

المحور الثاني: توزيع ذي الحددين

مارس 2024

الأستاذ: سعيود وليد

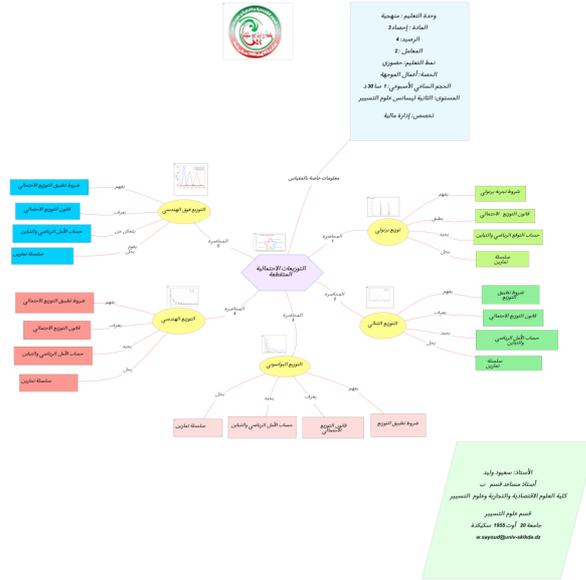


5	وحدة
7	مقدمة
9	I- مفهوم توزيع ذي الحدين
9	أ. تعريف توزيع ذي الحدين.....
9	ب. شروط تطبيق توزيع ذي الحدين.....
9	ج. قانون التوزيع الاحتمالي لذي الحدين.....
10	د. دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الثنائي.....
11	II- تمارين
13	III- التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية لذي الحدين
13	أ. التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية.....
13	ب. التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمية.....
15	IV- الأمل الرياضي والتباين لتوزيع ذي الحدين
15	أ. الأمل الرياضي.....
15	ب. التباين.....
17	V- تمارين
19	VI- تمارين محلولة
21	VII- تمارين: تمارين تقييمية خاصة بالتوزيع الثنائي
23	VIII- سلسلة الأعمال الموجهة الخاصة بتوزيع ذي الحدين
25	IX- اختبار الخروج
27	حل التمارين
29	قاموس
31	معنى المختصرات
33	قائمة المراجع
35	مراجع الأنترنت

وحدة

- عند دراسة هذه المحاضرة يصبح الطالب قادرا على أن:
- يتعرف على شروط تطبيق قانون التوزيع الثنائي.
 - يطبق خواص التوزيع الثنائي، كالتوقع الرياضي والتباين.
 - يحسب احتمالات القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الثنائي.
 - يصنف المشكلات الاقتصادية والإدارية التي تتبع التوزيع الثنائي.

مقدمة



الخارطة الذهنية الخاصة بالتوزيعات الاحتمالية المتقطعة

تُستخدم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة¹ لنمذجة المتغيرات العشوائية التي تأخذ عدداً محدوداً أو معدوداً من القيم. وهي تتميز بوظيفة الكتلة الاحتمالية (PMF^{*}), والتي تعطي احتمالية لكل نتيجة محتملة. ومن أمثلة المتغيرات العشوائية المنفصلة عدد الصور التي تم الحصول عليها عند رمي عملة معدنية، وعدد السيارات التي تمر عبر تقاطع خلال فترة زمنية معينة، وعدد الطلاب في الفصل الدراسي. ومن بين التوزيعات الاحتمالية المنفصلة: توزيع ذي الحدين.

مفهوم توزيع ذي الحدين

تمت دراسة توزيع ذي الحدين لأول مرة فيما يتعلق بألعاب الحظ البحتة، ويستخدم الآن على نطاق واسع لتحليل البيانات في كل مجال من مجالات البحث البشري تقريبًا.

أ. تعريف توزيع ذي الحدين

التوزيع الاحتمالي الثنائي أو ذو الحدين هو توزيع لتجربة عشوائية لها ناتجان فقط، أحدهما نجاح التجربة والآخر فشلها، ويكون الشرط الأساسي أن احتمال النجاح لا يتأثر بتكرار التجربة. ومن الأمثلة على هذا التوزيع:

- رمي قطعة نقود عدة مرات.
- الإحصاءات أو الأسئلة التي تعتمد الإجابة لا أو نعم.
- رمي حجر نرد عدة مرات والاهتمام بظهور رقم معين.

ب. شروط تطبيق توزيع ذي الحدين

نقول عن متغير عشوائي X أنه يتبع التوزيع الثنائي إذا تحققت مجموعة من الشروط يمكن تلخيصها فيما يلي:

1. التجربة العشوائية تحتوي على نتيجتين إما نجاح باحتمال p أو فشل باحتمال $q=1-p$.
2. احتمال النجاح يكون ثابتًا، وبالتالي احتمال الفشل يكون ثابتًا.
3. النتائج تكون مستقلة من تجربة إلى أخرى.
4. نقوم بتكرار التجربة n مرة.

ملاحظة



من خلال ما سبق يمكن القول بأن تجربة التوزيع الثنائي هي عبارة عن تجربة برنولي مكررة n مرة.

ب. قانون التوزيع الاحتمالي لذي الحدين

فرض أن X هو المتغير العشوائي X المعروف على هذه التجربة ويرمز إلى عدد مرات النجاح. تكتب دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) للمتغير العشوائي X كما يلي:

$$p(x=x_i) = \sum_{i=0}^n C_n^x p^x q^{n-x}, x=0,1,2,3,\dots,n$$

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!} \text{ حيث أن:}$$

ونقول حينئذ عن المتغير العشوائي X أنه يتبع توزيع ذي الحدين بالمعلمتين n و p .

ونكتب: $X \sim B(n, p)$

ت. دالة التوزيع التراكمية للتوزيع الثنائي

هي عبارة عن دالة تسمح لنا بحساب الاحتمالات التي تقل أو تساوي قيمة معينة k وتكتب على الشكل:

$$F(x) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k C_n^i p^i q^{n-i}, k=0,1,2,\dots,n$$

ملاحظة



في غالب الأحيان يتم الاعتماد على جداول إحصائية أعدت خصيصا لتسهيل عملية حساب الاحتمالات.

تمرين



[27 ص 1 حل رقم]

أي من الإجابات التالية لا تعد من شروط التوزيع الثنائي:

التجربة العشوائية تحتوي على نتيجتين إما نجاح أو فشل.

احتمال النجاح ثابت خلال التجربة.

القيام بالتجربة مرة واحدة.

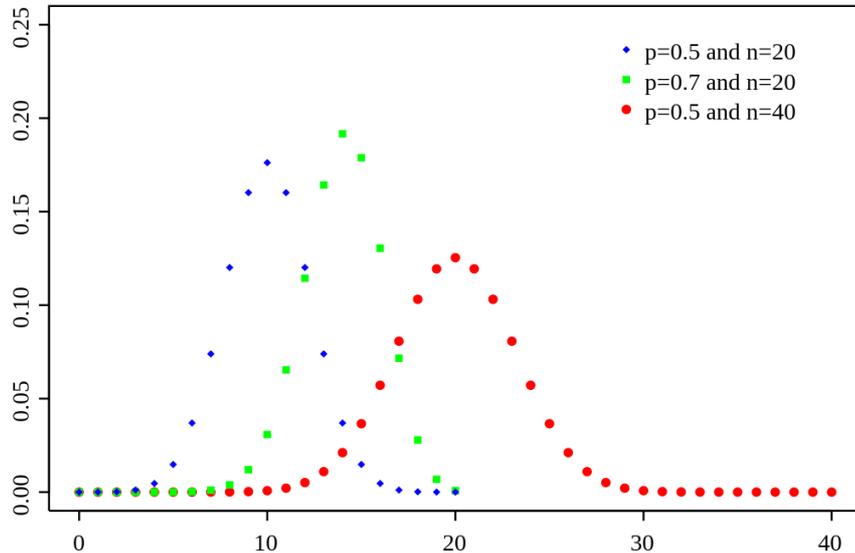
التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية لذي الحدين



آ. التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية

يتغير شكل دالة الكثافة الاحتمالية بتغير قيمه كل من p و n :

- 1- إذا كان n يساوي 20 و p يساوي 0.5 فان تمثّل البياني يأخذ الشكل الموضح باللون الأزرق.
- 2- إذا كان n يساوي 20 و p يساوي 0.7 فان تمثّل البياني يأخذ الشكل الموضح باللون الأخضر.
- 3- إذا كان n يساوي 40 و p يساوي 0.5 فان تمثّل البياني يأخذ الشكل الموضح باللون الأحمر.



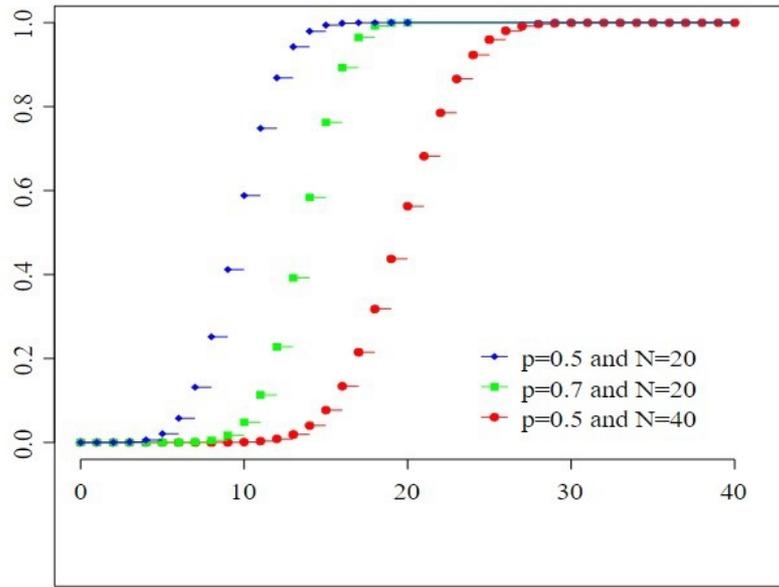
التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين

ب. التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمية

يتغير شكل دالة التوزيع التراكمية (cdf) بتغير قيمه كل من p و n :

1. إذا كان n يساوي 20 و p يساوي 0.5 فان تمثّل البياني يأخذ الشكل الموضح باللون الأزرق.
2. إذا كان n يساوي 20 و p يساوي 0.7 فان تمثّل البياني يأخذ الشكل الموضح باللون الأخضر.

3. وإذا كان n يساوي 40 و p يساوي 0.5 فان تمثل البياني يأخذ الشكل الموضح باللون الأحمر.



تمثيل بياني لدالة التوزيع التراكمية

الأمل الرياضي والتباين لتوزيع ذي الحدين

IV

الجدول التالي يوضح الأمل الرياضي والتباين لهذا التوزيع:

الأمل الرياضي	$E(x)=n \times p$
التباين	$V(x)=n \times p \times q$

الأمل الرياضي والتباين لتوزيع ذي الحدين

أ. الأمل الرياضي

إذا كان $X \sim B(n, p)$ ، أي أن X هو متغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين، و n هو العدد الإجمالي للتجارب و p احتمال أن تسفر كل تجربة عن نتيجة ناجحة، فإن القيمة المتوقعة لـ X هي: عبارة عن وهذه القيمة تم الحصول عليها من خاصية خطية القيمة المتوقعة، إضافة إلى حقيقة أن X هو مجموع متغيرات برنولي العشوائية المتطابقة، والتي لها نفس القيمة المتوقعة p .

$$\text{أي أن: } E(x) = E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_n)$$

$$\text{حيث أن: } E(x_i) = p; i \in \{1; 2, \dots; n\}$$

$$\text{ومنه: } E(x) = p + p + \dots + p = np$$

ب. التباين

ويمكن أيضا أن نحسب التباين من خلال الخاصية التي تقول بأن تباين مجموع المتغيرات العشوائية المستقلة هو مجموع التباينات.

$$\text{أي أن: } V(x) = v(x_1) + v(x_2) + \dots + v(x_n)$$

$$\text{وبما أن: } V(x_i) = pq$$

$$\text{فإن: } V(x) = pq + pq + \dots + pq = npq$$

تمرين V

[27 ص 2 حل رقم]

نرمي في الهواء قطعة نقدية غير متزنة 10 مرات، حيث أن احتمال ظهور الظهر هو 0,4 وليكن المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأوجه.
- أحسب الأمل الرياضي.

تمرين محلول

VI

نرمي حجر نرد منتظم في الهواء 5 مرات، ونعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل ظهور العدد 2.

• حدد طبيعة القانون الاحتمالي لـ X .

• احسب احتمال أن يظهر الوجه مرة على الأكثر.

• احسب الأمل الرياضي والتباين.

الحل النموذجي:

• تحديد طبيعة القانون الاحتمالي لـ X :

- تجربة إلقاء حجر النرد والاهتمام بظهور العدد 2 تحتوي على نتيجتين: إما أن يظهر العدد 2 باحتمال $p=1/6$ أو لا يظهر باحتمال $q=5/6$.

- احتمال النجاح $p=1/6$ ثابت خلال التجربة.

- النتائج مستقلة من تجربة إلى أخرى.

- رمي حجر النرد 5 مرات أي $n=5$.

وبالتالي المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الثنائي بالعلمتين $n=5$ و

$p=1/6$ ونكتب:

$X \sim B(5, 1/6)$

• حساب احتمال ظهور العدد 2 مرتين على الأكثر:

إما أن يظهر مرتين، أو مرة واحدة، أو لا يظهر. وبالتالي قيم x هي: 0 و 1 و 2.

$$P(X \leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$$

$$P(X \leq 2) = 0,9645$$

• حساب الأمل الرياضي والتباين:

$$E(x) = n \times p = 5 \times 1/6$$

$$E(x) = 5/6$$

$$V(x) = n \times p \times q = 5 \times (1/6) \times (5/6)$$

$$V(x) = 25/36$$

تمارين: تمارين تقييمية خاصة بالتوزيع الثنائي

VII

[27 ص 3 حل رقم]

تمرين

أي من التجارب العشوائية التالية تتبع التوزيع الثنائي:

رمي زهرة نرد ثلاث مرات والاهتمام بظهور الرقم .

رمي زهرة نرد 5 مرات

سحب 3 كرات بدون ارجاع من صندوق يحتوي على 6 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء.

تمرين

نرمي زهرة نرد 10 مرات ونعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل ظهور الرقم 3. احسب الانحراف المعياري.

تمرين

صندوق يحتوي على 6 كرات بيضاء و 4 كرات خضراء، نسحب عشوائيا 5 كرات مع الارجاع. وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكرات البيضاء المسحوبة في العينة. احسب التباين.

سلسلة الأعمال الموجهة الخاصة بتوزيع ذي الحدين

VIII

تمارين خاصة بتوزيع ذي الحدين (التوزيع الثنائي)

pdf.pdf

وثيقة 1 تمارين خاصة بتوزيع ذي الحدين

اختبار الخروج

IX

يقيس هذا الاختبار مدى استيعاب الطالب لتجربة برنولي والتوزيع الثنائي.
1 مورد. pdf
وثيقة 2 امتحان جزئي في مقياس الإحصاء 3

حل التمارين

< 1 (ص 11)

التجربة العشوائية تحتوي على نتيجتين إما نجاح أو فشل.

احتمال النجاح ثابت خلال التجربة.

القيام بالتجربة مرة واحدة.

< 2 (ص 17)

6

< 3 (ص 21)

تمرين

رمي زهرة نرد ثلاث مرات والاهتمام بظهور الرقم .

رمي زهرة نرد 5 مرات

سحب 3 كرات بدون ارجاع من صندوق يحتوي على 6 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء.

تمرين

1,18

تمرين

1,2

قاموس

التوزيعات الاحتمالية المنقطعة

نقول عن توزيع احتمالي أنه منفصل إذا كانت دالة التوزيع التراكمي له مؤلف من تسلسل قفزات متناهية، مما يعني أنه يتوافق مع متغير عشوائي منقطع، وهو بالتعريف متغير يمكنه أن يأخذ فقط قيما من مجموعة محددة منتهية وقابلة للعد. (على سبيل المثال، رمي عملة معدنية، أو رمي حجر نرد)

متغير عشوائي

في الرياضيات، وبالتحديد في الاحتمالات والإحصاء، هو متغير ذو قيمة متغيرة طبقاً للصدفة (أي أنه يحقق مفهوم العشوائية)، فلا يكون ثابتاً على قيمة معينة محددة. يساوي متغير عشوائي قيمة من القيم الممكنة المختلفة، لكل واحدة منهن احتمال ما.

معنى المختصرات

Cumulative distribution function
probability density function
probability mass function

CDF -
PDF -
PMF -

قائمة المراجع

- [4] بوعافية سمير، مدخل إلى الإحصاء 2، دار الباحث للنشر والإشهار، الجزائر، 2023، ط1.
- [5]- ملخصات شوم نظريات ومسائل في الإحصاء، موراى ر- شبيجل، ترجمة شعبان عبد الحميد شعبان، مراجعة أحمد حسن الموازيني، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر ، 2004، ط7.

مراجع الأنترنت

https://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%AA%D9%88%D8%B2%D9%8A%D8%B9_%D8%AB%D9%86%D8%A7%D8%A6%D9%8A_%D8%A7%D9%84%D8%AD%D8%AF%D9%8A%D9%86 [1]

<https://dspace.univ-guelma.dz/jspui/bitstream/123456789/3643/1/%D9%85%D8%B7%D8%A8%D9%88%D8%B9%D8%A9%20%D8%A7%D8%AD%D8%AA%D9%85%D8%A7%D9%84%D8%A7%D8%AA%20%D8%A7%D9%84%D8%B9%D8%A7%D8%A8%D8%AF%20%D9%85%D8%AD%D9%85%D8%AF.pdf> [2]

<https://drive.google.com/uc?id=1tH5PDQDDKyXP2V9DHKlkBsjfU9AMtZ9J&export=download> [3]