Université 20 août 1955-Skikda
Faculté de Technologie

Les Chaînes de Markov (Graphes de Markov) traitées à l'aide du Logiciel : **Grif**

GRIF : Grafique intéractif et calculs de fiabilité) - Module : **Markov**

I. Introduction

II. Construction du graphe

III. Exploitation quantitative

IV. Présentation du logiciel Grif (Graphes de Markov)

Caractéristiques majeures

- ***Modèle comportemental***, graphique, cyclique.
- Modèle ***états-transitions.***
- Prise en compte du ***temps*** (évolution, aspect dynamique).

Champ d'application

- Modélisation des systèmes à ***composants réparables ou non.***

- ***Calcul « exact » de la fiabilité*** $R_S(t)$ et de la ***disponibilité*** $A_s(t)$ des ***systèmes réparables.***

- Calcul des ***indicateurs classiques*** de la SdF :

MTTF, MUT, MDT, MTBF

I. Introduction

II. Construction du graphe

III. Exploitation quantitative

IV. Présentation du logiciel JaGrif (module Graphes de Markov)

Etapes

- La ***construction du graphe de Markov***, relatif à un système constitué d'un ***ensemble de composants***, s'effectue comme suit :
  - Définition des différents ***états possibles*** de chaque ***composant***.
  - Recensement de toutes les transitions possibles entre ces différents états et l'identification de toutes les causes de ces transitions. Les causes des transitions sont généralement des défaillances des composants ou la réparation de composants : ***combinaison*** des états de ses constituants.

- ✓ Construction du graphe de Markov proprement dit :
  - représentation de chacun des ***états*** par un ***cercle***,
  - représentation des ***transitions*** entre les états par des ***flèches*** : chaque transition symbolise la façon dont le système saute (***évolue***) d'un état (***état de départ E_i***) vers un autre (***état d'arrivée E_j***). Le paramétrage de ces transitions (taux de transition $\lambda_{i\,j}$) exprime les chances que chacune d'elles soit réellement empruntée au cours de la vie du système.
- ✓ ***Agrégation du graphe*** : Il est ***très utile de réduire*** (lorsque ceci est possible) ***la taille*** du graphe. Cela consiste à repérer les états ayant des caractéristiques identiques (même probabilité d'y arriver, même probabilité d'en sortir et de les agréger en ***macroétats***.

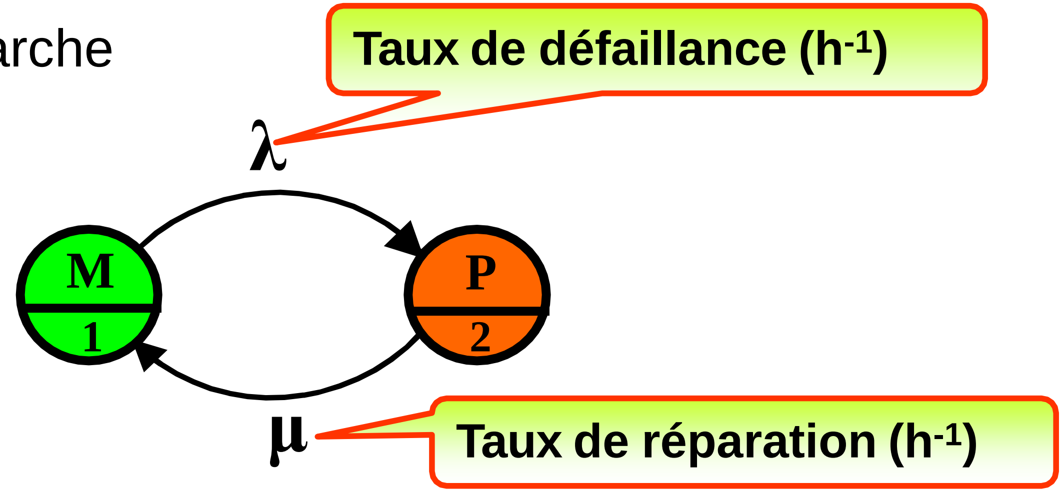
Etapes

✓ Pour établir un graphe d'état d'un système, il faut prendre en considération :

- Le nombre de composants qui constituent le système ;
- La structure du système ;
- Le nombre de réparateur ;
- La politique de maintenance.

Exemples de Graphes de Markov : Architectures 1oo1 et 1oo2

- **1oo1.** Il existe deux états : **M**arche (état 1) et **P**anne (état 2).

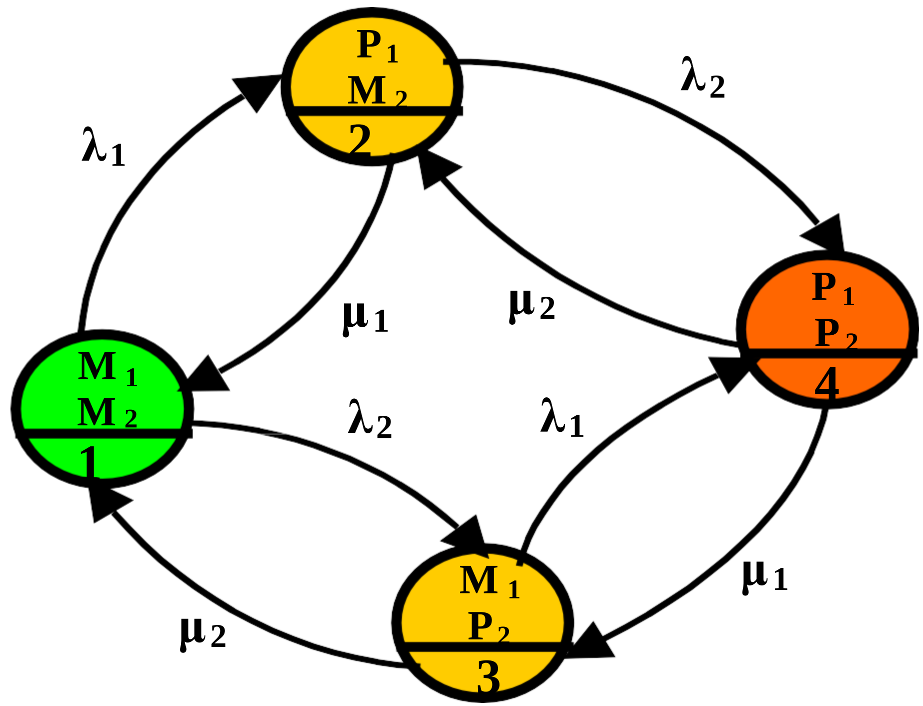


- **1oo2 :**
  - Constituée de deux composants c_1 (λ_1, μ_1) et c_2 (λ_2, μ_2).
  - Les deux composants fonctionnent en ***redondance active***.
  - 2 réparateurs sont disponibles.

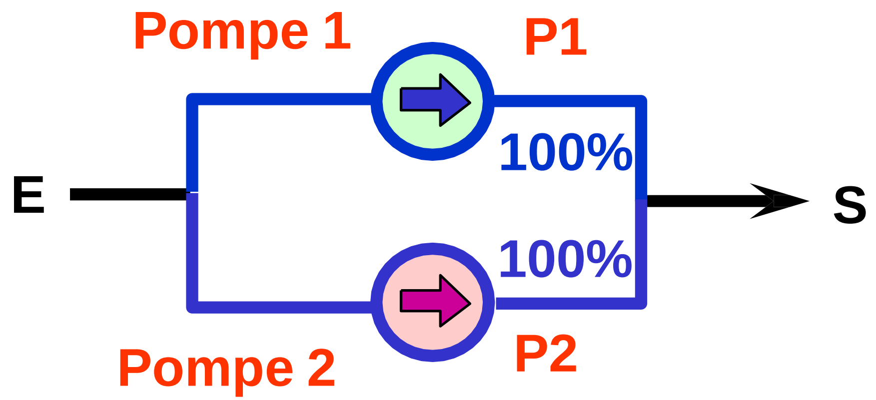
c_1 | M_1, P_1

c_2 | M_2, P_2

S | $M_1 M_2$, $M_1 P_2$, $P_1 M_2$, $P_1 P_2$



Exemples de Graphes de Markov : Circuit de pompage (exemple)



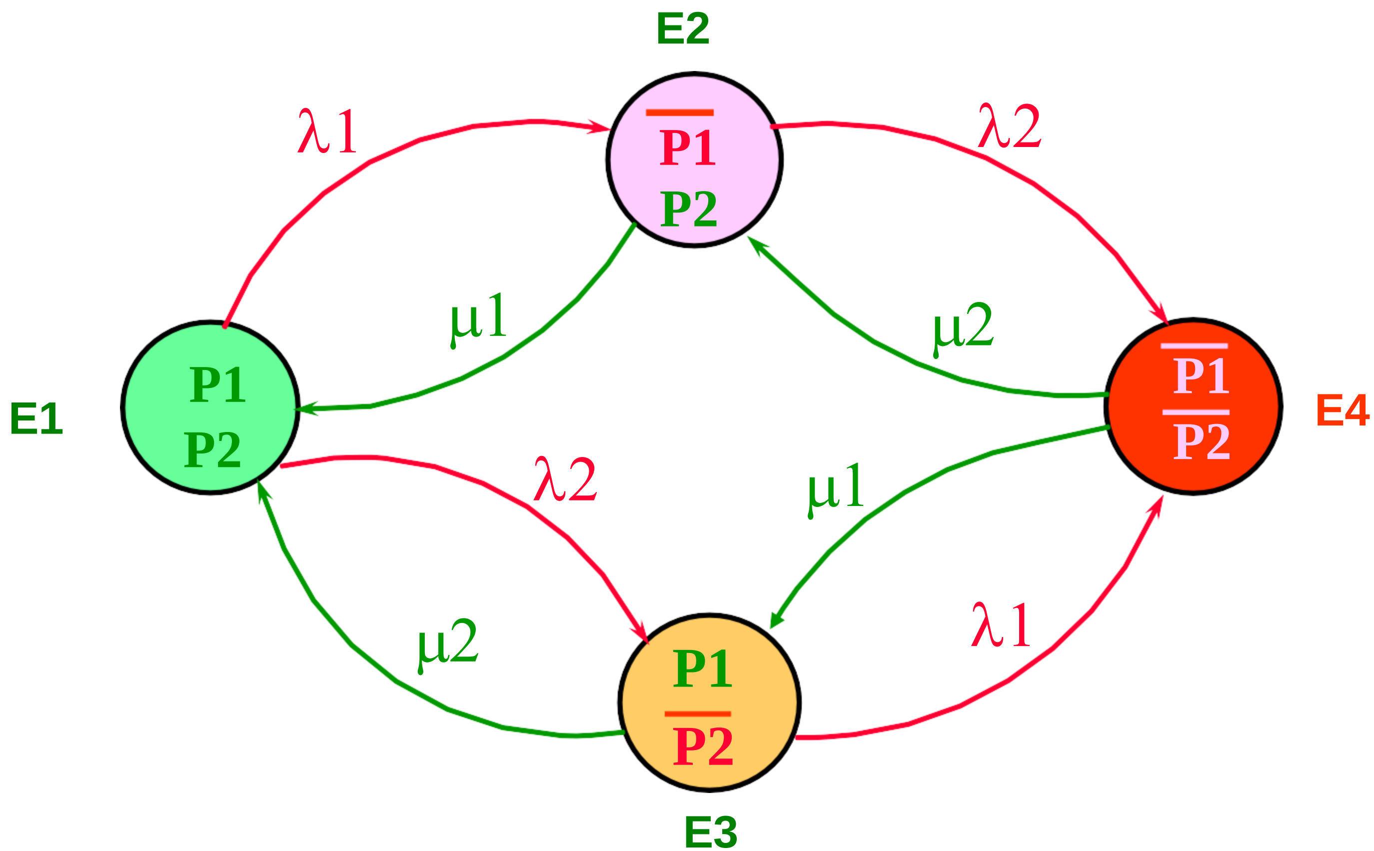
- ***Configuration 1:*** 2 réparateurs disponibles (P1 et P2 sont indépendantes).

- ***Configuration 2 :*** 1 seul réparateur disponible, P2 est prioritaire pour la réparation.

- ***Configuration 3*** **:** 2 réparateurs disponibles, pas de réparation possible lorsque les deux pompes sont simultanément en panne (***Calcul de fiabilité***).

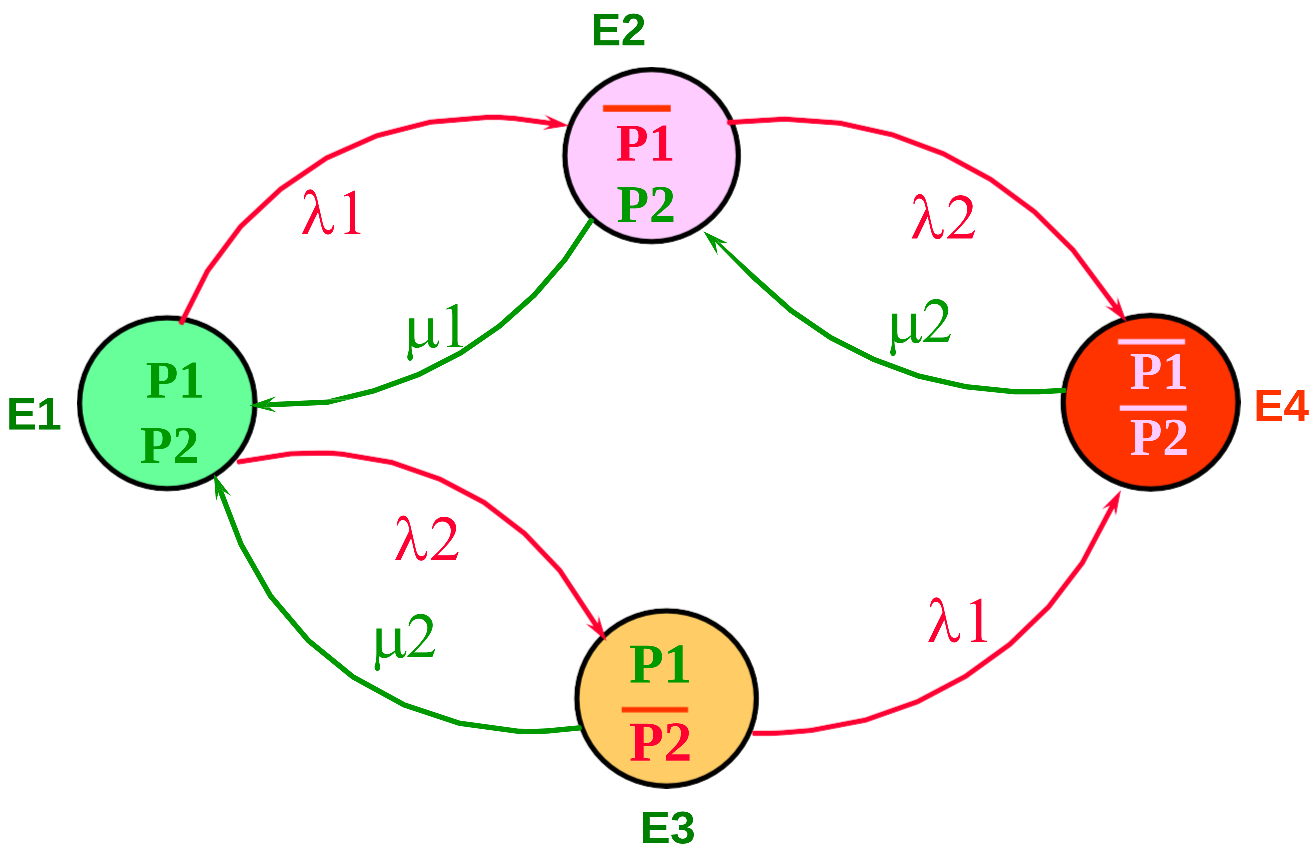
Exemples de Graphes de Markov : Circuit de pompage – Configuration 1

- ***Configuration 1:*** 2 réparateurs disponibles (P1 et P2 sont indépendantes).



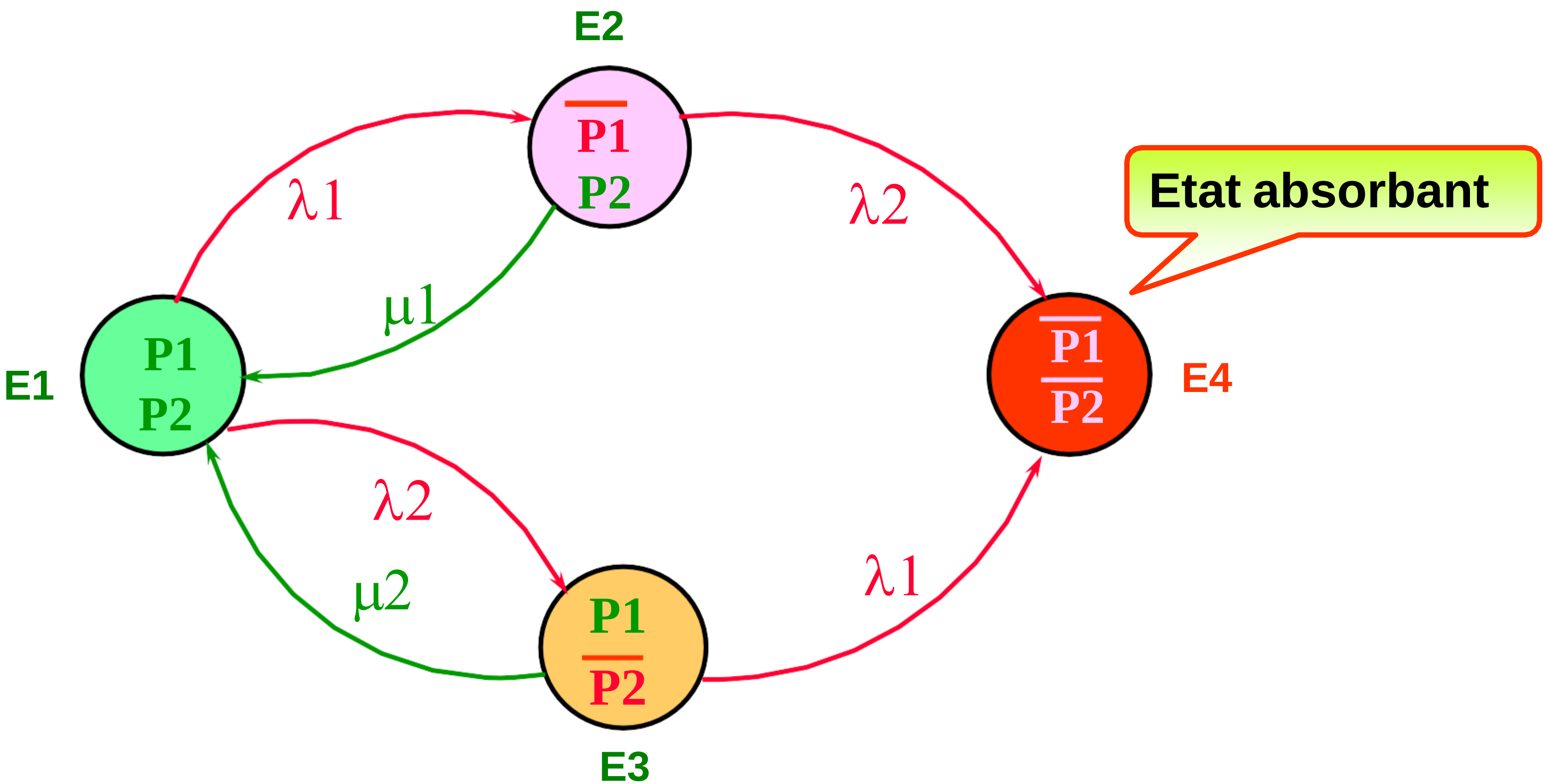
Exemples de Graphes de Markov : Circuit de pompage – Configuration 2

- ***Configuration 2 :*** 1 seul réparateur disponible, P2 est prioritaire pour la réparation.



Exemples de Graphes de Markov : Circuit de pompage – Configuration 4

- ***Configuration* 3 :** 2 réparateurs disponibles, pas de réparation possible lorsque les deux pompes sont simultanément en panne (***Calcul de fiabilité***).



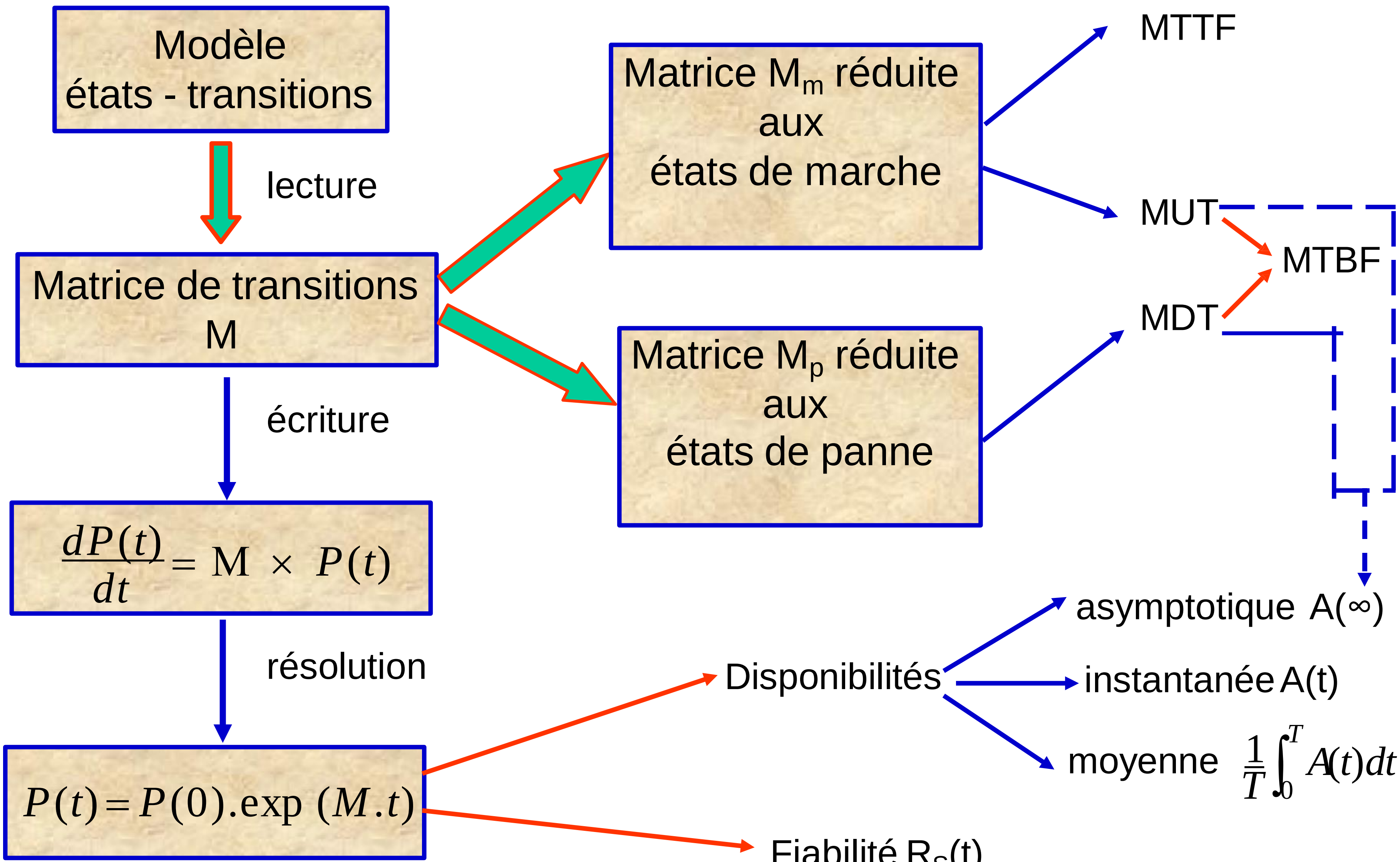
I. Introduction

II. Construction du graphe

III. Exploitation quantitative

IV. Présentation du logiciel JaGrif (module Graphes de Markov)

Résumé


Modèle
états - transitions
lecture
Matrice de transitions
M
écriture
$\frac{dP(t)}{dt} = \mathrm{M} \times P(t)$
résolution
$P(t) = P(0).\exp\,(M.t)$
Matrice M_m réduite
aux
états de marche
Matrice M_p réduite
aux
états de panne
MTTF
MUT
MTBF
MDT
Disponibilités
asymptotique A(∞)
instantanée A(t)
moyenne $\frac{1}{T}\int_0^T A(t)dt$
Fiabilité $R_S(t)$

Formule de base

❑La ***formule de départ*** des ***processus de Markov*** consiste à établir la probabilité $P_i(t + dt)$ d'être dans l'état i à l'instant $t + dt$ en fonction des probabilités $P_k(t)$ des différents états (k) à l'instant t. Cette probabilité se divise en deux parties complémentaires :

1. on ***arrive*** dans l'état i entre t et $t + dt$;
2. on ***est*** dans l'état i à l'instant t et on ***n'en sort pas*** entre t et $t + dt$.

$$P_i(t+dt) = \underbrace{\sum_{k \neq i} P_k(t)\lambda_{ki}\,dt}_{1} + \underbrace{P_i(t)\left(1 - \sum_{k \neq i} \lambda_{ik}\,dt\right)}_{2}$$

Chaque état fait l'objet d'une équation similaire

Formule de base des processus markoviens homogènes

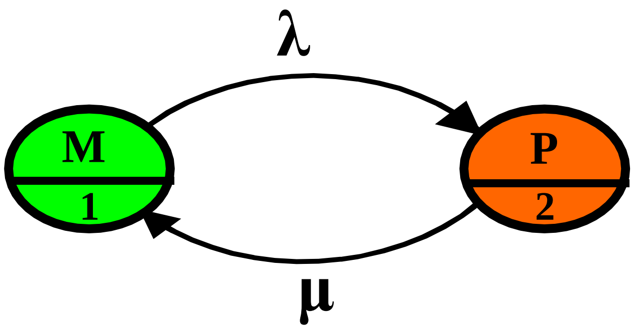
$$\boxed{\frac{dP(t)}{dt} = M \times P(t)}$$

Système d'équations différentielles homogènes à coefficients constants.

M : Matrice des transitions

Exploitation quantitative du graphe

Formule de base : architecture 1oo1



$$\begin{cases} P_1(t+\mathrm{d}t) = P_1(t)\cdot(1-\lambda\,\mathrm{d}t) + P_2(t)\cdot\mu\,\mathrm{d}t \\ P_2(t+\mathrm{d}t) = P_1(t)\cdot\lambda\,\mathrm{d}t + P_2(t)\cdot(1-\mu\,\mathrm{d}t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{P_1(t+\mathrm{d}t)-P_1(t)}{\mathrm{d}t} = -P_1(t)\cdot\lambda + P_2(t)\cdot\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_1(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{P}_1(t) \\ \dfrac{P_2(t+\mathrm{d}t)-P_2(t)}{\mathrm{d}t} = P_1(t)\cdot\lambda - P_2(t)\cdot\mu = \dfrac{\mathrm{d}P_2(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{P}_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{P}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{bmatrix}}_{} \times \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

- Une *matrice carrée* dont l'ordre est égal au nombre d'états du système.
- La *somme de chaque colonne est nulle* (*matrice singulière*).

Remarque : ***M*** peut être directement obtenue à partir du graphe de la manière suivante :

Etats donneurs

$$M = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & -\lambda & \mu \\ 2 & \lambda & -\mu \end{array}$$

Etats Receveurs

❑**Disponibilité instantanée A(*t*) :** ***aptitude*** *d'un système à* ***fonctionner*** *à un* ***instant précis t****. Elle est mesurée par la somme des probabilités relatives aux états de bon fonctionnement (EM : états de marche).*

$$A(t) = \sum_{i \in EM} P_i\,(t)$$

$P_i\,(t)$ = probabilité d'être dans l'état E_i à l'instant *t.*

❑**Disponibilité moyenne A_{moy} :** ***moyenne*** de la disponibilité instantanée **A(*t*)** sur l'intervalle **[t_1 , t_2].** Elle exprime donc le pourcentage du temps moyen de bon fonctionnement sur [t_1 , t_2].

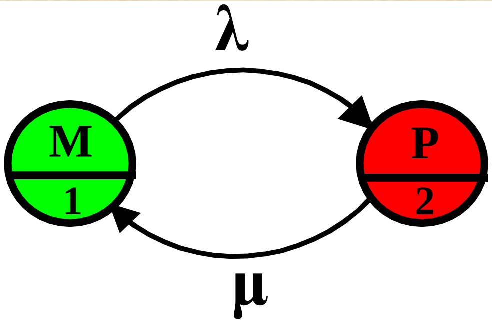
$$A_{moy} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} A(t)\,\mathrm{d}t$$

❑ **Disponibilité limite A(∞) :** ***valeur limite*** de ***A(t)*** quand ***t*** tend vers ***l'infini*** **(*disponibilité asymptotique*)**.

$$A(\infty) = \lim_{t \to \infty} A(t)$$

- **Remarque :** en régime stationnaire, les ***P_i* (∞)** deviennent constantes. Donc **d*P_i* (∞) = 0.**

Evaluation de la disponibilité : architecture 1oo1



$$\begin{bmatrix}\dot{P}_1\\ \dot{P}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\lambda & \mu\\ \lambda & -\mu\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}P_1\\ P_2\end{bmatrix}$$

$$\boxed{P_1(t) + P_2(t) = 1}$$

Méthodes de résolution

- Transformées de Laplace
- Spectrale (valeurs et vecteurs propres)
- Développement en série de l'exponentielle de matrice
- Exponentiation indirecte
- Uniformisation
- Runge-Kutta
- Euler, …

$$P_1(t) = A(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu(1-A(0)) - \lambda A(0)}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

- Composant disponible à $t = 0$ ($P_1(0) = 1$) :

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

- Composant indisponible à $t = 0$ ($P_1(0) = 0$) :

$$A(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right]$$

- ***Remarque :*** dans les deux cas :

$$A(\infty) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$$

A(∞) ne dépend pas de l'état initial