

# المحور الأول: توزيع برنولي

مارس 2024

الأستاذ: سعيود وليد





7	وحدة
9	مقدمة
11	<b>I-المكتسبات القبلية</b>
13	<b>II-تمرين :اختبار المكتسبات القبلية</b>
15	<b>III-ماهية توزيع بارنولي</b>
15.....	أ. تعريف تجربة برنولي.....
15.....	ب. قانون التوزيع الاحتمالي.....
15.....	پ. التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية.....
17	<b>IV-تمرين</b>
19	<b>V-تمرين</b>
21	<b>VI-حساب الأمل الرياضي والتباين</b>
21.....	أ. حساب الأمل الرياضي.....
21.....	ب. حساب التباين.....
23	<b>VII-تمرين</b>
25	<b>VIII-تمرين</b>
27	<b>IX-تمارين محلولة</b>
27.....	أ. التمرين الأول.....
27.....	ب. التمرين الثاني.....
29	<b>X-سلسلة الأعمال الموجهة الخاصة بتوزيع برنولي</b>
31	<b>XI-تمرين</b>
33	<b>XII-تمرين</b>
35	حل التمارين
37	قاموس
39	معنى المختصرات
41	قائمة المراجع



# وحدة

الأهداف العامة للمقياس:

- من خلال دراسة مقياس الإحصاء 03 سيكون الطالب قادراً على:
1. التعرف على أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة.
  2. إكساب الطالب القدرة على تطبيق التوزيعات الاحتمالية لمعالجة وحل المشكلات الاقتصادية والإدارية والاجتماعية.
  3. تمكن الطالب من استيعاب المتغيرات العشوائية الثنائية المنفصلة والمتصلة وأهم خواصها.
  4. التعرف على التوزيعات ذات المتغيرين.
- الأهداف الخاصة بالمحور الأول:

- من خلال دراسة توزيع برنولي يلم الطالب بأهداف المحور حيث يمكنه أن:
- يسترجع المعلومات من الذاكرة من خلال تذكر المفاهيم الخاصة بالإحصاء الوصفي والاحتمالات.
  - يتعرف على شروط تطبيق قانون التوزيع الاحتمالي لبرنولي.
  - يطبق خواص التوزيع الاحتمالي، كالتوقع الرياضي والتباين.
  - يحسب احتمالات القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع برنولي.
  - يصنف المشكلات الاقتصادية والاجتماعية والإدارية التي تتبع توزيع برنولي.



# المكتسبات القبلية



حتى يتمكن الطالب من دراسة محتوى هذه المادة لابد أن يكون ملما بمكتسبات مادة الرياضيات، الإحصاء الوصفي والاحتمالات.

# تمرين :اختبار المكتسبات القبلية



[ 35 ص 1 حل رقم ]

تمرين

المتغيرات العشوائية المنفصلة تأخذ قيما ضمن مجالات

صحيح

خطأ

تمرين

نرمي حجر نرد منتظم في الهواء، احتمال ظهور العدد 5 هو:

# ماهية توزيع برنولي



سننتظر في هذا الجزء إلى تعريف تجربة برنولي وقانونها الاحتمالي، بالإضافة إلى تمثيل دالة الكثافة الاحتمالية.

## أ. تعريف تجربة برنولي

يستخدم توزيع برنولي في التجربة من النوع البسيط جداً وهي واحدة من التجارب التي تكون فيها فقط نتيجتان مُمكنتا الحدوث،  
مثل:

- ظهور الكتابة أو الصورة عند رمي قطعة نقدية.
  - قطع معيبة أو غير معيبة عند فحص الإنتاج في مصنع معين.
  - إصابة أو عدم إصابة الهدف من قبل قناص يصب على هدف معين.
- فتجربة برنولي تحتوي على نتيجتين متنافيتين، وقوع إحداهما ينفي وقوع الأخرى (نقوم بالتجربة مرة واحدة فقط). فإذا رمزنا لاحتمال النجاح بالرمز  $p$  واحتمال الفشل بالرمز  $q$  حيث:  $q=1-p$ . فإن المتغير العشوائي  $X$  يأخذ أحد النتيجتين: إما 0 أو 1.

## ب. قانون التوزيع الاحتمالي

نقول عن متغير عشوائي  $X$  أنه يتبع توزيع برنولي إذا وفقط إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) له تكتب على الشكل:

$$P(x=x_i) = p^x \cdot q^{1-x}; x \in \{0; 1\}$$

إذا كان:  $x=0$  فإن:  $p(x=0) = 1-p=q$

وإذا كان:  $x=1$  فإن:  $p(x=1) = p$

ويمكن تلخيص ذلك في الجدول التالي:

$X_i$	0	1
$P_i$	$q$	$p$

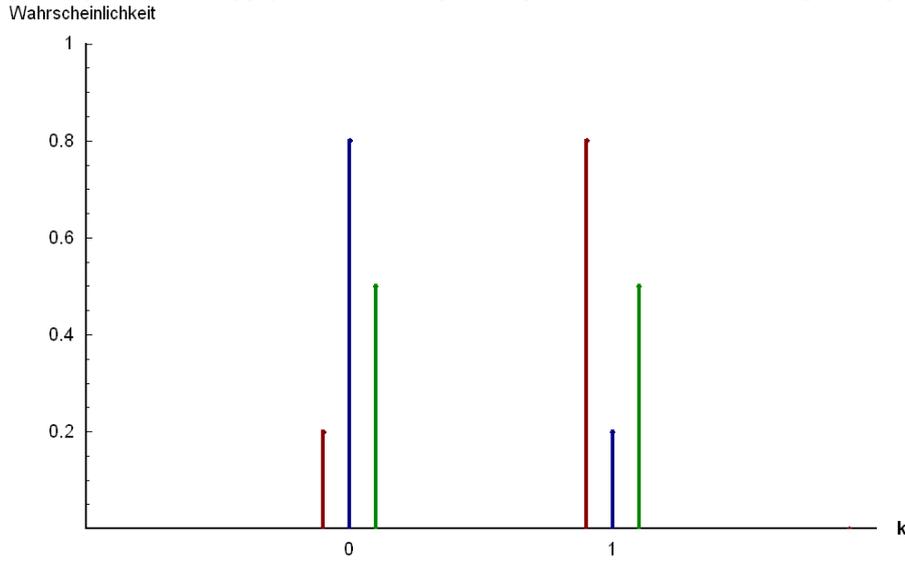
التوزيع الاحتمالي لتجربة برنولي

## ب. التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية

بما أن توزيع بيرنولي من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة، فيمكن تمثيله باستعمال الأعمدة البيانية، فإذا

كانت قيمه  $p$  مثلا تساوي 0.2 فإن قيمه  $q$  تساوي 0.8 وإذا كانت قيمه  $p$  تساوي 0.5 فإن قيمة  $q$  تساوي 0.5 وإذا كانت قيمة  $p$  تساوي 0.8 فإن قيمة  $q$  تساوي 0.2

ويكون التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية (PDF★) حسب قيمة  $p$  و  $q$  على الشكل التالي:



تمثيل بياني لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع برنولي

# تمرين IV

[35 ص 2 حل رقم]

تجربة برنولي تحتوي على نتيجتين

متنافيتين

غير متنافيتين

# تمرين

# V

[35 ص 3 حل رقم]

أي من هذه العبارات ليس شرطا من شروط تجربة برنولي:

التجربة تحتوي على نتيجتين فقط

تكرار التجربة العشوائية عدة مرات

الحصول على إحدى النتيجتين ينفي وقوع الأخرى

# حساب الأمل الرياضي والتباين

## VI

سنقوم بحساب الأمل الرياضي والتباين لتوزيع برنولي.

### أ. حساب الأمل الرياضي

في نظرية الاحتمالات، القيمة المتوقعة (وتسمى أيضًا التوقع، أو التوقع الرياضي، أو المتوسط، أو القيمة المتوقعة) هي تعميم للمتوسط الحسابي المرجح، بشكل غير مباشر، فالقيمة المتوقعة هي المتوسط الحسابي للقيم المحتملة التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي، مرجحة باحتمالية تلك النتائج.

$$E(x) = \sum_{i=0}^1 x_i p_i \text{ لدينا:}$$

$$E(x) = 0 \times q + 1 \times P \text{ وبالتالي:}$$

$$E(x) = p \text{ ومنه:}$$

### ب. حساب التباين

يمكن حساب التباين للمتغير العشوائي  $x$  الذي يتبع توزيع برنولي كما يلي:

$$v(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \text{ لدينا:}$$

$$E(x^2) = \sum_{i=0}^1 x_i^2 \cdot p_i \text{ حيث أن:}$$

$$E(x^2) = 0 \times q + 1 \times p \text{ وبالتالي:}$$

$$V(x) = p - p^2 = p(1 - p) \text{ إذن:}$$

# تمرين VII

[35 ص 4 حل رقم]

نرمي في الهواء قطعة نقدية مغشوشة، حيث أن احتمال ظهور الظهر يساوي 0,4 ونعرف المتغير العشوائي  $X$  الذي يمثل ظهور الوجه.  
احسب الأمل الرياضي.

# تمرين VIII

[35 ص 5 حل رقم]

إذا كان  $X$  متغير عشوائي يتبع توزيع برنولي معرف كما يلي:  $X \sim b(1, 0, 3)$  فإن التباين يساوي:

# تمارين محلولة

## IX

سوف نقوم بتوضيح تجربة برنولي بالإضافة إلى حساب الأمل الرياضي والتباين من خلال التمرين الأول والثاني.

### أ. التمرين الأول

نرمي قطعة نقدية في الهواء مرة واحدة، ونعرف المتغير العشوائي  $X$  الذي يمثل ظهور الصورة.

• عين القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي  $X$ .

• احسب الأمل الرياضي والتباين.

الحل النموذجي:

- تعيين القانون الاحتمالي لـ  $X$ :

المتغير العشوائي  $X$  يتبع توزيع برنولي لأننا قمنا برمي القطعة النقدية مرة واحدة، وهذه التجربة تحتوي على نتيجتين: إما أن تظهر الصورة باحتمال  $p=1/2$  أو لا تظهر الصورة باحتمال  $q=1/2$ .

ونكتب:  $X \sim b(1, 0.5)$

- حساب الأمل الرياضي والتباين:

لدينا:  $E(x)=p=0.5$

ولدينا:  $V(x)=p.q=(0.5)(0.5)=0.25$

### ب. التمرين الثاني

نرمي زهرة نرد غير مغشوشة، ونعرف المتغير العشوائي  $X$  الذي يمثل ظهور الرقم 3.

1. حدد طبيعة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي  $X$ .

2. احسب الأمل الرياضي والتباين واستنتج قيمة الانحراف المعياري.

الحل النموذجي:

• تحديد طبيعة التوزيع الاحتمالي لـ  $X$ :

تجربة رمي زهرة نرد والاهتمام بظهور الرقم 3 هي تجربة تحتوي على نتيجتين: إما أن يظهر العدد 3 باحتمال  $p=1/6$  أو لا يظهر العدد 3 باحتمال  $q=5/6$ ، وبما أننا قمنا بالتجربة مرة واحدة فإن المتغير العشوائي  $X$  يتبع توزيع برنولي ونكتب:  $X \sim b(1, 1/6)$

• حساب الأمل الرياضي والتباين واستنتاج قيمة الانحراف المعياري:

لدينا:  $E(x)= p=1/6$

ولدينا:  $V(x)= p.q$

وبالتالي:  $v(x)=\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$

ومنه:  $V(x)=5/36$

وعليه تكون قيمة الانحراف المعياري:  $\sigma = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$

# سلسلة الأعمال الموجهة الخاصة بتوزيع برنولي

# X

تمارين خاصة بتوزيع برنولي

*pdf1.pdf*  
وثيقة 1 تمارين خاصة بتوزيع برنولي

## تمرين

## XI

[35 ص 4 حل رقم]

نرمي في الهواء قطعة نقدية مغشوشة، حيث أن احتمال ظهور الظهر يساوي 0,4 ونعرف المتغير العشوائي  $X$  الذي يمثل ظهور الوجه.  
احسب الأمل الرياضي.

## تمرين

## XII

[35 ص 5 حل رقم]

إذا كان  $X$  متغير عشوائي يتبع توزيع برنولي معرف كما يلي:  $X \sim b(1, 0, 3)$  فإن التباين يساوي:

# حل التمارين

< 1 (ص 13)

تمرين

صحيح

خطأ

تمرين

1/6

< 2 (ص 17)

متنافيتين

غير متنافيتين

< 3 (ص 19)

التجربة تحتوي على نتيجتين فقط

تكرار التجربة العشوائية عدة مرات

الحصول على إحدى النتيجتين ينفى وقوع الأخرى

< 4 (ص 23,31)

0,6

< 5 (ص 25,33)

0,21



# قاموس

## التوزيعات الاحتمالية المنقطعة

نقول عن توزيع احتمالي أنه منفصل إذا كانت دالة التوزيع التراكمي له مؤلف من تسلسل قفزات متناهية، مما يعني أنه يتوافق مع متغير عشوائي منقطع، وهو بالتعريف متغير يمكنه أن يأخذ فقط قيما من مجموعة محددة منتهية وقابلة للعد. (على سبيل المثال، رمي عملة معدنية، أو رمي حجر نرد)

## متغير عشوائي

في الرياضيات، وبالتحديد في الاحتمالات والإحصاء، هو متغير ذو قيمة متغيرة طبقاً للصدفة (أي أنه يحقق مفهوم العشوائية)، فلا يكون ثابتاً على قيمة معينة محددة. يساوي متغير عشوائي قيمة من القيم الممكنة المختلفة، لكل واحدة منهن احتمال ما.

## نتيجتين متنافيتين

نقول عن نتيجتين أنهما متنافيتان إذا كان وقوع إحداهما ينفي وقوع الأخرى، وكمثال على ذلك عند رمي قطعه نقيه فان ظهور الصورة ينفي ظهور الكتابة والعكس صحيح.

# معنى المختصرات

probability density function

PDF -

# قائمة المراجع

- [4] بوعافية سمير، مدخل إلى الإحصاء 2، دار الباحث للنشر والإشهار، الجزائر، 2023، ط1.
- [5]- ملخصات شوم نظريات ومسائل في الإحصاء، موراي ر- شبيجل، ترجمة شعبان عبد الحميد شعبان، مراجعة أحمد حسن الموازيني، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر ، 2004، ط7.

# مراجع الأترنتت

[https://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%AA%D9%88%D8%B2%D9%8A%D8%B9\\_%D8%A8%D8%B1%D9%86%D9%88%D9%84%D9%8A](https://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%AA%D9%88%D8%B2%D9%8A%D8%B9_%D8%A8%D8%B1%D9%86%D9%88%D9%84%D9%8A) [1]

<https://drive.google.com/uc?id=1tH5PDQDDKyXP2V9DHLkBsU9AMtZ9J&export=download> [2]

<https://dspace.univ-guelma.dz/jspui/bitstream/123456789/3643/1/%D9%85%D8%B7%D8%A8%D9%88%D8%B9%D8%A9%20%D8%A7%D8%AD%D8%AA%D9%85%D8%A7%D9%84%D8%A7%D8%AA%20%D8%A7%D9%84%D8%B9%D8%A7%D8%A8%D8%AF%20%D9%85%D8%AD%D9%85%D8%AF.pdf> [3]