

## TP 02

### Identification d'un système bruité avec la méthode de MC simple

#### Notes importantes :

- `idpoly` : permet de créer un objet définissant la structure du modèle de type `idpoly` . Les polynômes sont entrés en fonction de A et B (en puissance croissante de  $z^{-1}$ )
- Le programme doit être réalisé dans un **fichier script**
- Ne pas oublier tout à fait au début les instructions suivantes : `clc ; clear all ; close all !!!!`)
- Utiliser le `help` pour chaque nouvelle fonction de MATLAB que vous allez découvrir !!!.

A la suite d'essais, on choisit pour décrire le comportement d'un système dynamique discret le modèle suivant

$$y(k) + 0.2y(k-1) + 0.5y(k-2) = 0.2u(k-1) + e(k) \quad (1)$$

- 1) Quel est le type de structure du système (1) ? Donner son schéma bloc
- 2) Reformuler le modèle (1) sous la forme suivante :

$$A(z^{-1})Y(z) = B(z^{-1})U(z) + E(z^{-1}) \quad (\text{calculer } A(z^{-1}) \text{ et } B(z^{-1}))$$

- 3) Afin d'identifier le système (1), créer un objet définissant la structure de ce modèle en utilisant l'instruction **`idpoly`**
- 4) Générer un signal d'entrée aléatoire  $u(k)$  de niveaux  $\pm 1$  et de taille  $N=200$  échantillons (utiliser les fonctions **`sign`** et **`randn`** (en même temps)  $u$  (**`sign(randn(!!!))`**)
- 5) Générer un signal (de bruit) aléatoire de taille 200 en utilisant la fonction **`randn`** de MATLAB
- 6) Simuler la sortie bruitée en utilisant la fonction **`sim`** (**sortie, [entrée 1 entrée 2]**)
- 7) Dessiner sur la même figure (diviser la figure en trois parties, **utiliser la fonction `subplot`**), la sortie  $y(k)$ , l'entrée  $u(k)$  et le signal de bruit  $e(k)$  pour  $N=1:200$ .

#### Estimation des paramètres par MC

Pour  $Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N-2) \end{bmatrix}$  (en commençant par  $k=3$ )

- 8) Représenter  $y(k)$  sous forme des moindres-carrés  $y(k) = \varphi^T \theta$  (construire la matrice de régression  $\varphi$  pour  $N=3$  à  $\text{size}(y,1)$ )
- 9) Calculer  $\hat{\theta} = (\varphi^T \varphi)^{-1} \varphi^T Y$

- 10) tracer le système  $y(k)$  et le modèle estimé  $\hat{y}(k) = \varphi^T \hat{\theta}$  dans même fenêtre MATLAB
- 11) tracer l'erreur  $e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$
- 12) Calculer le prédicteur
- 13) Dédire alors l'erreur de prédiction
- 14) Commenter les résultats

Responsable du module  
*Bourahala Fayçal*

## TP 01

### Identification par la méthode des MC simples et récursives

#### 1- Principe de la méthode de MCS :

Soit  $x(t)$  le modèle linéaire par rapport à ses paramètres :  $x(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_k f_k(t)$

Soit  $X_n$  l'ensemble des valeurs prises par le modèle et  $Y$  les mesures :

$$X_n = \begin{bmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \dots \\ x(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 f_1(t_1) + a_2 f_2(t_1) + \dots + a_k f_k(t_1) \\ y_m(t_2) = a_1 f_1(t_2) + a_2 f_2(t_2) + \dots + a_k f_k(t_2) \\ \dots \\ y_m(t_n) = a_1 f_1(t_n) + a_2 f_2(t_n) + \dots + a_k f_k(t_n) \end{bmatrix}, Y_n = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \dots \\ y(t_n) \end{bmatrix} \Rightarrow X_n = H_n \theta$$

avec

$$H_n = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_k(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \dots & f_k(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \dots & f_k(t_n) \end{bmatrix} \text{ et } \theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_k \end{bmatrix}$$

- L'erreur quadratique cumulée s'écrit comme suit:  $E_Q = (Y_n - H_n \theta)^T (Y_n - H_n \theta)$
- La solution optimale est donnée par :  $\hat{\theta} = (H_n^T H_n)^{-1} H_n^T Y_n$
- L'erreur d'observation :  $Y_{obs} = Y_n - H_n \hat{\theta}$

#### 2- Principe de la méthode de MC- récursive :

Ajout de la (n+1)ème mesure :

On dispose de **n+1** observations auxquelles correspondent **n+1** valeurs du modèle :

$$Y_{n+1} = \begin{bmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \dots \\ y(t_n) \\ y(t_{n+1}) \end{bmatrix} \quad X_{n+1} = H_{n+1} \theta = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_k(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \dots & f_k(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \dots & f_k(t_n) \\ f_1(t_{n+1}) & f_2(t_{n+1}) & \dots & f_k(t_{n+1}) \end{bmatrix} \theta$$

On pose  $h_{n+1}^T = [f_1(t_{n+1}) \quad f_2(t_{n+1}) \quad \dots \quad f_k(t_{n+1})]$

On pose  $h_{n+1}^T = [f_1(t_{n+1}) \quad f_2(t_{n+1}) \quad \dots \quad f_k(t_{n+1})]$

On dispose de **n+1** observations auxquelles correspondent **n+1** valeurs du modèle

$$Y_{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_n \\ y(t_{n+1}) \end{bmatrix}}_{Y_{n+1}}, X_{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_n \\ x(t_{n+1}) \end{bmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_n \\ h_{n+1}^T(t_{n+1}) \end{bmatrix}}_{H_{n+1}} \theta,$$

Posons 
$$\hat{\theta}_{n+1} = (H_{n+1}^T H_{n+1})^{-1} H_{n+1}^T Y_{n+1}$$

➤ Expression réursive de base (les étapes à suivre):

$$\hat{\theta}_{n+1} = (H_{n+1}^T H_{n+1})^{-1} H_{n+1}^T Y_{n+1}$$

$$\hat{\theta}_{n+1} = (H_n^T H_n + h_{n+1}^T h_{n+1})^{-1} (H_n^T Y_n + h_{n+1}^T y_{n+1}) = R_{n+1}^{-1} Q_{n+1}$$

➤ Calcul récursif évolué :

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= P_n h_{n+1} (1 + h_{n+1}^T P_n h_{n+1})^{-1} \\ \hat{\theta}_{n+1} &= \hat{\theta}_n + K_{n+1} (y_{n+1} - h_{n+1}^T \hat{\theta}_n) \\ P_{n+1} &= (I - K_{n+1} h_{n+1}^T) P_n \end{aligned}$$

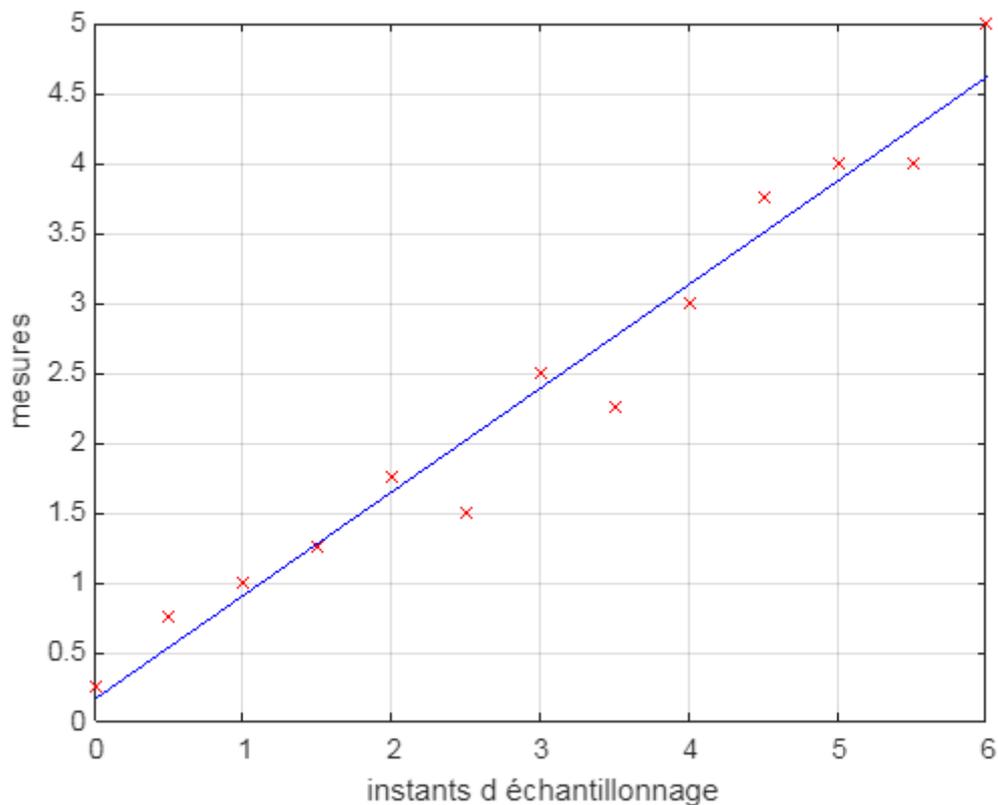
Avec 
$$P_n = (H_n^T H_n)^{-1}$$

## **Travail demandé :**

### **Partie I : Identification par la méthode des MC simples**

L'objectif est d'identifier un système par un modèle de la  $x(t) = a + bt$  forme en utilisant les MCS

Soit les mesures présentées sur la figure suivante



- 1) Déterminer les valeurs prises par le modèle pour  $t = 0:0.5:10$
- 2) En déduire les matrices/vecteurs  $Y$ ,  $H$  et  $\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
- 3) Calculer la solution optimale  $\hat{\theta} = (H_n^T H_n)^{-1} H_n^T Y_n$
- 4) Tracer les mesures et le modèle estimé en fonction de temps (dans la même fenêtre MATLAB)
- 5) Calculer l'erreur quadratique d'observation :  $E_Q = (Y_n - H_n \hat{\theta})^T (Y_n - H_n \hat{\theta})$
- 6) Calculer l'erreur d'estimation :  $E_{est} = \hat{\theta} - \theta$
- 7) Interpréter et conclure.

### Partie II : Identification par la méthode des MC récursives

On ajoute maintenant une nouvelle mesure, soit  $y_{n+1} = 4.75$

- 1) Calculer le vecteur  $Y_{n+1}$  en fonction de  $Y$
- 2) Calculer le vecteur  $h_{n+1}$  puis déduire  $H_{n+1}$
- 3) Déduire alors le vecteur  $P_n$
- 4) Calculer  $K_{n+1} = P_n h_{n+1} (1 + h_{n+1}^T P_n h_{n+1})^{-1}$
- 5) Déduire alors le nouveau vecteur estimé  $\hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_n + K_{n+1} (y_{n+1} - h_{n+1}^T \hat{\theta}_n)$
- 6) Tracer les mesures  $Y_{n+1}$  et le modèle estimé en fonction de temps  $T_{n+1} = 0:0.5:7$  (dans la fenêtre MATLAB)
- 7) Calculer l'erreur quadratique d'observation :  $E_Q = (Y_{n+1} - H_{n+1} \hat{\theta}_{n+1})^T (Y_{n+1} - H_{n+1} \hat{\theta}_{n+1})$
- 8) Conclure les résultats