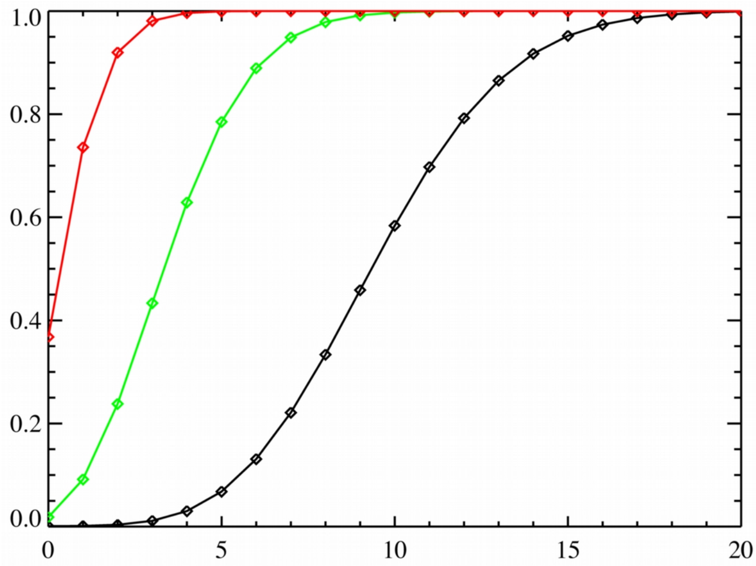
التوزيع البواسوني

التوزيع البواسوني



2024

الأستاذ: سعيود وليد

قائمة المحتويات

وحدة

عند دراسة هذه المحاضرة يصبح الطالب قادرا على أن:

- يتعرف على شروط تطبيق قانون التوزيع الاحتمالي لـ بواسون.
- يطبق خواص التوزيع الاحتمالي، كالتوقع الرياضي والتباين.
- يحسب احتمالات القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون.
- يصنف المشكلات الاقتصادية والاجتماعية والإدارية التي تتبع توزيع بواسون.

ماهية التوزيع البواسوني

لقد تمكن عالم الرياضيات الفرنسي Siméon-Denis Poisson أن يشتق قانونا خاصا بالاحتمالات الصغيرة إنطلاقا من قانون التوزيع الثنائي وذلك سنة 1837 و دعمت نتائجه من قبل V.Bortklevlcz سنة 1898، وهذا الأخير هو الذي أطلق على هذا التوزيع اسم قانون الاحتمالات الصغيرة.

وتم التوصل إلى هذا القانون عندما لوحظ أن تطبيق التوزيع الثنائي يصبح أمرا صعبا كلما زاد n (حجم العينة، عدد التجارب، عدد الملاحظات...) وصغر احتمال النجاح p بسبب صعوبة حساب !n.

آ. تطبيقات التوزيع البواسوني

يعتبر توزيع بواسون من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة ذات الأهمية البالغة والتي تعبر عن عدد الأحداث النادرة الوقوع في فترة زمنية محددة (سنة، شهر، أسبوع، يوم....) أو منطقة محددة (متر مربع من المساحة، متر مكعب من الحجم، صفحة كتاب...) وكأمثلة على ذلك نذكر مايلي:

- عدد حوادث السير في إحدى الطرقات خلال شهر.
- عدد المكالمات الهاتفية التي تصل إلى تحويلة إدارة معينة خلال مدة زمنية (دقيقة، ربع ساعة....)
- عدد الزبائن الذين يصلون إلى محطة بنزين في ساعة ما.
- عدد الطائرات التي تهبط في مطار معين خلال يوم.
- عدد الزبائن الذين يدخلون إلى محل تجاري معين خلال ساعة.
- عدد سفن الشحن التي تدخل إلى ميناء معين خلال أسبوع.

وتوضح الأمثلة السابقة مدى تنوع واتساع تطبيقات التوزيع البواسوني

ب. شروط تطبيق قانون التوزيع البواسوني

إن شروط تطبيق قانون التوزيع البواسوني هي نفسها شروط تطبيق قانون التوزيع الثنائي ويمكن إيجازها فيما يلي:

- كل محاولة تؤول إلى نتيجة واحدة من بين نتيجتين متنافيتين.

- على افتراض وجود عدة فترات زمنية منفصلة عن بعضها البعض، فإن وقوع النجاحات في أي فترة مستقلة عن وقوعها في فترة أخرى.
- عدد النجاحات يبقى ثابتا في وحدة الزمن.
- معدل عدد النجاحات λ التي تحدث خلال فترة زمنية معلوم.

ب. قانون التوزيع البواسوني وخواصه

يشتق التوزيع البواسوني من التوزيع الثنائي عندما يكون عدد المحاولات n كبيرا بدرجة كافية، بينما يكون احتمال النجاح صغيرا بدرجة كافية، حيث يبقى المقدار n.p ثابتا.

1. قانون التوزيع البواسوني

ليكن x متغير عشوائي يتبع التوزيع الثنائي ($X \sim B(n,p)$ حيث أن الجداء n.p يساوي العدد الثابت λ ومنه:

$$\lambda = n \cdot p \Leftrightarrow p = \frac{\lambda}{n}$$

احتمال وقوع الحدث الملائم x مرة في n محاولة حسب قانون التوزيع الثنائي يكتب كما يلي:

$$p(x = x_i) = C_n^x p^x \times q^{n-x}, x = 0,1,2,3.....n$$

و بما أن: q=1-p فإن: $q = 1 - \frac{\lambda}{n}$

بالتعويض نجد: $p(X = x) = c_x^n \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$

أي أن: $p(X = x) = \frac{n(n-1) \cdot (n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$

وبالتالي: $p(X = x) = \frac{n(n-1) \cdot (n-x+1)}{n^x} \left(\frac{\lambda^x}{x!}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$

عندما تقترب n من +∞ فإن:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-x+1)}{n^x}\right) = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \left(e^{-\lambda}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\lambda^x}{x!}\right) = \left(\frac{\lambda^x}{x!}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^x = 1$$

وبالتالي :

$$p(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

حيث: λ>0 ; x=0.1.2.....

ومن المتوقع أن تعطي هذه العبارة نفس الاحتمالات التي تعطيها عبارة التوزيع الثنائي (قيم قريبة جدا شريطة أن تكون n كبيرة و p صغيرة وتدعى هذه العبارة بقانون التوزيع البواسوني حيث أن:

λ: متوسط عدد النجاحات في وحدة القياس (زمن، مساحة، حجم...).

x: عدد مرات تحقق الحدث المدروس.
e: أساس اللوغاريتم الطبيعي: 2,7281828

ملاحظة
نلاحظ أن التوزيع البواسوني معرف بمعلمة وحيدة λ وبالتالي يكفينا معرفة قيمة λ لتطبيق القانون ونكتب:
$X \sim poi(\lambda)$

2. خواص التوزيع البواسوني

يمكن التأكد من أن قانون توزيع بواسون يحقق الخاصيتين الملازمتين لقوانين التوزيعات الاحتمالية.
1. يجب أن يكون الاحتمال موجب أي: $p(X=x)\geq 0$: بما أن x يأخذ قيما موجبة و $\lambda>0$ فإن:
$\frac{\lambda^x}{x!}>0$ و $e^{-\lambda}>0$ وبالتالي: $p(X=x)>0$
2. مجموع الاحتمالات يساوي الواحد أي أن: $\sum_{i=0}^{\infty} p(X=x_i)=1$

لدينا: $\sum_{i=0}^{\infty} p(X=x_i)=\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$

ومنه: $\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^x}{x!}\right)\right)$

ولدينا: $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^x}{x!}\right)=e^{\lambda}$

وبالتالي: $\sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$

ملاحظة
هناك جداول خاصة بتوزيع بواسون، يتم من خلالها اختصار العمليات الحسابية ولاستخراج قيمة الاحتمال من الجدول نبحث عن قيمة λ في السطر و عن قيمة x في العمود فنجد قيمة الاحتمال بتقاطع السطر مع العمود.

x	α 0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
0	0.6065	0.3679	0.2231	0.1353	0.0821	0.0498	0.0302	0.0183	0.0111	0.0067
1	0.9098	0.7358	0.5578	0.4060	0.2873	0.1991	0.1359	0.0916	0.0611	0.0404
2	0.9856	0.9197	0.8088	0.6767	0.5438	0.4232	0.3208	0.2381	0.1736	0.1247
3	0.9982	0.9810	0.9344	0.8571	0.7576	0.6472	0.5366	0.4335	0.3423	0.2650
4	0.9998	0.9963	0.9814	0.9473	0.8912	0.8153	0.7254	0.6288	0.5321	0.4405
5	1.0000	0.9994	0.9955	0.9834	0.9580	0.9161	0.8576	0.7851	0.7029	0.6160
6	1.0000	0.9999	0.9991	0.9955	0.9858	0.9665	0.9347	0.8893	0.8311	0.7622
7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9958	0.9881	0.9733	0.9489	0.9134	0.8666
8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9962	0.9901	0.9786	0.9597	0.9319
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9989	0.9967	0.9919	0.9829	0.9682
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9972	0.9933	0.9863
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9976	0.9945
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

x	α 5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10
0	0.0041	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0266	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005
2	0.0884	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028
3	0.2017	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103
4	0.3575	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293
5	0.5289	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671
6	0.6860	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301
7	0.8095	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202
8	0.8944	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328
9	0.9462	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579
10	0.9747	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830
11	0.9890	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968
12	0.9955	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916
13	0.9983	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645
14	0.9994	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165
15	0.9998	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513
16	0.9999	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730
17	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857
18	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

جدول توزيع بواسون حسب قيم x و λ

ت. أمثلة محلولة

1.مثال 01:

إذا علمت أن متوسط عدد السفن التي تصل إلى أحد الموانئ هو سفينتين في اليوم، فأوجد احتمال أن يصل إلى هذا الميناء 5 سفن في اليوم.

الإجابة النموذجية:

ليكن x متغير عشوائي يمثل عدد السفن التي تصل إلى الميناء خلال اليوم.

المتغير العشوائي x يتبع توزيع بواسون حيث: $\lambda=2$

وبالتالي: $X \sim poi(\lambda=2)$ ويكتب قانون توزيع الاحتمالي على الشكل: $p(X=x)=\frac{2^{x}\cdot e^{-2}}{x!}$

حيث: ......$x=0,1,2$

ومنه: $p(X=5)=\frac{2^{5}\cdot e^{-2}}{5!}=0.0361$

2.مثال 02:

متوسط عدد الأشخاص الذين يدخلون إلى أحد المحلات التجارية هو 4 أشخاص خلال 10 دقائق.

أوجد احتمال أن يدخل إلى هذا المحل شخص واحد على الأكثر خلال 10 دقائق.

الإجابة النموذجية:

ليكن x متغير عشوائي يمثل عدد الأشخاص الذين يدخلون إلى المحل التجاري خلال 10 دقائق.

المتغير العشوائي x يتبع توزيع بواسون حيث: $\lambda=4$ ونكتب: $X \sim poi(4)$

قانون توزيع الاحتمالي لـ x يكتب على الشكل: $p(X=x)=\frac{4^{x}\cdot e^{-4}}{x!}$

حيث: ......$x=0,1,2$

احتمال أن يدخل شخص واحد على الأكثر : إما أن يدخل شخص واحد أو لا يدخل أي شخص.

وبالتالي: $p(X\leq 1)=p(x=0)+p(x=1)=0.0183+0.0733=0.0916$

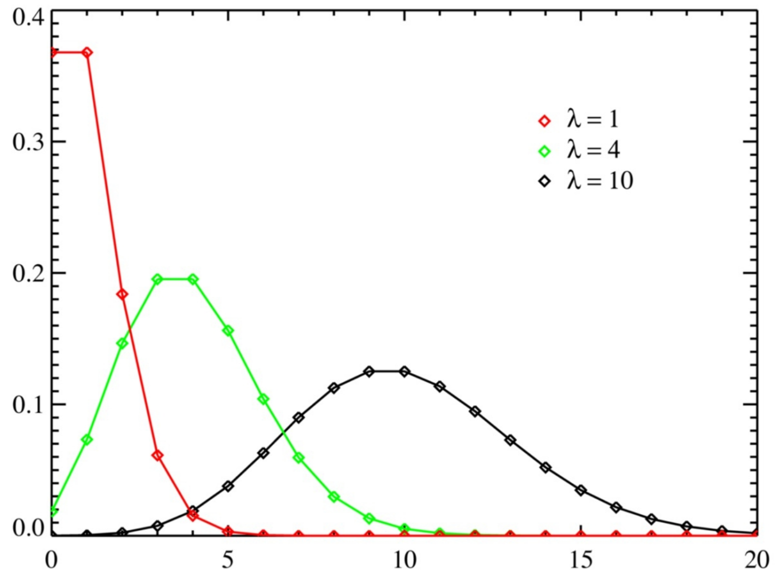
ث. التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية لتوزيع بواسون

يعتمد توزيع بواسون على معلمة وحيدة λ حيث أنه كلما تغيرت قيمة هذه الأخيرة يتغير شكل التمثيل البياني لكل من دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية.

1. التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية

- إذا كانت 1 = λ فإن التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية يأخذ الشكل باللون الأحمر.
- إذا كانت 4 = λ فإن التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية يأخذ الشكل باللون الأخضر.
- إذا كانت 10 = λ فإن التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية يأخذ الشكل باللون الأسود.

والشكل الموالي يوضح ذلك:



دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بواسون

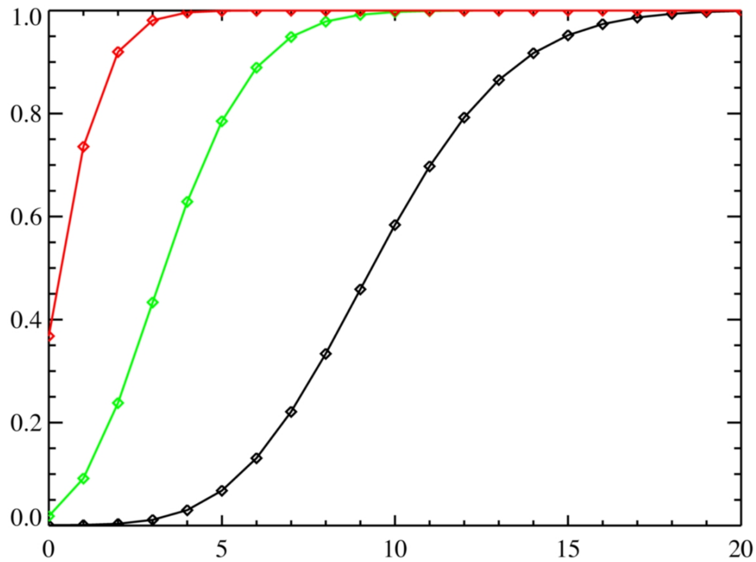
ملاحظة

من خلال التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية نلاحظ أنه كلما زادت قيمة λ حيث: $\lambda \geq 10$ كلما اقترب توزيع بواسون من التوزيع الطبيعي.

2. التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمية لتوزيع بواسون

- إذا كانت 1 = λ فإن التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمية يأخذ الشكل باللون الأحمر.
- إذا كانت 4 = λ فإن التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمية يأخذ الشكل باللون الأخضر.
- إذا كانت 10 = λ فإن التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمية يأخذ الشكل باللون الأسود.

والشكل الموالي يوضح ذلك:



دالة التوزيع التراكمية لتوزيع بواسون

ج. التوقع الرياضي والتباين لتوزيع بواسون

1.التوقع الرياضي:

إن التوقع الرياضي لتوزيع بواسون هو معلمة هذا التوزيع والتي تساوي λ

البرهان:

لدينا: $E(X)=\sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot p_i$

ومنه: $E(X)=\sum_{i=0}^{\infty} x\left(\frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x \cdot (x-1)!}\right)$

و بعد الاختزال نجد: $E(X)=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^x}{(x-1)!}\right)$

ويمكننا أن نكتب العبارة السابقة على الشكل: $E(X)=\lambda \times e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}\right)$

وبوضع: y=x-1 تصبح العبارة كما يلي: $E(X)=\lambda \times e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^y}{(y)!}\right)$

ونعلم أن: $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^y}{(y)!}\right)=e^{\lambda}$

وبالتالي: $E(X)=\lambda \times e^{-\lambda} \times e^{\lambda}=\lambda$

2.التباين:

لدينا: $v(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$

ولدينا: $E(x^2)=\sum_{i=0}^{1} x_i^2 \cdot p_i$

يكننا أن نكتب: $x^2=x\times(x-1)+x$

بالتعويض نجد: $E(X^2)=\sum_{i=0}^{\infty} x\times(x-1)\left(\frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x\times(x-1)\times(x-2)!}\right)+\sum_{i=0}^{\infty} x\times\left(\frac{\lambda^x \times e^{-\lambda}}{x\times(x-1)!}\right)$

بعد الاختزال نجد: $E(X^2)=e^{-\lambda}\sum_{i=0}\left(\frac{\lambda^x}{(x-2)!}\right)+e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^x}{(x-1)!}\right)$

ومنه: $E(X^2)=e^{-\lambda}\times\lambda^2\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}\right)+e^{-\lambda}\times\lambda\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}\right)$

ولدينا: $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}\right)=e^{\lambda}$ و $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}\right)=e^{\lambda}$

وبالتالي: $E(x^2)=\lambda^2\times e^{-\lambda}\times e^{\lambda}+\lambda\times e^{-\lambda}\times e^{\lambda}$

أي أن: $E(x^2)=\lambda^2+\lambda$

وعليه يكون: $V(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$

II

سلسلة الأعمال الموجهة الخاصة بتوزيع بواسون

سلسلة الأعمال الموجهة الخاصة بتوزيع بواسون

مورد1.*pdf*

وثيقة1 سلسلة الأعمال الموجهة الخاصة بتوزيع بواسون

قائمة المراجع

[4] ملخصات شوم نظريات ومسائل في الإحصاء، موراي ر- شبيجل، ترجمة شعبان عبد الحميد شعبان، مراجعة أحمد حسن الموازيني، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر ، 2004، ط 7.

[5] بوعافية سمير، مدخل إلى الإحصاء 2، دار الباحث للنشر والإشهار، الجزائر، 2023، ط 1.

مراجع الأنترنيت

[1] https://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%AA%D9%88%D8%B2%D9%8A%D8%B9_%D8%A8%D9%88%D8%A7%D8%B3%D9%88%D9%86

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution

[3] https://drive.google.com/uc?id=1tH5PDQDDKyXP2V9DHKlkBsjfU9AMtZ9J&export=download

اعتماد الموارد

سلسلة الأعمال الموجهة الخاصة بتوزيع بواسون15 صفحة