systèmes en boucle fermée :

Soit le système en boucle fermée représenté ci-dessous avec $G(p)$ et $H(p)$ sont respectivement les fonctions de transfert de la chaîne directe et de la chaîne de retour.

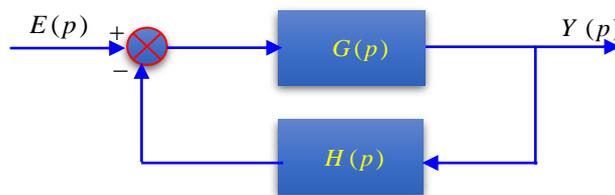


Fig 5.2 : Système en boucle fermée

Sa fonction de transfert en boucle fermée est

$$F(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)} = \frac{G(p)}{1 + T(p)}$$

$T(p) = G(p)H(p)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte associée à $F(p)$. Les pôles de $F(p)$ sont les racines de l'équation caractéristique $1 + T(p) = 0$.

La stabilité est conditionnée par le signe des parties réelles des racines de l'équation caractéristique du dénominateur. Plusieurs méthodes sont possibles pour y arriver :

Méthode 1 : Calculer les racines de $1+T(p)=0$: Cette méthode est bonne puisqu'elle nous donne également les valeurs des racines en plus de leurs signes. Mais elle est pratiquement inapplicable à cause de la grande difficulté qu'elle présente si le degré du polynôme est important. L'usage d'un ordinateur peut simplifier le travail, car il peut aussi tracer le lieu des racines quand on fait varier les paramètres. C'est une méthode très puissante.

Méthode 2 : Discuter le signe des racines sans les calculer, à partir des coefficients du dénominateur (critère de Routh-Hurwitz). L'inconvénient majeur de cette méthode réside dans le cas où le système trouvé est instable, alors on ne sait pas sur quel paramètre il faut agir pour le rendre stable. Il faut en plus connaître la fonction sous sa forme mathématique.

Méthode 3 : Utiliser le critère de Nyquist (méthode graphique) : Cette méthode est intéressante car elle n'a pas les inconvénients du critère de Routh. A savoir, on peut utiliser directement les résultats expérimentaux sans connaître les équations du système et elle montre graphiquement sur quels paramètres on peut agir pour rendre le système stable.

Remarque 5.1 : comme nous l'avons dit précédemment, le critère mathématique de pôle possède l'avantage d'être inconditionnel et universel. Toutefois, il nécessite non seulement la connaissance de la fonction de transfert mais il suppose également que l'on soit capable de calculer ses pôles. Cette tâche peut être aisée pour des systèmes d'ordres peu élevés, mais elle devient très vite difficile pour des systèmes d'ordres élevés (degré du polynôme est important) ce qui est considéré comme un inconvénient.

Une alternative consiste donc à étudier la stabilité par des critères plus faciles à mettre en œuvre sans passer par le calcul des pôles (méthode 2 et 3).

3. Critère algébrique de Routh -Herwitz :

Principe : Le critère de Routh est un critère algébrique permet de conclure à l'existence ou non d'au moins une racine à partie réelle positive d'un polynôme à coefficients réels d'ordre élevé sans avoir à calculer ces pôles.

Pour un système bouclé, nous allons étudier le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée $F(p)$.

$$D(p) = 1 + T(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + \dots + a_1 p + a_0$$

Le critère de Routh se compose de deux conditions :

- ✚ **Une condition nécessaire :** La stabilité exige que tous les coefficients a_i de l'équation caractéristique soient tous présents et tous de même signe (condition nécessaire). Cette condition est généralement vérifiée pour la plupart des systèmes physiques.
- ✚ **Une condition nécessaire et suffisante :** Dans le cas où la condition 1 est vérifiée, on ne peut connaître la place des pôles qu'après examen de la première colonne du tableau de Routh (à partir des coefficients du polynôme). Ainsi, le système est stable si et seulement si tous les termes de la 1ère colonne du tableau de Routh sont de même signe.

3.1. Construction du tableau de Routh :

On applique le critère de Routh en plaçant la suite de coefficients a_i dans un tableau, sur deux lignes, dans l'ordre des n décroissants, alternativement une ligne sur deux. On effectue ensuite un calcul pour créer une ligne supplémentaire, selon l'algorithme présenté sur le schéma ci-dessous.

Tableau 5.1 : Tableau de Routh

Poser	p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
	p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
Calculer	p^{n-2}	$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$	$b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$	$b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}$...
	p^{n-3}	$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}$	$c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}$	$c_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}$...
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
	p^1
	p^0

- On itère le processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des 0 sur la ligne,
- Les cases vides sont remplies par des zéros,
- Le tableau de Routh associé à un polynôme d'ordre n comporte $(n + 1)$ lignes

Le critère de Routh est le suivant : Le nombre de pôles à partie réelle positive, de la fonction de transfert $G(p)$ est égal au nombre de changements de signe dans la première colonne. En conséquence, le système est stable en boucle fermée si et seulement si tous les coefficients de la première colonne doivent être strictement positifs.

Exemple 5.2: Etude de la stabilité d'un système d'ordre 4 :

Considérons le polynôme caractéristique suivant : $D(p) = p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 4p + 5$

Tous les coefficients du polynôme caractéristique sont présents et positifs: on ne peut pas conclure immédiatement de la stabilité du système, il faut construire le tableau de Routh :

Poser	p^4	1	3	5
	p^3	2	4	0
Calculer	p^2	1	5	0
	p^1	-6	0	0
	p^0	5	0	0

Il y a deux changements de signe de la première colonne (deux pôles à partie positive), le système est instable.

❖ **Cas particuliers :**

Cas1 : Zéro sur la première colonne : Si un élément de la première colonne est nul, la ligne suivante ne pourra pas être calculée car il y aurait une division par zéro, Pour éviter cela, on le remplace alors par nombre petit $\varepsilon > 0$ et on continue la construction du tableau. ε peut tendre vers zéro par valeur positive ou négative, pour permettre par la suite le calcul du nombre de changement de signe de la première colonne.

Exemple 5.3: Etudier la stabilité de la fonction de transfert $F(p)$ admettant comme dénominateur

$$D(p) = p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 5p + 3$$

Puisque tous les coefficients de $D(p)$ sont présents et de même signe, on construit alors la table de Routh.

Poser	p^5	1	3	5
	p^4	2	6	3
Calculer	p^3	$0 \rightarrow \varepsilon$	$7/2$	0
	p^2	$(6\varepsilon - 7) / \varepsilon$	3	0
	p^1	$(-6\varepsilon^2 + 42\varepsilon - 49) / (12\varepsilon - 14)$	0	0
	p^0	3	0	0

Considérons uniquement le changement de signe dans la première colonne et calculons le signe de chaque ligne dans les 2 cas $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $\varepsilon \rightarrow 0^-$:

	1 ^{er} colonne	$\varepsilon \rightarrow 0^+$	$\varepsilon \rightarrow 0^-$
p^5	1	+	+
p^4	2	+	+
p^3	$0 \rightarrow \varepsilon$	+	-
p^2	$(6\varepsilon - 7) / \varepsilon$	-	+
p^1	$(-6\varepsilon^2 + 42\varepsilon - 49) / (12\varepsilon - 14)$	+	+
p^0	3	+	+

Si ε est choisi positif, il y a 2 changements de signe. S'il est choisi négatif, il y a également 2 changements de signe. Le système a donc 2 pôles dans le demi-plan droit du plan complexe (2 pôles instables) et ce n'est pas important si nous choisissons d'approcher le zéro par valeur positive ou négative donc le système est instable. Ceci est toujours le cas.

Cas2 : Ligne complète de zéros : Si tous les termes d'une ligne sont nuls, l'équation possède des racines imaginaires pures ($p = \pm j\omega$) et se trouve déjà en limite de stabilité.

Pour construire la table de Routh on applique la méthode suivante :

- À partir des coefficients de la dernière ligne non nulle on construit un polynôme dit auxiliaire P_{aux} admettant comme racine $p = \pm j\omega$.
- On calcule la dérivée de P_{aux} par rapport à p et l'on remplit la ligne nulle par les coefficients de ce polynôme dérivé.
- On construit la suite de la table de Routh $\omega \rightarrow \infty$

Il faut noter que les racines du polynôme auxiliaire sont aussi des racines du polynôme original et doivent être testées.

Exemple 5.4 : Considérons le polynôme caractéristique suivant :

$$D(p) = p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 5p + 3$$

Puisque tous les coefficients de $D(p)$ sont présents et de même signe, on construit alors la table de Routh.

Poser	p^5	1	11	28	
	p^4	5	23	12	
Calculer	p^3	6.4	25.6	0	
	p^2	3	12	0	Dernière ligne non nulle $P_{aux} = 3p^2 + 12$ ou $p^2 + 4 \Rightarrow P'_{aux} = 6p$
	p^1	0	0	0	Ligne nulle
	p^1	6	0	0	on remplace cette ligne par les coefficients de $P'_{aux} = 6p$
	p^0	12	0	0	

On constate, après avoir construit la table de Routh, que les éléments de première colonne sont de même signe (strictement positifs). Mais il faut vérifier le polynôme auxiliaire : $P_{aux} = 3p^2 + 12 = 0$ qui nous donne les racines $p = \pm 2j$. Donc le système est marginalement stable et oscille à la pulsation $\omega_{oss} = 2rad / sec$.

Remarques 5.2:

- Cette méthode a l'avantage d'être rapide est exacte, mais elle ne donne pas une mesure de la stabilité comme les autres critères ; car elle se borne à dire si le système est stable ou non. De plus, elle est inapplicable si on ne connaît pas l'expression mathématique de la fonction de transfert.
- Le critère de Routh est intéressant pour connaître le nombre de racines réelles positives, mais il est incapable de donner des renseignements sur l'amortissement du système quand celui-ci est stable.

4. Critère du revers dans le plan de Nyquist et de Bode:

- Le critère du revers est un critère graphique de stabilité, il permet de déterminer la stabilité d'un système bouclé sur la base de sa réponse harmonique en boucle ouverte.
- Les critères du revers sont valables pour les systèmes à déphase minimal, c'est à dire les systèmes pour lesquels la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ n'a ni de pôles ni de zéros à partie réelle positive.

4.1. Critère du revers dans le plan de Nyquist :

Un système en boucle ouverte à déphase minimal sera stable en boucle fermée si, en parcourant le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ dans le sens

des ω croissants (ω variant de 0 à $+\infty$), on laisse toujours le point critique $(-1,0)$ à gauche de la courbe. Il est instable dans le cas contraire.

La figure 5.3 illustre ce critère du revers.

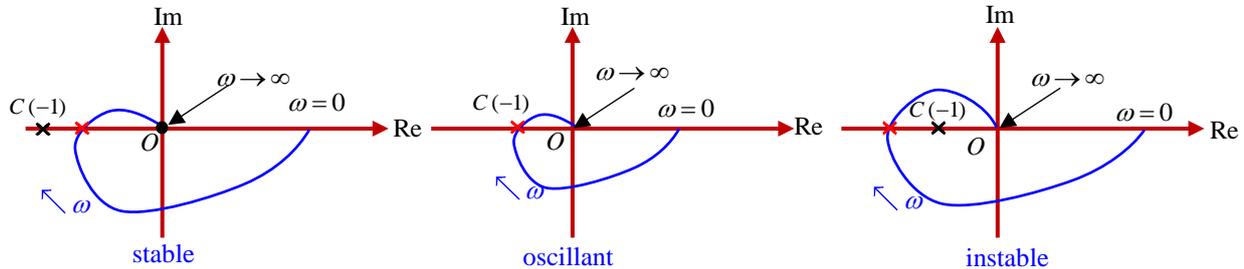


Fig 5.3 : Illustration du critère du revers dans le plan de Nyquist

Remarque 5.3 : N’oubliez jamais que l’on trace toujours le lieu de Nyquist du système en boucle ouverte pour étudier sa stabilité en boucle fermée.

4.2. Critère du revers dans le plan de Bode :

Un système à déphase minimal sera stable en boucle fermée si, pour la pulsation ω_0 définie par $|T(j\omega_0)| = 1$ (soit 0 dB), le déphasage est supérieur à -180° .

Autrement dit, un système à déphase minimal sera stable en boucle fermée si, pour la pulsation ω_π définie par $\varphi(\omega_\pi) = -180^\circ$, le gain en boucle ouverte $|T(j\omega_\pi)| < 1$ (soit 0 dB).

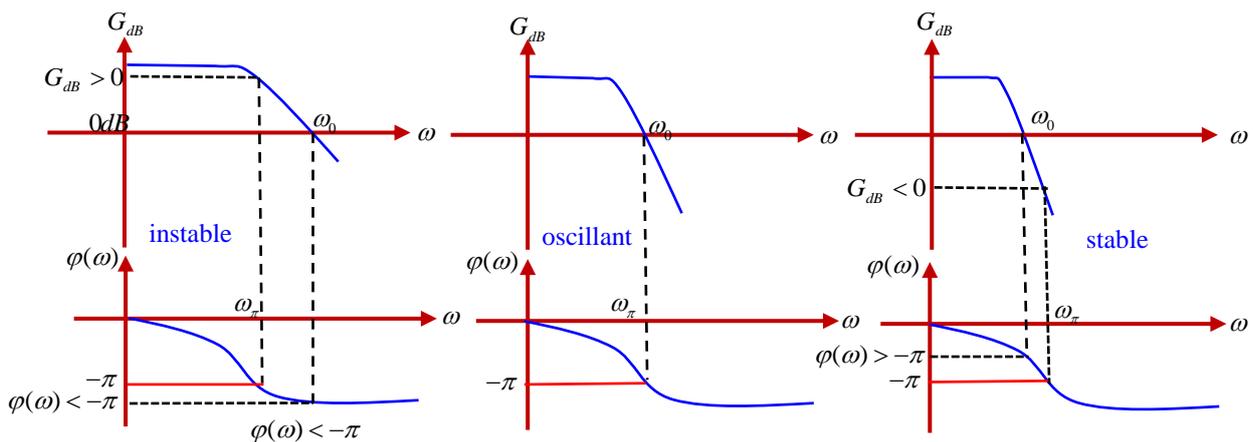


Fig 5.4: Illustration du critère du revers dans le plan de Bode

5. Marges de stabilité :

Les critères précédents permettent de dire si un système est théoriquement stable, marginalement stable ou instable. Mais en pratique il faut qu’il soit suffisamment. On utilise alors les marges de gain et de phase pour s’assurer qu’un système est loin du point critique $(-1$

; 0) dans le plan de Nyquist ou (0 dB, -180°) dans le plan de Bode. Ces marges permettent de quantifier la distance séparant le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte du point critique (synonyme de limite de stabilité).

❖ **Stabilité et marges de stabilité :**

Un système est stable en boucle fermée si la marge de phase $\Delta\varphi$ et la marge de gain ΔG de la fonction de transfert en boucle ouverte sont positive (Figure 5.5). il est instable dans le cas contraire. Autrement dit, pour qu'un système soit stable, il faudrait que $\Delta G > 0$ et $\Delta\varphi > 0$

- Une valeur de marge de gain couramment utilisée est $\Delta G = 6dB$ (une marge de 6dB, autorise une variation de 100% du gain de boucle sans risque d'instabilité).
- On utilise couramment une marge de phase de 45° qui garantit un fonctionnement correct de la plupart des systèmes.

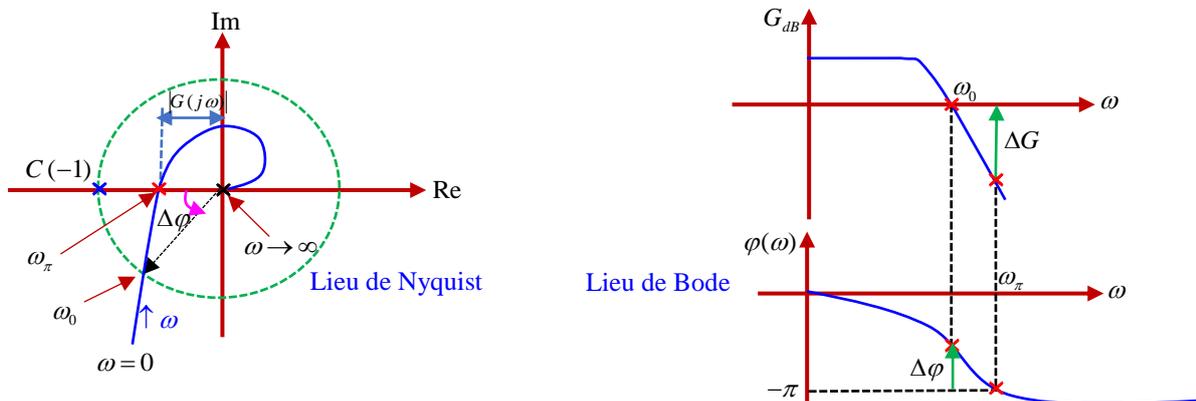


Fig5.5. Marges de stabilité

6. Précision des systèmes asservis :

Dans cette partie on considérera que les systèmes étudiés sont stables (et à retour unitaire). On utilisera dans la suite les notations de la figure 5.6 :

La précision d'un système est définie à partir de l'erreur $\varepsilon(t)$ entre la consigne d'entrée et la sortie réelle du système. C'est donc la valeur à la sortie du soustracteur.

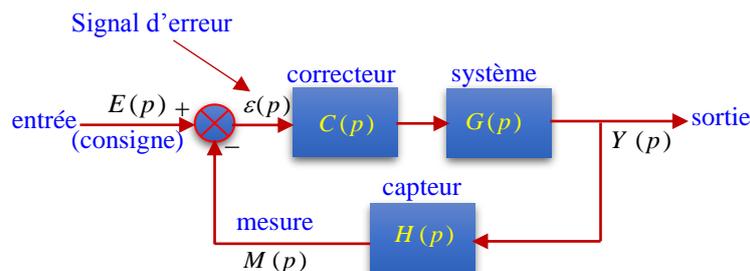


Fig 5.6 : Schéma général d'une boucle d'asservissement

Nous distinguerons : Nous distinguerons la précision statique qui caractérise la limite de l'erreur au bout d'un temps infini pour une entrée donnée, c'est-à-dire le régime permanent, et la précision dynamique qui tient compte des caractéristiques d'évolution du processus en régime transitoire.

Le cas idéal de point de vue précision est d'avoir à chaque instant $\varepsilon(t) = 0$. Cependant l'entrée $e(t)$ peut varier au cours du temps et le système est soumis à divers perturbations. L'écart $\varepsilon(t)$ n'est pratiquement jamais nul.

Remarques 5.4 :

- Minimiser ou annuler l'écart quand l'entrée $e(t)$ varie au cours du temps, c'est résoudre un problème de poursuite.
- Minimiser ou annuler l'écart quand l'entrée $e(t)$ est constante, c'est résoudre un problème de régulation.

✚ **Précision dynamique :** La précision dynamique d'un système est caractérisée durant la phase transitoire, essentiellement à une entrée en échelon. Elle est étudiée à l'aide des paramètres d'évolution du processus en régime dynamique : temps de réponse, temps de montée, dépassement, etc.

✚ **Précision statique :** La précision d'un asservissement, en régime permanent, est définie par l'écart permanent $\varepsilon(t)$ qui existe entre la sortie réelle et celle que l'on désire obtenir (la valeur de la consigne).

Par définition, on dira qu'un système est d'autant plus précis que le signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est plus faible.

On considère un système asservi tel que celui représenté à la figure 5.6. D'après la figure on peut écrire :

$$\varepsilon(t) = E(p) - M(p)$$

$$\text{or } M(p) = H(p)Y(p) \text{ et } Y(p) = C(p)G(p)\varepsilon(p)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t) = E(p) - H(p)Y(p)$$

$$= E(p) - \varepsilon(p)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(t)(1 + H(p)C(p)G(p)) = E(p)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon(t) &= E(p) - H(p)Y(p) \\ &= E(p) - \varepsilon(p) \\ \varepsilon(t) &= \frac{E(p)}{1 + H(p)C(p)G(p)} = \frac{E(p)}{1 + T(p)} \end{aligned}$$

Avec $T(p) = H(p)C(p)G(p)$ est la fonction de transfert en boucle ouverte.

L'application du théorème de la valeur finale permet de déterminer l'erreur en régime permanent.

- **Erreur de position** ε_p : On appelle erreur statique (ou erreur de position) du système en boucle fermée, l'écart $\varepsilon(t)$ quand l'entrée $e(t)$ est un échelon.

Nous avons dans ce cas :

$$e(t) = E_0 \mu(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}, \text{ avec } E_0 \text{ l'amplitude de l'échelon}$$

L'expression de ε_p est :

$$\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + T(p)}$$

Cette erreur de position est un des paramètres qui permet d'évaluer la précision d'un système en boucle fermée. Plus ε_p est faible, meilleure est la précision du système.

Classe d'un système : La classe d'un système est déterminée à partir de sa fonction de transfert en boucle ouverte, pour cela il faut mettre $T(p)$ sous la forme suivante :

$$T(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}$$

Avec :

- α : Classe du système (nombre d'intégrateurs présents dans la FTBO).
- K : Gain statique du système en boucle ouverte

On peut écrire alors :

$$\begin{aligned} T(p) &= \frac{K}{p^\alpha} \frac{N(p)}{D(p)} \text{ avec } N(0) = D(0) = 1 \\ \varepsilon_p &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + T(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{E_0}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{N(p)}{D(p)}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha E_0 D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)} \end{aligned}$$

Comme $N(0) = D(0) = 1$, on trouve donc :

$$\varepsilon_p = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\alpha E_0}{p^\alpha + K}$$

- Pour les systèmes de classe 0 ($\alpha = 0$) alors : $\varepsilon_p = \frac{E_0}{1 + K}$
- Pour les systèmes de classe $n \geq 1$ ($\alpha \geq 1$): alors : $\varepsilon_p = 0$

Remarques 5.5 :

- Pour obtenir une précision statique parfaite (ou annuler l'erreur de position), il faut au moins une intégration dans la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ ($\alpha \geq 1$),
- Si $T(p)$ est de classe zéro, l'erreur diminue quand le gain K augmente.



Fig 5.7 : Erreur de position (pour une entrée échelon)

- **Erreur de vitesse ε_v :** On appelle erreur de vitesse ou de traînage du système en boucle fermée, l'écart $\varepsilon(t)$ lorsque l'entrée $e(t)$ est une rampe de pente a (échelon d'accélération). Nous avons dans ce cas :

$$e(t) = at u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{a}{p^2}$$

L'expression de ε_p est :

$$\varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{(1+T(p))}$$

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{(1+T(p))} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{1 + \frac{K \cdot N(p)}{p^\alpha D(p)}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a \cdot p^{\alpha-1} \cdot D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)}$$

Comme $N(0) = D(0) = 1$, on trouve donc :

$$\varepsilon_v = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a \cdot p^{\alpha-1}}{p^\alpha + K}$$

- Pour les systèmes de classe 0 ($\alpha = 0$) alors : $\varepsilon_v = +\infty$
- Pour les systèmes de classe 1 ($\alpha = 1$) alors : $\varepsilon_v = \frac{a}{K}$

- Pour les systèmes de classe $n \geq 2$ ($\alpha \geq 2$): alors : $\varepsilon_v = 0$

Remarques 5.6 :

- Pour obtenir une précision statique parfaite (ou annuler l'erreur de vitesse), il faut au moins deux (2) intégrations dans la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ ($\alpha \geq 2$),
- Si $T(p)$ est de classe 1, l'erreur de vitesse diminue quand le gain K augmente.

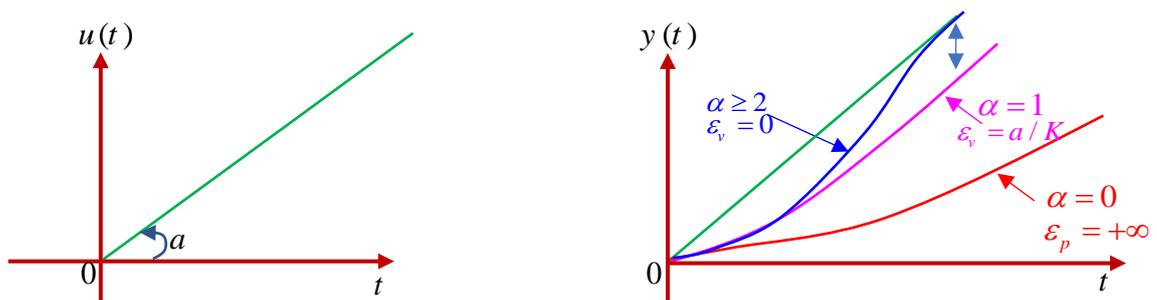


Fig 5.8 : Erreur de vitesse (ou de traînage) (pour une entrée rampe)

- **Erreur d'accélération ε_a** : On appelle d'accélération du système en boucle fermée, l'écart $\varepsilon(t)$ lorsque l'entrée $e(t)$ est une fonction parabolique. C'est l'erreur qui subsiste en régime permanent sur la réponse à une entrée de type échelon accélération.

Nous avons dans ce cas :

$$e(t) = a \cdot \frac{t^2}{2} u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{a}{p^3}$$

L'expression de ε_p dans ce cas est :

$$\varepsilon_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2} \cdot \frac{a}{(1+T(p))}$$

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2} \cdot \frac{a}{(1+T(p))} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{p^2} \cdot \frac{a}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{N(p)}{D(p)}} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a \cdot p^{\alpha-2} \cdot D(p)}{p^\alpha D(p) + KN(p)}$$

Comme $N(0) = D(0) = 1$, on trouve donc :

$$\varepsilon_a = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a \cdot p^{\alpha-2}}{p^\alpha + K}$$

- Pour les systèmes de classe 0 ($\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$) alors : $\varepsilon_a = +\infty$
- Pour les systèmes de classe 2 ($\alpha = 2$) alors : $\varepsilon_a = \frac{a}{K}$

- Pour les systèmes de classe $n \geq 3$ ($\alpha \geq 3$): alors : $\varepsilon_a = 0$

Remarques 5.7 :

- Pour obtenir une précision statique parfaite (ou annuler l'erreur d'accélération), il faut au moins trois (3) intégrations dans la fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ ($\alpha \geq 3$),
- Si $T(p)$ est de classe 2, l'erreur d'accélération diminue quand le gain K augmente.

Tableau récapitulatif : Le tableau ci-dessous donne les valeurs des erreurs en fonction de la classe du système :

Tableau 5.2 : Précision des systèmes asservis linéaires continus, en fonction de leur classe

Entrée Classe	Échelon d'amplitude E_0 (écart de position)	Rampe de pente a (écart de vitesse)	Échelon d'accélération (écart d'accélération)
$\alpha = 0$	$\varepsilon_p = \frac{E_0}{1+K}$	$\varepsilon_v \rightarrow \infty$	$\varepsilon_a \rightarrow \infty$
$\alpha = 1$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_v = a / K$	$\varepsilon_a \rightarrow \infty$
$\alpha = 2$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_v = 0$	$\varepsilon_a = a / K$
$\alpha = 3$	$\varepsilon_p = 0$	$\varepsilon_v = 0$	$\varepsilon_a = 0$

Exercices sur le chapitre 5

Exercice 1 : On considère les systèmes asservis de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie par :

$$G_1(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \quad , \quad G_2(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + 2\xi\omega_n p + 1} \quad \text{avec } K > 0, \tau > 0, \xi > 0 \text{ et } \omega_n > 0$$

Montrer que les deux systèmes $G_1(p)$ et $G_2(p)$, placé dans une boucle à retour unitaire, est stable en boucle fermée quelle que soit la valeur du gain statique K .

Exercice 02 : On considère les systèmes asservis de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définies par :

$$1) \quad G(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)}, \quad 2) \quad G(p) = \frac{K}{p^3 + 5p^2 + 8p + 5}, \quad 3)$$

$$G(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{p(p+1)(0.5p+1)}$$

En utilisant le critère algébrique de Routh, discuter la stabilité suivant la valeur du gain positif K des systèmes en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

Exercice 03 : Soit le système dont la fonction de transfert $G(p)$ est :

$$G(p) = \frac{K}{p^5 + 2p^4 + p^3 + p^2 + 2p + 1}$$

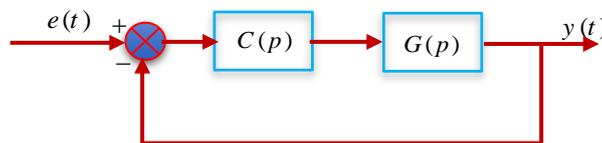
- 1) Etudier la stabilité du système à l'aide du critère de Routh.
- 2) Quel est le nombre de pôles stables et instable ? justifier ?.

Exercice 04: On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$ définie

$$\text{par : } G(p) = \frac{K}{p(p+1)^3}.$$

- 1) Déterminer à l'aide du critère de Routh les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée en fonction de K lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.
- 2) Étudier la stabilité du système bouclé en utilisant le critère de Nyquist.
- 3) Calculer la valeur de K pour imposer une marge de phase égale à 45° .

Exercice 05 : Considérons l'asservissement suivant :

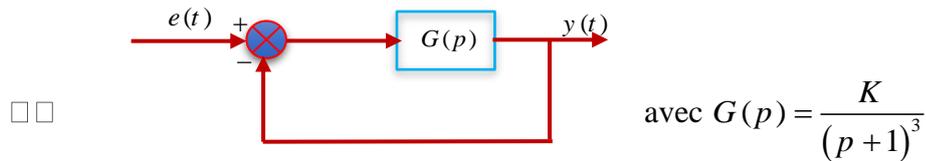


avec $G(p) = \frac{5}{p(p+0.1p)}$ est la fonction de transfert du système et $C(p) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i p} \right)$ est

la fonction de transfert du correcteur.

- 1) Calculer la fonction de transfert en boucle fermée du système en fonction de K_p et T_i .
- 2) Déterminer pour quelles valeurs de K_p et T_i le système est stable en boucle fermé

Exercice 06 : Soit le système en boucle fermée de la figure avec :



- 1) Tracer le lieu de Nyquist de $G(j\omega)$
- 2) Déterminer la fréquence d'intersection avec l'axe réel, ω_π
- 3) Discuter la stabilité du système bouclé, en spécifiant en particulier :
 - a) La plage du gain K assurant la stabilité.
 - b) Positions des pôles correspondant au gain critique.
- 4) Pour une entrée échelon unitaire, trouver l'expression de l'erreur statique et déterminer l'intervalle du gain K assurant à la fois la stabilité du système et une erreur inférieure à 20 %.

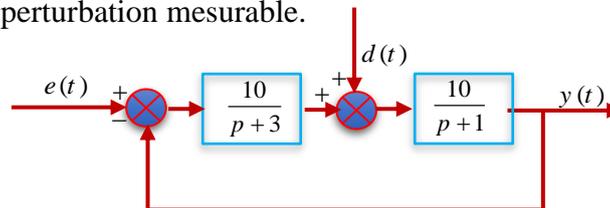
Exercice 07 : On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte $G(p)$

définie par : $G(p) = \frac{K}{p(p+1)^2}$ et $K > 0$.

On place ce système dans une boucle à retour unitaire.

- 1) Calculer, en boucle fermée, l'erreur de position ε_p , l'erreur de vitesse ε_v et l'erreur d'accélération ε_a de ce système placé dans une boucle à retour unitaire.
- 2) Déterminer la valeur de K qui assure au système en boucle fermée une erreur de position égale à 5 % ($\varepsilon_p = 5\%$).

Exercice 08 : Soit le système asservi représenté par la figure suivante où $e(t)$ est l'entrée du système et $d(t)$ est une perturbation mesurable.

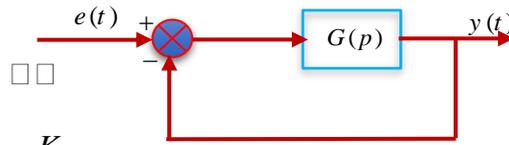


- 1) calculer pour les deux cas ci-dessous la valeur de l'erreur statique ε_p

- L'entrée $e(t) = u(t)$ (échelon unitaire) et $d(t) = 0$.
- $e(t) = 0$ et $d(t) = u(t)$.

Exercice 09 :

I) Soit le système en boucle fermée de la figure avec :

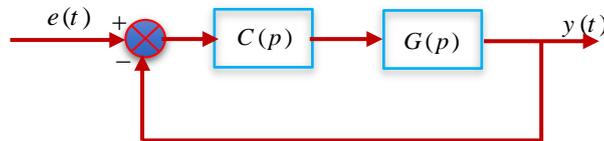


avec $G(p) = \frac{K}{\left(1 + \frac{1}{10}p\right)\left(1 + \frac{1}{80}p\right)}$

- 1) En appliquant le critère de Routh, montrer que le système est toujours stable pour K positif.
- 2) Pour $K = 1$, tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en BO soit $T(p)$.
- 3) Déterminer la valeur du gain K correspondant à une marge de phase de 45 degrés ($\Delta\varphi = 45^\circ$).
- 4) Calculer en fonction de K les erreurs de position ε_p et de vitesse ε_v .

II) Pour améliorer la précision du système bouclé, on ajoute comme indiqué par la figure ci-

dessous un correcteur de fonction de transfert $C(p) = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{10}p\right)$.



- 1) Donner la nouvelle expression de la fonction de transfert en BO $G(p)$
- 2) Donner la nouvelle valeur de K pour obtenir la même marge de phase que précédemment ($\Delta\varphi = 45^\circ$).
- 3) Calculer en fonction de K les nouvelles valeurs des erreurs de position ε_p et de vitesse ε_v .

Références bibliographiques

- [1]. Rosario, T. « Commande et diagnostic des systèmes dynamiques ». Elipses. (2005).
- [2]. Rao V. Dukkupati. « Analysis and design of control systems using Matlab ». New age international publishers. (2006).
- [3]. Prouvost, P. « Automatique : contrôle et régulation ». Dunod. (2005).
- [4]. Rivoire, M., & Ferrier, J. L. « Cours d'Automatique, tomes 1et 2 ». Editions Eyrolles. (1996).
- [5]. Rivoire, M., & Ferrier, J. L. « Exercices d'Automatique, tomes 1et 2 ». Editions Eyrolles. (1996).
- [6]. Ogata, K. « Modern control engineering ». Fourth edition, Prentice Hall International Editions. (2001).
- [7]. Granjon, Y. « Automatique : Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'états ». Dunod. (2015).
- [8]. Karris, S. T. « Signals and systems with MATLAB computing and Simulink modeling ». Orchard publications. (2006).
- [9]. Le Gallo, O. « Automatique des Systèmes mécaniques ». Dunod. (2009).
- [10]. Egon, H., Marie, M., & Porée P. « Traitement du signal et automatique ». Volume 1, Traitement du signal et asservissements analogiques. Hermann. (2000).
- [11]. F. Milsant « Asservissements linéaires. Tome 1 et Tome 2 ». Editions Eyrolles. 4ème Edition. (1981).
- [12]. Belkacem Ould Bouammama. « Automatique. Continue et discrète ». Note de cours. Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal de Lille. (2018).
- [13]. Mohammed-Karim Fellah. « Asservissements Linéaires Continus ». Note de cours. Université de Djillali Liabès – Sidi Bel-Abbès. (2013).
- [14]. Aggoune Lakhdar. « Systèmes Asservis ». Note de cours. Université Ferhat Abbas Sétif 1. (2019).
- [15]. Guenounou Ouahi. « Systèmes Linéaires Continus Courset Exercices ». Note de cours. Université A. Mira de BEJAIA. (2014)