

TP Analyse Numérique 02



Dr. Nour El-houda
BOUCHERCHEM

Université de 20 Août 1955.
SKIKDA.

Faculté des Sciences.

Département de
mathématique.

Email : n.boucherchem@univ-skikda.dz

1.0
Mai 2025

Table des matières

I - Chapitre 02 : Résolution numérique des EDO d'ordre un	3
1. La méthode d'Eluer	3
2. La méthode de Taylor d'ordre 02	4
3. La méthode de Range-Kutta d'ordre 02	4
4. La méthode de Range-Kutta d'ordre 4	5
5. Exercice :	6

I Chapitre 02 : Résolution numérique des EDO d'ordre un

Soit le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' &= f(x, y), x \in [a, b] \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

La résolution de ce problème consiste à déterminer l'application y , si elle existe qui vérifie l'équation ainsi définie et qui prend la valeur y_0 pour $x = x_0$.

1. La méthode d'Eluer

Définition

Pour trouver la valeur approximative de y en fonction de x , considérons une partition $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$ tel que : $x_i = x_0 + ih$, en utilisant la formule de Taylor, on obtient ainsi le schéma numérique d'Euler :

$$\begin{cases} y_0 & \text{valeur initiale,} \\ h &= \frac{(b-a)}{n}, \\ y_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k), \text{ avec } k = 0, 1, \dots, (n-1). \end{cases}$$

Code Matlab :

```
1 function [x,y]=euler(a,b,f,n,y0)
2 h=(b-a)/n;
3 x=[a:h:b]';
4 y=zeros(n+1,1);
5 y(1)=y0;
6 for i=1:n
7 fi=f(x(i),y(i));
8 y(i+1)=y(i)+h*fi;
9 end
```

2. La méthode de Taylor d'ordre 02

Définition

Considérons une partition $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$ tel que : $x_i = x_0 + ih$, en utilisant la formule de Taylor d'ordre 02, on obtient

$$y_{k+1} = y_k + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + O(h^3), \quad (1)$$

comme $y'=f(x,y)$, on obtient

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2}f'(x_k, y_k), \quad (1)$$

mais

$$f'(x, y) = \frac{d}{dx}f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}f(x, y) \quad (1)$$

on obtient ainsi le schéma numérique de Taylor d'ordre 02

$$\begin{cases} y_0 & \text{valeur initiale,} \\ y_{k+1} & = y_k + hf(x_k, y_k) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y} f(x_k, y_k) \right], \text{ avec } k = 0, 1, \dots, (n-1). \end{cases}$$

Code Matlab :

```
1 function [y,x]=taylor2(a,b,f,n,y0)
2 syms s t
3 ds=diff(f,s);
4 dt=diff(f,t);
5 h=(b-a)/n;
6 x=(a:h:b)';
7 y=zeros(n+1,1);
8 y(1)=y0;
9 for i=1:n
10 fi=subs(f,{s,t},{x(i),y(i)});
11 dv2=subs(ds,{s,t},{x(i),y(i)})+subs(dt,{s,t},{x(i),y(i)})*subs(f,{s,t},{x(i),y(i)});
12 y(i+1)=y(i)+h*fi+(h^2/2)*dv2;
13 end
14 end
```

3. La méthode de Range-Kutta d'ordre 02

Définition

Soit la partition $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de l'intervalle $[a, b]$ tel que : $x_i = x_0 + ih$, en utilisant la formule de Taylor d'ordre 2, on obtient ainsi le schéma numérique de Range-Kutta:

$$\begin{cases} y_0 & \text{donné,} \\ k_1 & = hf(x_k, y_k), \\ k_2 & = hf(x_k + \frac{3}{2}h, y_k + \frac{3}{2}k_1), \\ y_{k+1} & = y_k + \frac{2}{3}k_1 + \frac{1}{3}k_2, \text{ avec } k = 0, 1, \dots, (n-1). \end{cases}$$

Code Matlab :

```
function [y,x]=range02(a,b,f,n,y0)

h=(b-a)/n;

x=(a:h:b)';

y=zeros(n+1,1);

y(1)=y0;

for i=1:n

k1=h*f(x(i),y(i));

k2=h*f((x(i)+(3/2)*h),y(i)+(3/2)*k1);

y(i+1)=y(i)+(2/3)*k1+(1/3)*k2;

end

end
```

4. La méthode de Range-Kutta d'ordre 4**⚙ Méthode**

$$\begin{cases} y_0 & \text{donné,} \\ k_1 & = hf(x_k, y(t_k)), \\ k_2 & = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_1), \\ k_3 & = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_2), \\ k_4 & = hf(x_k + h, y_k + k_3), \\ y_{k+1} & = y_k + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4, \text{ avec } k = 0, 1, \dots, (n-1). \end{cases}$$

Code Matlab :

```
1 function [y,x]=range04(a,b,f,n,y0)
2 h=(b-a)/n;
3 x=(a:h:b)';
4 y=zeros(n+1,1);
5 y(1)=y0;
6 for i=1:n
7 k1=h*f(x(i),y(i));
8 k2=h*f(x(i)+(1/2)*h,y(i)+(1/2)*k1);
9 k3=h*f(x(i)+(1/2)*h,y(i)+(1/2)*k2);
10 k4=h*f(x(i)+h,y(i)+k3);
```

```

11 y(i+1)=y(i)+(1/6)*k1+(1/3)*k2+(1/3)*k3+(1/6)*k4;
12 end
13 end

```

5. Exercice :

Résoudre le problème de Cauchy suivant par les quatre méthodes (Euler, Taylor d'ordre 02, Range-Kutta d'ordre 2 et 4) pour $h = 0.2$:

$$\begin{cases} y' &= x + y, x \in [0, 1], \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Solution :

1- La méthode d'Euler :

```

1 >> a=0;b=1;n=5;y0=1;
2 >> f=@ (x,y) y+x
3 f =
4 function_handle with value:
5 @(x,y)y+x
6 >> [y,x]=euler(a,b,f,n,y0)
7 y =
8 1.0000
9 1.2000
10 1.4800
11 1.8560
12 2.3472
13 2.9766
14 x =
15 0
16 0.2000
17 0.4000
18 0.6000
19 0.8000
20 1.0000
21

```

2- La méthode de Taylor d'ordre 2 :

```

1 >> syms s t
2 >> f=s+t
3
4 f =
5
6 s + t
7
8 >> a=0;b=1;n=5;y0=1;
9 >> [y,x]=taylor2(a,b,f,n,y0)
10
11 y =
12
13 1.0000
14 1.2400
15 1.5768
16 2.0317
17 2.6307
18 3.4054
19

```

```

20
21 x =
22
23      0
24      0.2000
25      0.4000
26      0.6000
27      0.8000
28      1.0000
29

```

3- La méthode de Range-Kutta d'ordre 2 :

```

1 >> a=0;b=1;n=5;y0=1;
2 >> f=@ (x,y) y+x;
3 >> [y,x]=range02(a,b,f,n,y0)
4
5 y =
6
7      1.0000
8      1.2400
9      1.5768
10     2.0317
11     2.6307
12     3.4054
13
14
15 x =
16
17      0
18      0.2000
19      0.4000
20      0.6000
21      0.8000
22      1.0000

```

4- La méthode de Range-Kutta d'ordre 4 :

```

1 >> a=0;b=1;n=5;y0=1;
2 >> f=@ (x,y) y+x;
3 >> [y,x]=range04(a,b,f,n,y0)
4
5 y =
6
7      1.0000
8      1.2428
9      1.5836
10     2.0442
11     2.6510
12     3.4365
13
14
15 x =
16
17      0
18      0.2000
19      0.4000
20      0.6000
21      0.8000
22      1.0000
23

```