Raisonnement et incertitude

II – Ensembles flous et logique floue

Partie A

Ensembles flous

A – Ensembles flous

1) Introduction

Certains concepts ne sont pas toujours associés à des valeurs exactes

- Qu'est-ce que pour vous un homme grand ?
- Un homme petit ?

Des origines…

- 1965 : Théorie des ensembles flous introduite par L.A. Zadeh
- 1973 : Zadeh mentionne le terme « variables linguistiques » (dont la valeur est un mot et non un nombre)
- 1974 : première application industrielle : régulation d'une chaudière à vapeur par Mamdani
- 1980 : mise en application pratique pour le contrôle de fours à ciment (F.L. Smidth & Co, Danemark)

… aux 30 dernières années

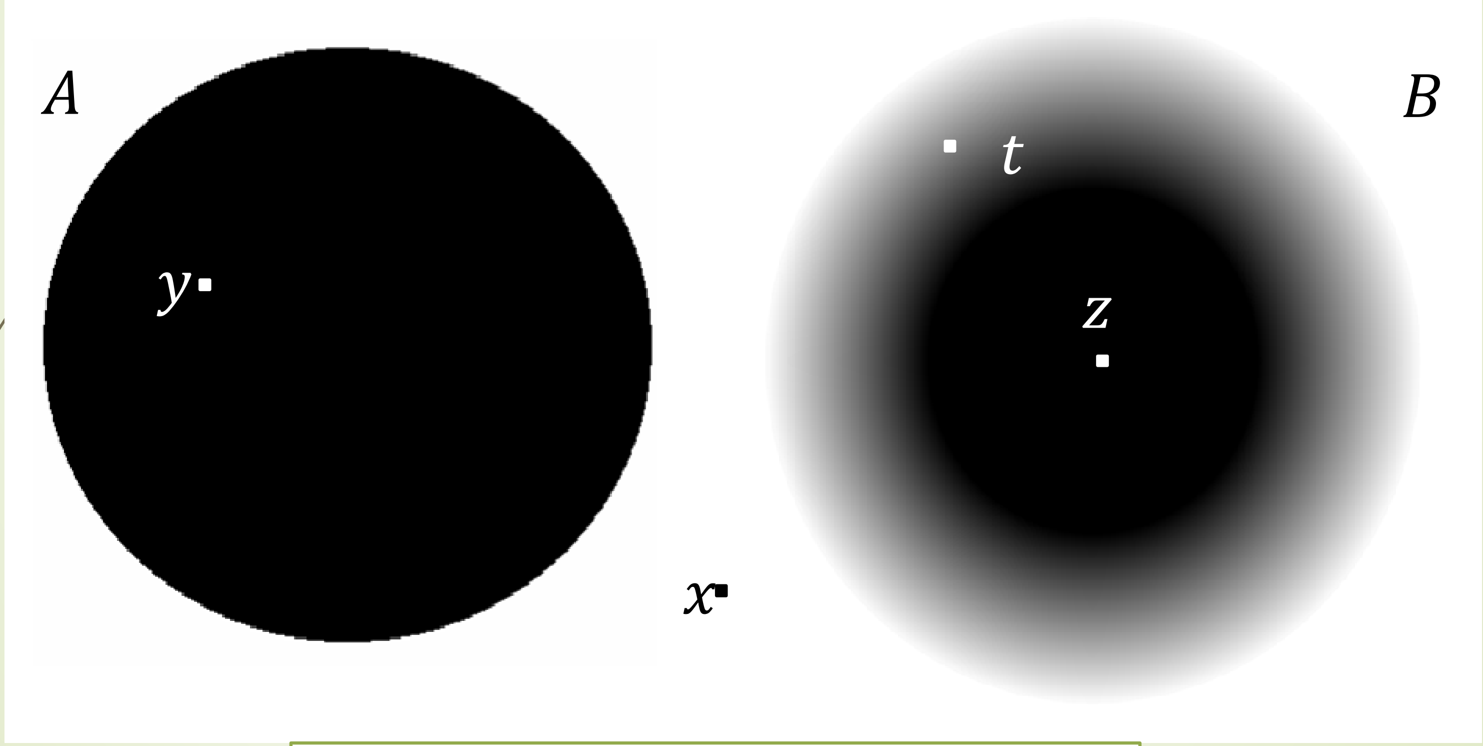
- 80's : Plusieurs applications émergent (notamment au Japon)
- 90's : Généralisation de l'utilisation de cette technique :
  - Appareils électro-ménagers (autocuiseurs, lave-linges…)
  - Audio-visuels (appareil photo autofocus, caméscopes à stabilisateurs d'images…)
  - Automobiles (ABS, suspension, climatisation…)
  - Systèmes de contrôle / commande dans la plupart des industries…
  - ….

7

A – Ensembles flous

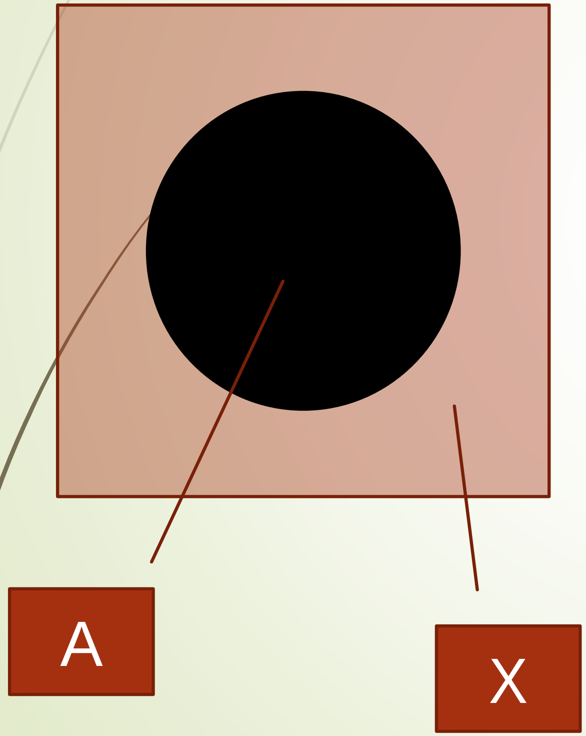
2) Sous-ensembles flous *versus* sous-ensemble nets

Exemple d'appartenance d'un point un ensemble



Appartenance partielle de t à B

Définition classique d'un ensemble



- Soit $\boldsymbol{\mu_A}$ **la fonction d'appartenance**
- $\forall x \in X, \begin{cases} \mu_A(x) = 0 \text{ ssi } x \notin A \\ \mu_A(x) = 1 \text{ ssi } x \in A \end{cases}$
- L'ensemble A est donc défini par :
  $A = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$

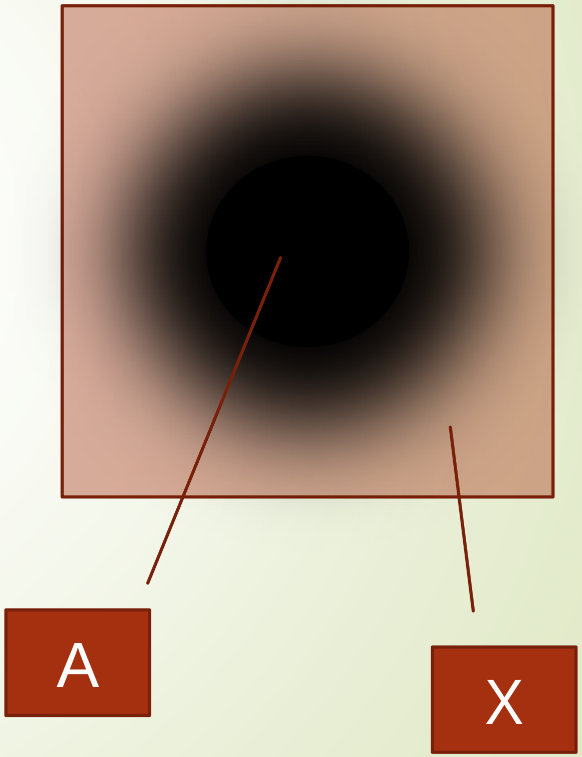
Définition dans l'approche floue

- Un élément peut appartenir plus ou moins fortement à un ensemble
- Un sous-ensemble flou A d'un ensemble X est caractérisé par une fonction d'appartenance μ_A :

$$\forall x \in X, \mu_A(x) \in [0,1]$$

- L'ensemble A est donc défini par :

$$A = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$$



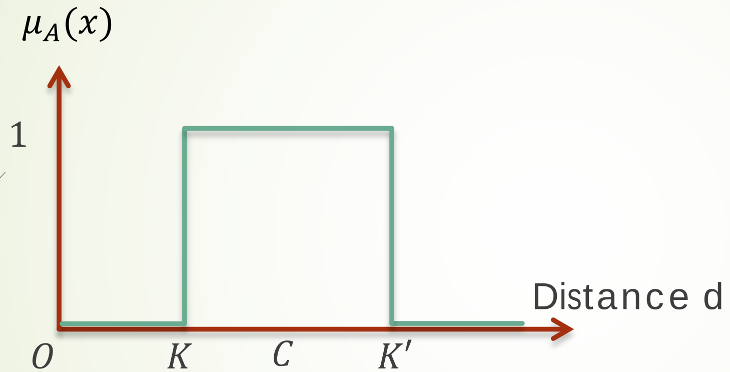
Interprétation des fonctions d'appartenance

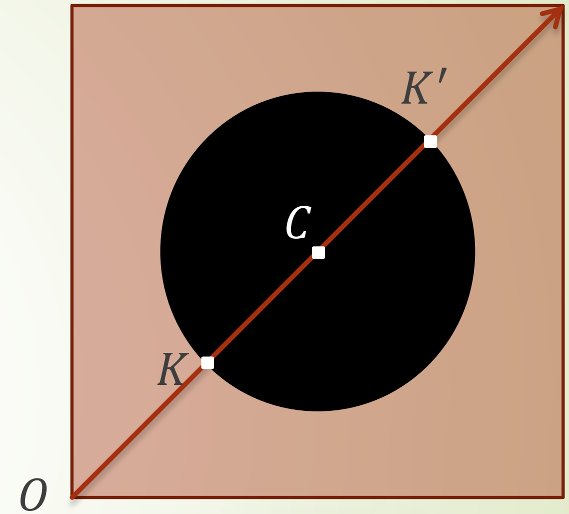
- Si $\mu_A(x) = 0{,}10$
  - x appartient à l'ensemble flou A avec un degré d'appartenance de 10%
  - x appartient **faiblement** à l'ensemble A
- Si $\mu_A(x) = 0{,}90$
  - x appartient à l'ensemble flou A avec un degré d'appartenance de 90%
  - x appartient **fortement** à l'ensemble A

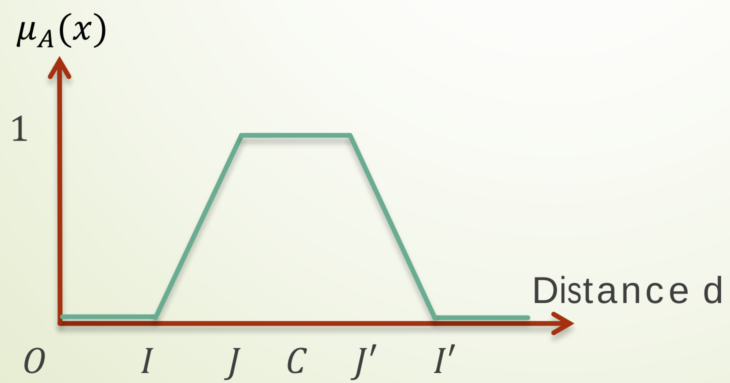
Le degré d'appartenance = valeur de vérité

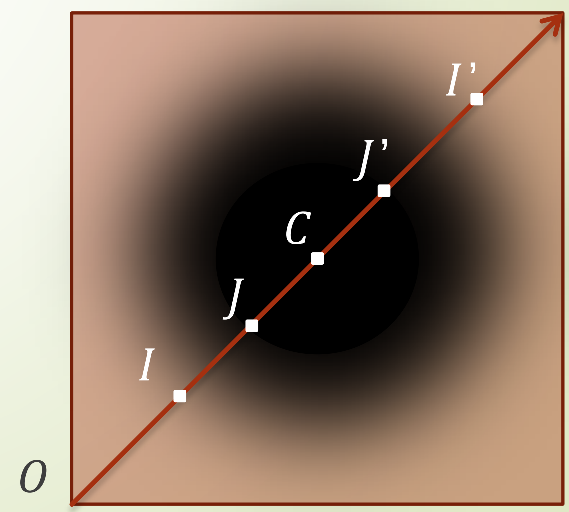
Représentation des fonctions d'appartenance

- Soit $d = OX$ telle que $X \in [OC)$









A – Ensembles flous

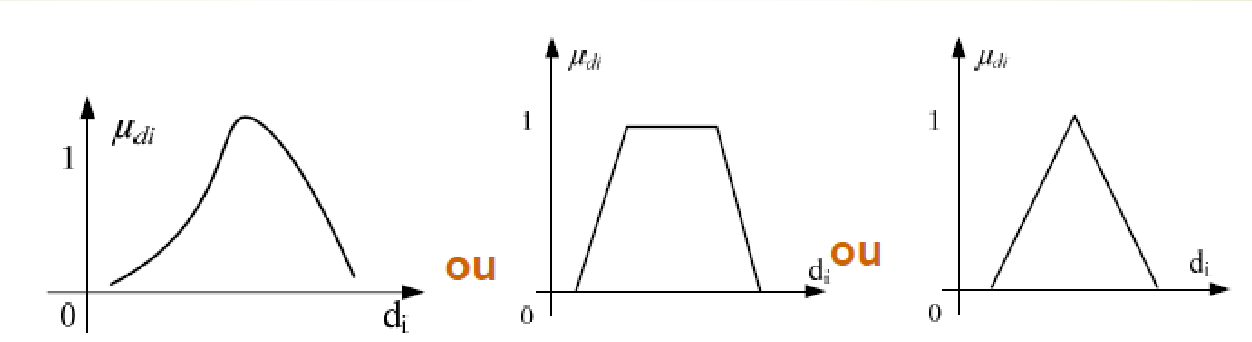
3) Caractérisation de la fonction d’appartenance floue

Fonction d'appartenance

- Soit X un ensemble, A un sous-ensemble flou de X et μ_A la fonction d'appartenance le caractérisant.
- μ_A est caractérisé par différentes propriétés
- Il y a donc une infinité de fonctions d'appartenance

Caractérisation (1/2)

- **Son type**
  La forme peut être triangulaire, trapézoïdale, gaussienne, sigmoïdale…

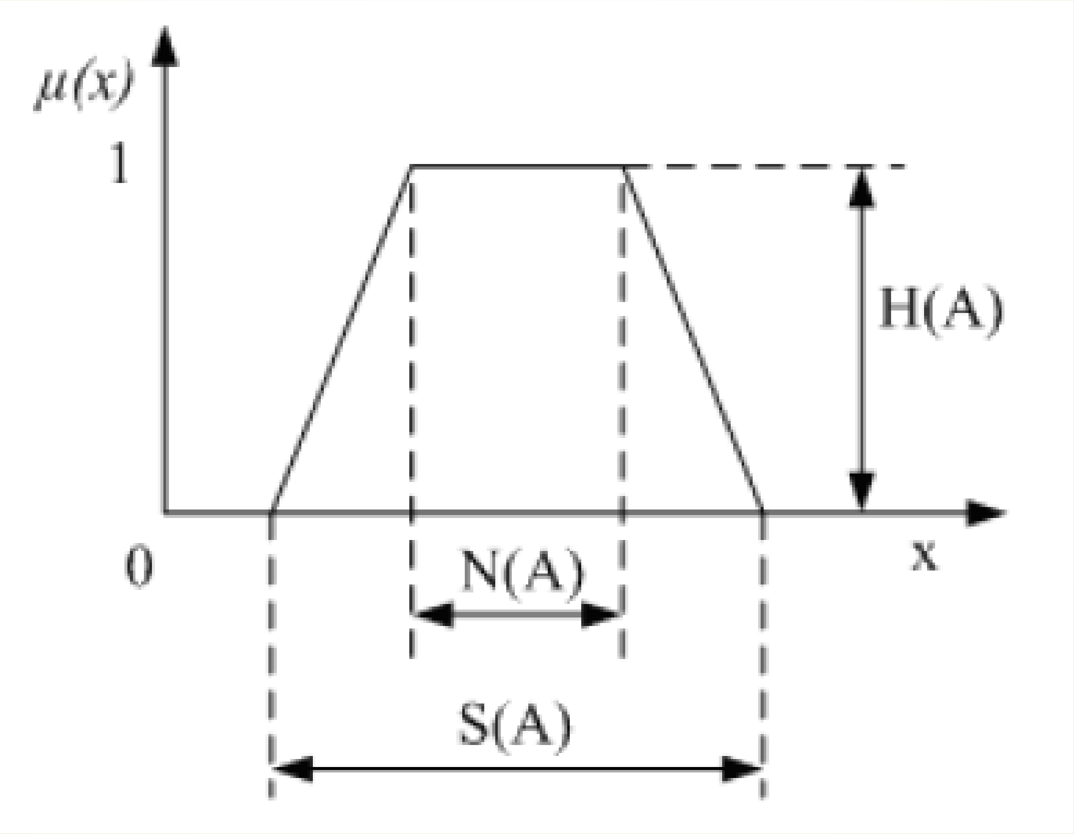


- **La hauteur**
  La hauteur de A correspond à la borne supérieure de l'ensemble d'arrivée de μ_A : $\boldsymbol{H(A)} = \sup\{\boldsymbol{\mu_A(x)} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}\}$

Caractérisation (2/2)

- **Le support**
  Le support de A, est l'ensemble des élément de X appartenant au moins un peu à A:
  $$\boldsymbol{S(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}}$$
- **Le noyau**
  Le noyau de A est l'ensemble des éléments de X appartenant totalement à A :
  $$\boldsymbol{N(A) = \{x \in X \mid \mu_{A(x)} = 1\}}$$
- **Note :** en général, on utilisera des ensembles flous normalisés, *i.e.* avec $H(A) = 1$ et
  $$\boldsymbol{N(A) = \{x \in X \mid \mu_{A(x)} = H(A)\}}$$

Illustration de la hauteur, du noyau et du support



Liens avec les sous-ensembles classiques

- Pour tout ensemble net A, on a :
  - $H(A) = 1$
  - $S(A) = N(A)$

Exercice

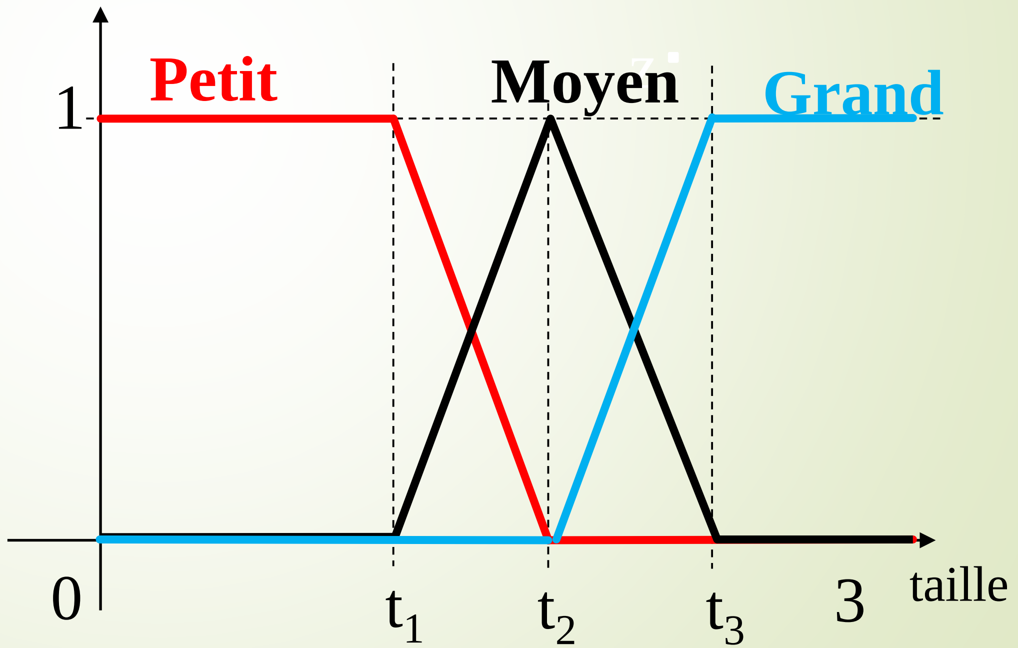
- Tracer les fonctions d’appartenance aux sous-ensembles flous des hommes grands ? Moyens ? Petits ?
  - (on suppose que la taille varie entre 0 et 3m)

Exercice

- Tracer les fonctions d'appartenance aux sous-ensembles flous des hommes grands ? Moyens ? Petits ?
  - (on suppose que la taille varie entre 0 et 3m)

- On définit ainsi
  - $\mu_{petit}(x)$
  - $\mu_{moyen}(x)$
  - $\mu_{grand}(x)$

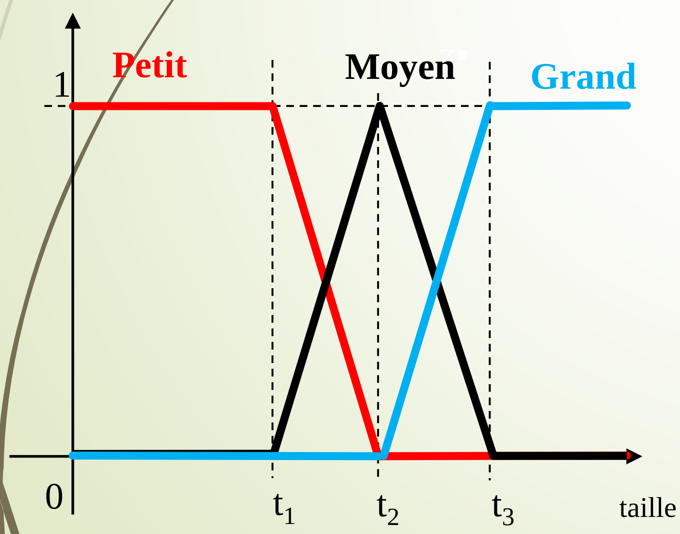
  pour $x \in [0,3]$



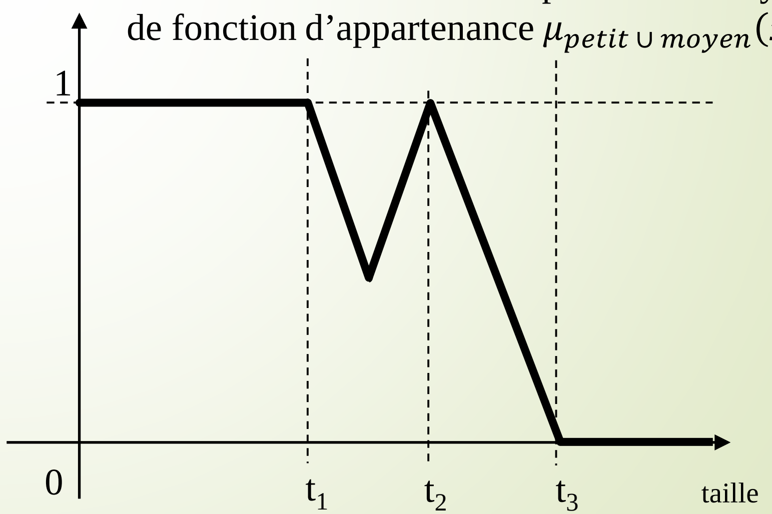
Fonction d'appartenance de **l'union** d'ensembles flous

- L'ensemble des personnes (petites **OU** moyennes) est un ensemble flou de fonction d'appartenance

$$\mu_{petit \cup moyen}(x) = \max\left(\mu_{petit}(x), \mu_{moyen}(x)\right) \qquad (\forall x \in X)$$



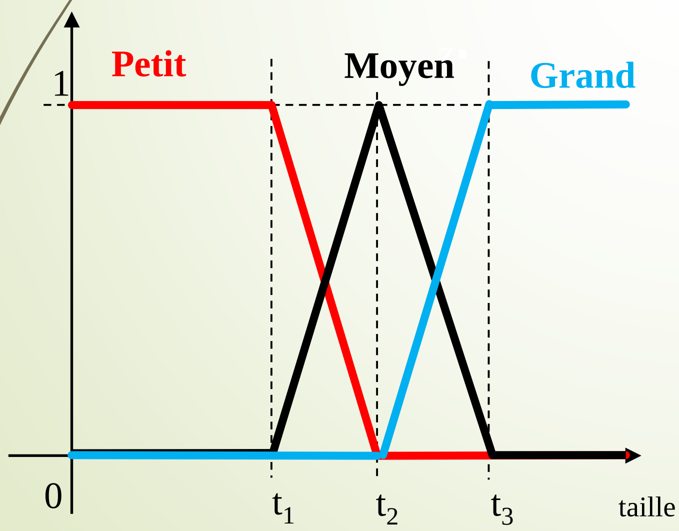
Ensemble flou « Personnes petites OU moyennes » de fonction d'appartenance $\mu_{petit \cup moyen}(x)$



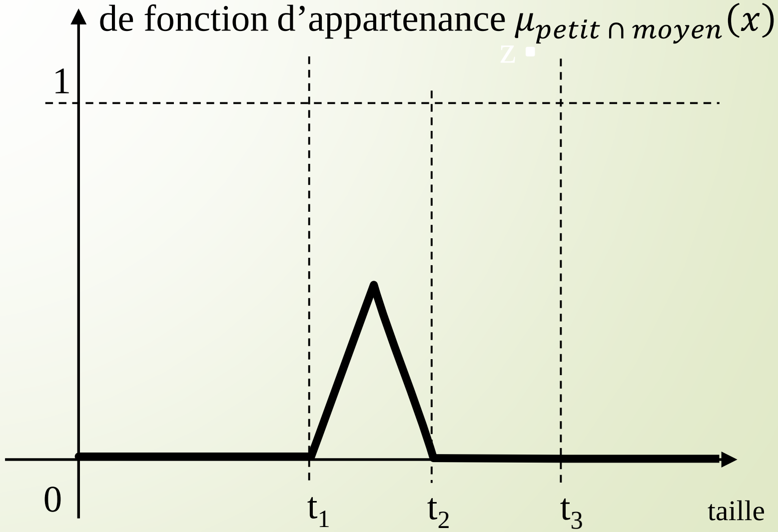
Fonction d'appartenance de **l'intersection** d'ensembles flous

- L'ensemble des personnes (petites **ET** moyennes) est un ensemble flou de fonction d'appartenance :

$$\boldsymbol{\mu_{petit \cap moyen}(x)} = \min\left(\boldsymbol{\mu_{petit}(x), \mu_{moyen}(x)}\right) \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X})$$



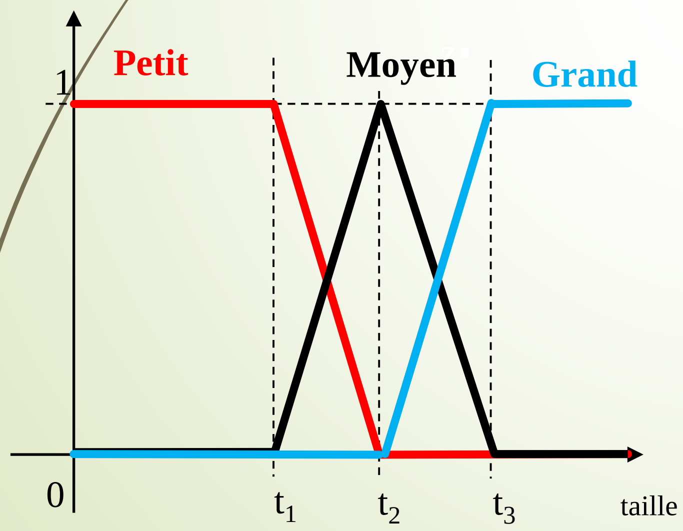
Ensemble flou « Personnes petites ET moyennes » de fonction d'appartenance $\mu_{petit \cap moyen}(x)$



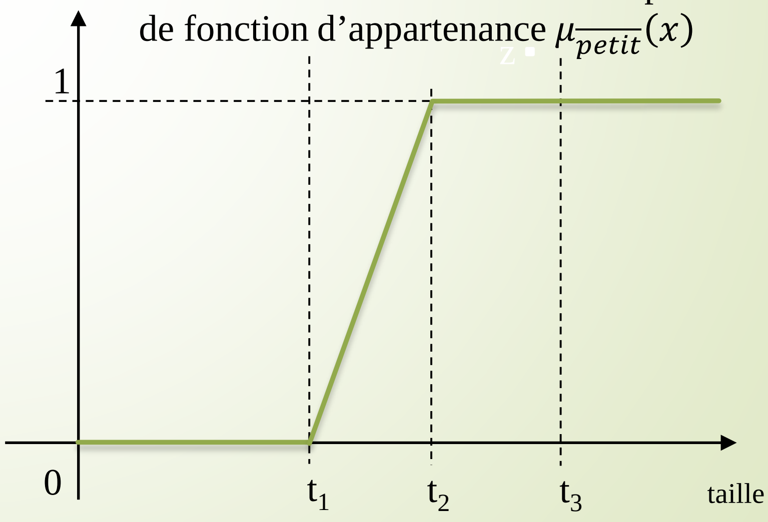
Fonction d'appartenance du **complément** d'un ensemble flou

- L'ensemble des personnes NON-PETITES est un ensemble flou de fonction d'appartenance

$$\mu_{\overline{petit}}(x) = 1 - \mu_{petit}(x) \qquad \forall x \in X$$



Ensemble flou « Personnes NON petites » de fonction d'appartenance $\mu_{\overline{petit}}(x)$



Propriétés

- Montrez d'une part que, **contrairement** à la logique classique :
  - $A \cap \overline{A} \neq \emptyset$ (on peut avoir A et son contraire *versus* $A \wedge \neg A \leftrightarrow \bot$)
  - $A \cup \overline{A} \neq X$ (pas de principe du tiers exclus *versus* $A \vee \neg A \leftrightarrow \top$)
- Et que d'autre part les lois de Morgan sont préservées :
  - $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (*versus* $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$)
  - $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (*versus* $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$)
- Enfin, si $\forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x)$ alors $A = B$

Définitions alternatives

- Les définitions précédentes ne sont pas les seules existantes.

	$\boldsymbol{\mu_{A\cap B}(x)}$	$\boldsymbol{\mu_{A\cup B}(x)}$	$\boldsymbol{\mu_{\overline{A}}(x)}$
Opérateurs de Zadeh	$\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$1 - \mu_A(x)$
Opérateurs probabilistes	$\mu_A(x).\mu_B(x)$	$\mu_{A(x)} + \mu_{B(x)} - \mu_A(x).\mu_B(x)$	$1 - \mu_A(x)$

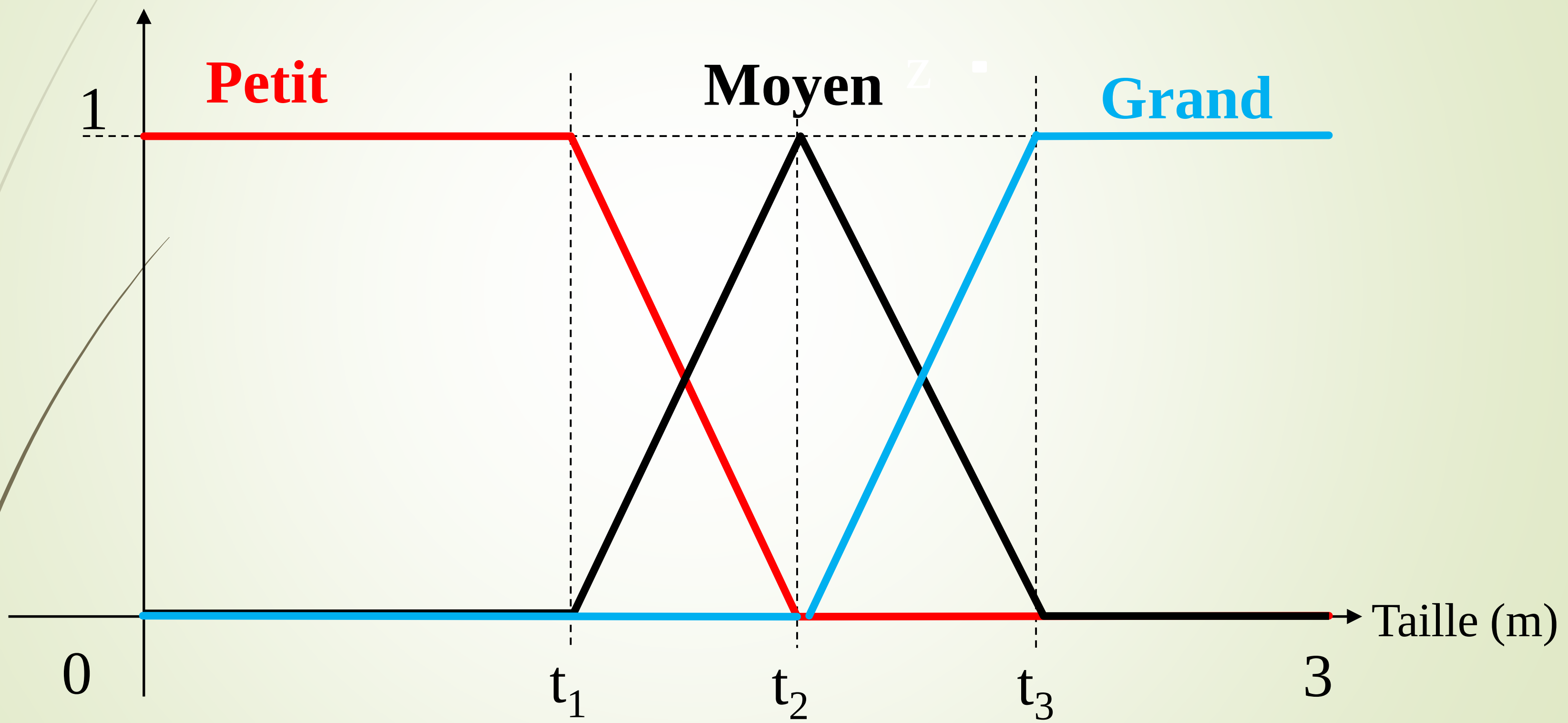
A – Ensembles flous

4) Les variables linguistiques

Variables linguistiques (définition)

- Soit :
  - V une variable
    (ex. : taille)
  - X la plage de valeurs (le domaine) de la variable
    (ex: $[0,3]$ exprimée en mètres)
  - T_V un ensemble fini ou infini de sous-ensembles flous
    (ex. : $\{petite, moyenne, grande\}$)
- **Une variable linguistique** correspond au triplet $\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{T_V} \rangle$

Variables linguistiques (exemple des tailles)



- $V = taille, X = [0,3], T_V = \{petit, moyen, grand\}$

Exemple du contrôleur d'une voiture à l'approche d'un feu

- Soient les différents comportements suivants :

Si le feu est rouge...	si ma vitesse est elevée...	et si le feu est proche...	alors je freine fort.
Si le feu est rouge...	si ma vitesse est faible...	et si le feu est loin...	alors je maintiens ma vitesse.
Si le feu est orange...	si ma vitesse est moyenne...	et si le feu est loin...	alors je freine doucement.
Si le feu est vert...	si ma vitesse est faible...	et si le feu est proche...	alors j'accélère.

- **Exercice** : définir les différentes variables linguistiques associées

A – Ensembles flous

30

5) Le raisonnement en logique floue

Rappels de logique

- En logique classique, on utilise le *modus ponens* comme règle d'inférence :

$$\frac{p, p \to q}{q}$$

- Qui se lit :
  - « SI p est valide (ou prouvable),
  - ET SI $p \to q$ est valide (ou prouvable)
  - ALORS q est valide (ou prouvable)

Règle floue d'inférence

- C'est le *modus ponens* généralisé :

  - **Implication** :

    SI $x \in A$ **ALORS** $y \in B$

    Noté : $x \in A \rightsquigarrow y \in B$

  - **Fait** :

    $x \in A'$

  - **Conséquence** :

    $y \in B'$

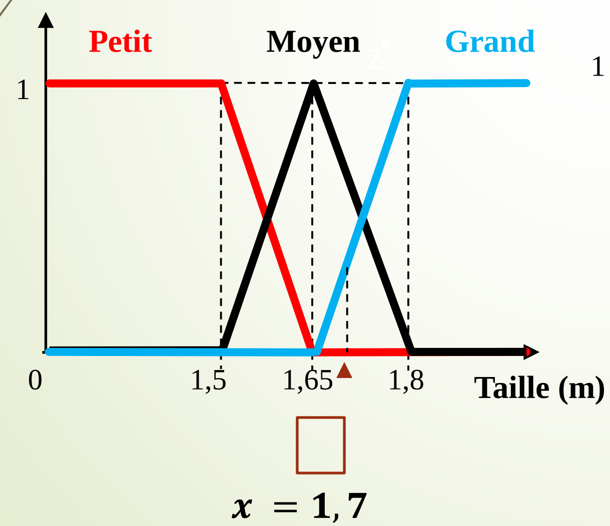
L'implication floue

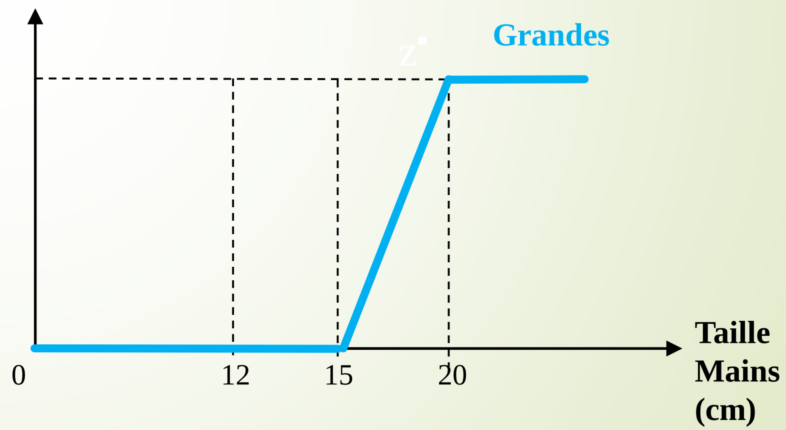
- Le raisonnement flou se base sur des **règles floues d'inférence** exprimées en langage naturel et utilisant des variables linguistiques.

- Ces règles sont définies à partir d'**implications floues**
  - Exemple : **Si** il est grand **Alors** il a de grandes mains

Exemple d'implication floue

- **Si** un individu est grand **Alors** il a de grandes mains
- Cet individu a une taille de $x = 1{,}70\ m$
- A t-il de grandes mains ?





Fonction d'appartenance de l'implication floue (déf. de Mamdani)

- L'ensemble des personnes vérifiant ($A \rightsquigarrow B$) est un ensemble flou de fonction d'appartenance :

$$\mu_{A \rightsquigarrow B}(x) = \min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right), \qquad \forall x \in X$$

- Remarques :
  - Il existe également des définition alternatives. Par exemple:

$$\mu_{A \rightsquigarrow B}(x) = \mu_A(x).\mu_B(x)$$

  - l'implication floue ne généralise pas l'implication classique.

Mécanisme d'inférence (de Mamdani)

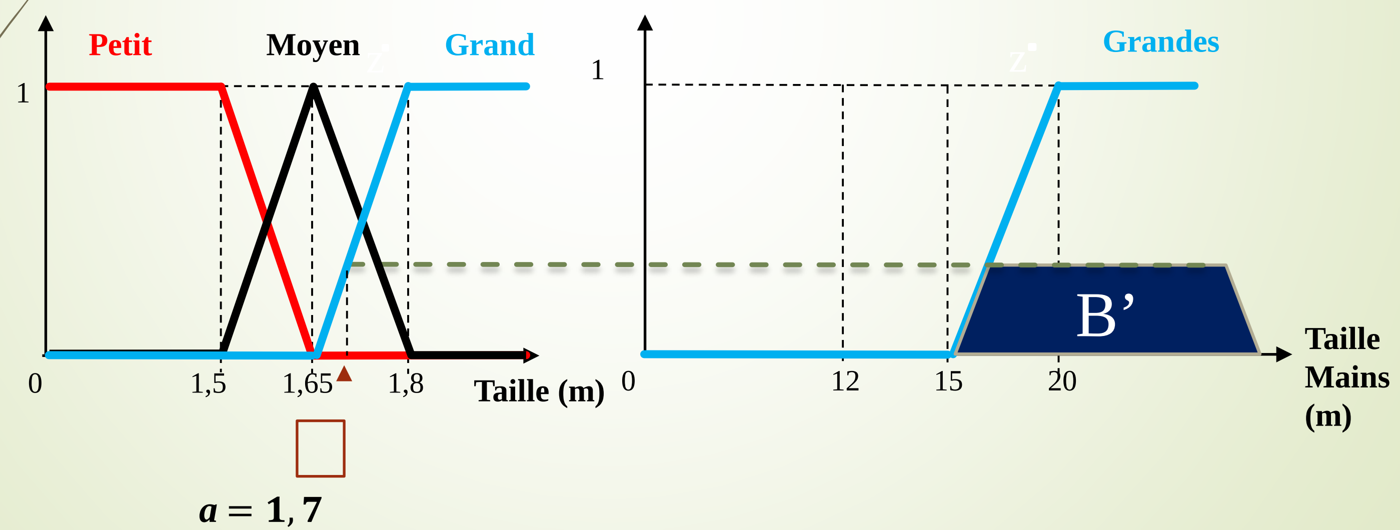
- Soit une règle donnée (une implication $A \rightsquigarrow B$) et une valeur a de la taille $= 1{,}70\ m$.
  - On calcule le degré d'activation de la règle ($\mu_A(a)$)
  - On obtient en conclusion un nouvel ensemble flou B' :

$$\mu_{B'}(x) = \min\big(\mu_{A'}(a), \mu_B(x)\big), \qquad \forall x \in X$$

- L'idée sous-jacente à cette formule est que plus les prémisses d'une règle sont vérifiées, plus sa conclusion est vérifiée

Illustration graphique

- L'ensemble flou B' a une fonction d'appartenance basée sur l'ensemble Grandes Mains, mais minorée par la taille de l'individu dont on évalue la taille à $1{,}70\ m$



Démonstration de la formule de Mamdani

- On a $\mu_{B'}(y) = \mu_{A' \cap A \rightsquigarrow B}(x, y)$

(d'après déf. Règle floue d'inférence)

L'ensemble flou résultant (correspondant à B') est celui correspondant à B mais minoré par la valeur de la prémisse de la règle

Démonstration de la formule de Mamdani

- On a $\mu_{B'}(\mathrm{y}) = \mu_{A' \cap A \rightsquigarrow B}(x, y)$

  (d'après déf. Règle floue d'inférence)

- D'où $\mu_{B'}(\mathrm{y}) = \min(\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightsquigarrow B}(x, y))$

  (d'après déf. Intersection de Zadeh)

- D'où $\mu_{B'}(\mathrm{y}) = \min\left(\mu_{A'}(x), \min\left(\mu_A(x), \mu_B(y)\right)\right)$

  (d'après déf. Implication floue de Mamdani)

- Soit, si la prémisse est évaluée en x_0 :

$$\mu_{B'}(\mathrm{y}) = \min\left(\mu_{A'}(x_0), \mu_B(y)\right)$$

(A' instancie l'antécédent A de la règle floue d'inférence)

Partie B

Modélisation à l'aide de logiques floues

B – Modélisation à l'aide de logiques floues

1) Exemples d'utilisation

Exemple de contrôleur de serres agricoles

- À partir de capteurs donnant :
  - La température
  - Le taux d'humidité
  - Le rayonnement solaire
- Un contrôleur flou va fixer **en continu** les valeurs de :
  - L'éclairage
  - La ventilation
  - Le chauffage/refroidissement
  - L'humidification

de la serre, ce qui va peut-être modifié les valeurs relevées par les capteurs, donc agir de nouveau sur le contrôleur, *etc.*

Exemple de contrôleur de direction assistée d’une voiture

- En fonction de capteurs indiquant
  - La position
  - Le cap/la chaussée
  - La vitesse
  - L’angle actuel du volant
- Le contrôleur de direction assistée va
  - Ajuster la sensibilité du volant

Conception d’un contrôleur flou

- La définition
  - des variables linguistiques,
  - des règles floues

  est **effectuée à dires d’experts** (phase empirique).

- La définition des ensembles flous est une phase délicate du processus, elle est souvent réalisée de manière itérative (incrémentale) et requiert de l’expérience.

B – Modélisation à l'aide de logiques floues

2) Utilisation d’un contrôleur flou

Principe

- Les systèmes à base de logique floue admettent en entrée des paramètres flous et produisent en sortie de nouveaux paramètre flous

- Il est donc nécessaire :
  - En entrée du système : de convertir les données d'entrée en concepts flous
  - De calculer la sortie du système floue en fonction de l'entrée
  - En sortie : de convertir les données de sortie en valeur numériques (non floues) utilisables par le système utilisant le système flou

Les 5 étapes

- Il y a 5 étapes à suivre pour aboutir à la sortie d'un système flou à partir de ses entrées
  1. Fuzzification
  2. Calcul de degré d'activation de chaque règle
  3. Recherche de la fonction d'appartenance pour la sortie de chaque règle (ce qu'on a noté $\mu_{B'}(x)$ dans ce qui précède)
  4. Recherche de la fonction d'appartenance résultante globale (phrase d'agrégation des règles)
  5. Defuzzification
- L'entrée au niveau du module flou se fait en 1. et la sortie en 5.

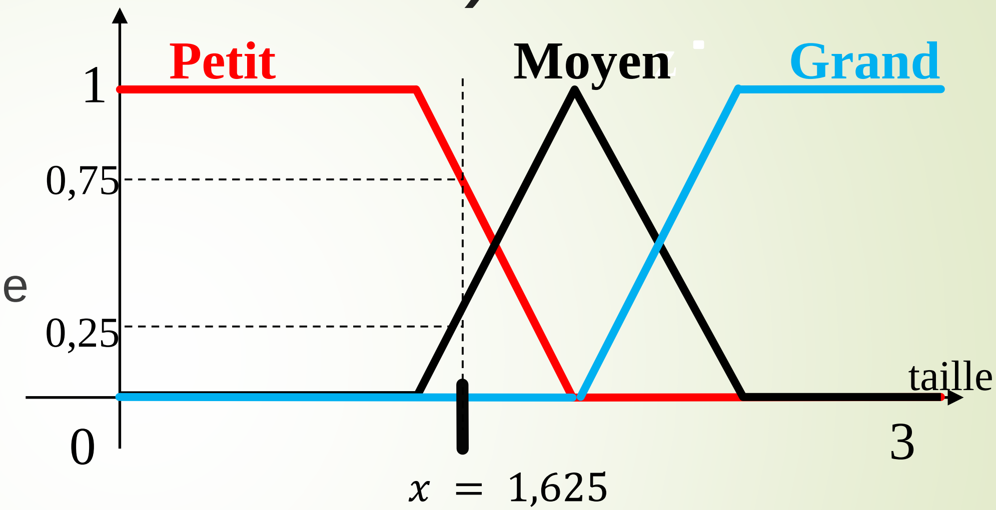
Etape 1 : Fuzzification (définition)

- C'est la 1re étape d'utilisation d'un système flou
- Consiste à transformer une valeur numérique en un sous-ensemble flou
- La fuzzification requiert :
  1. De définir les variables linguistiques (représentation graphique inclue)
  2. De définir les règles d'inférence
- Processus délicat nécessitant un expert

Etape 1 : Fuzzification (exemple de la taille)

- La **variable** Taille est analysée en tant que 3 **sous-ensembles flous**, dont la valeur varie sur le **domaine**

  $X = [0,3]$ (mètre)



Pierre mesure 1,625 m

Interface de fuzzification

« Pierre est petit » à un degré 75%

« Pierre est moyen » à un degré 25%

« Pierre est grand » à un degré 0%

Etape 1 : Fuzzification (les implications floues)

- C’est d’elles dont vont dépendre la capacité du système flou à déduire des conclusions
- Elles dépendent de la situation que l’on cherche à décrire
- Exemple :
  - Si un individu est très grand et qu’il est très musclé alors il est athlétique
  - Si un individu est très grand et qu’il est plutôt moyennement musclé alors il est longiligne
  - Si un individu est beaucoup en surpoids alors il est obèse
  - …

Etape 1 : Fuzzification (formalisation des implications)

- Dans l'exemple précédent :
  - *taille est grande & musculature est très importante* ↝ *individu est très athlétique*
  - *taille est très grande & musculature est moyenne* ↝ *individu est moyennement athlétique*
  - …

Étape 2 : Calcul du degré d'activation d'une règle floue R (démarche)

- Une règle floue R est de la forme **SI** A' ET $A \rightsquigarrow B$ **ALORS** B'
- Il s'agit lors de cette étape :
  1. De calculer la fonction d'appartenance de **l'antécédent** de chaque règle R
  2. Puis de calculer le degré d'activation de R (dépend de la fonction d'appartenance de son antécédent)

- On se propose de suivre ces étapes sur un exemple

Étape 2 : Exemple de règle

- Soit l'implication floue suivante :

$$(d_1\ est\ très\ faible)\ \&\ (d_2\ est\ très\ faible)\ \&\ (g_1\ est\ moyen)\ \&\ (g_2\ est\ moyen)$$

$$\rightsquigarrow (r\ est\ moyen)$$

- Elle est construite à partir de
  - 4 **variables** : d_1, d_2, g_1 et g_2 (« & » représente la conjonction)
  - 3 **ensembles flous** : faible, très_faible, et moyen

Étape 2 : Exemple de règle

- Soit l'implication floue suivante :

  $(d_1\ est\ très\ faible)$ & $(d_2\ est\ très\ faible)$ &

  $(g_1\ est\ moyen)$ & $(g_2\ est\ moyen)$

  $\rightsquigarrow (r\ est\ moyen)$

- Elle est construite à p de

Ici, chaque variable ne fait intervenir qu'un seul ensemble flou mais cela pourrait être plus compliqué.

Étape 2 : Fonction d'appartenance de l'antécédent

- Soit A l'antécédent de la règle précédente, donc : $A = (d_1\ est\ très\ faible)\ \&\ (d_2\ est\ très\ faible)\ \&\ (g_1\ est\ moyen)\ \&\ (g_2\ est\ moyen)$
- D'après la sémantique du « & » de Zadeh (avec la fonction $\min$) la fonction d'appartenance de A est

$$\mu_A(x, y, z, t) = \min\left(\mu_{trèsFaible}(x), \mu_{trèsFaible}(y), \mu_{moyen}(z), \mu_{moyen}(t)\right)$$

- Remarque : si on avait eu des disjonctions on aurait choisi bien sûr la fonction $\max()$

Étape 2 : Degré d'activation d'une règle (principe)

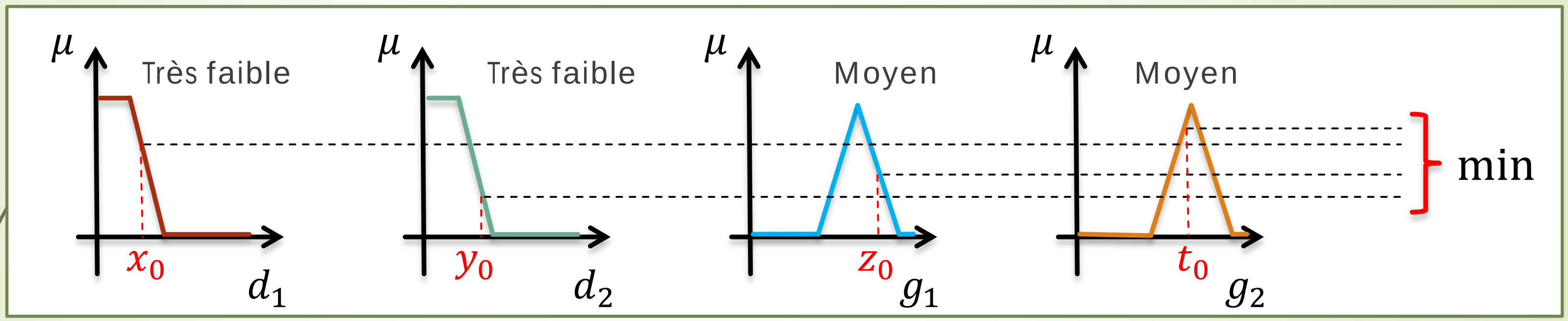
- C'est la valeur de la fonction d'appartenance de son antécédent en un point donné
- Pour le calculer, il faut instancier chaque variable de $\mu_A(x, y, z, t)$ par une valeur donnée x_0, y_0, z_0 et t_0
- Ces valeurs correspondent à l'état du monde au moment où on évalue notre règle floue
- Donc ici : $\mu_{A'}(x_0, y_0, z_0, t_0) =$

$$\min\left(\mu_{trèsFaible}(x_0), \mu_{trèsFaible}(y_0), \mu_{moyen}(z_0), \mu_{moyen}(t)\right)$$

Comme c'est une instance de l'antécédent, on note A' au lieu de A

Étape 2 : Degré d'activation d'une règle (illustration graphique)

- La figure ci-dessous donne une représentation graphique des différents ensembles flous



- D'après la définition précédente, on voit que $\mu_{A'}(x_0, y_0, z_0, t_0) = \mu_{trèsFaible}(y_0)$ qui est le degré d'activation de la règle

Etape 3 : Recherche de la fonction d'appartenance de la conclusion de la règle (principe)

- Rappel de la formule de Mamdani :

$$\mu_{B'}(x) = \min\left(\mu_{A'}(a), \mu_B(x)\right), \qquad \forall x \in X$$

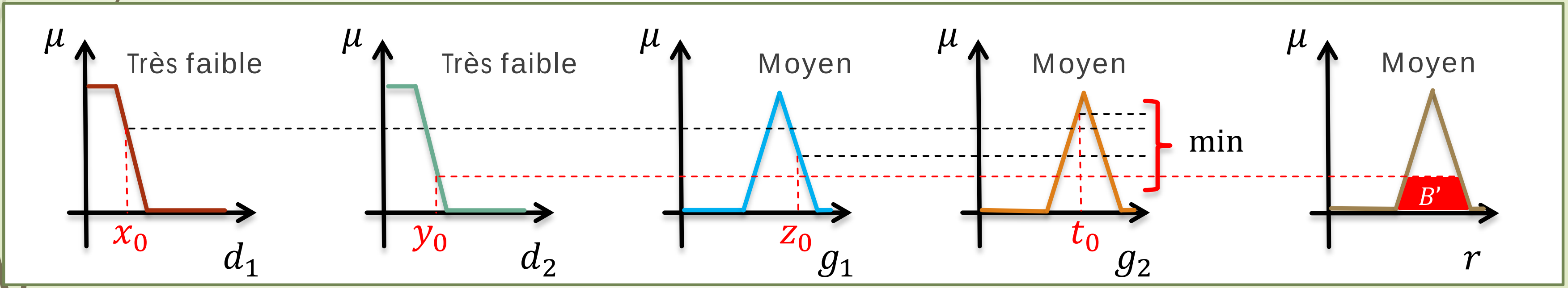
où $\mu_{A'}(a)$ n'est rien d'autre que le degré d'activation de la règle

- L'idée est que **plus les prémisses d'une règle sont vérifiées**, et **plus sa conclusion doit être vérifiée**

Etape 3 : Recherche de la fonction d'appartenance de la conclusion de la règle (illustration)

- Dans l'implication suivante :

$$(d_1\ est\ très\ faible)\ \&\ (d_2\ est\ très\ faible)\ \&\ (g_1\ est\ moyen)\ \&\ (g_2\ est\ moyen)$$
$$\rightsquigarrow (r\ est\ moyen)$$



Étape 4 : Phase d'agrégation (définition)

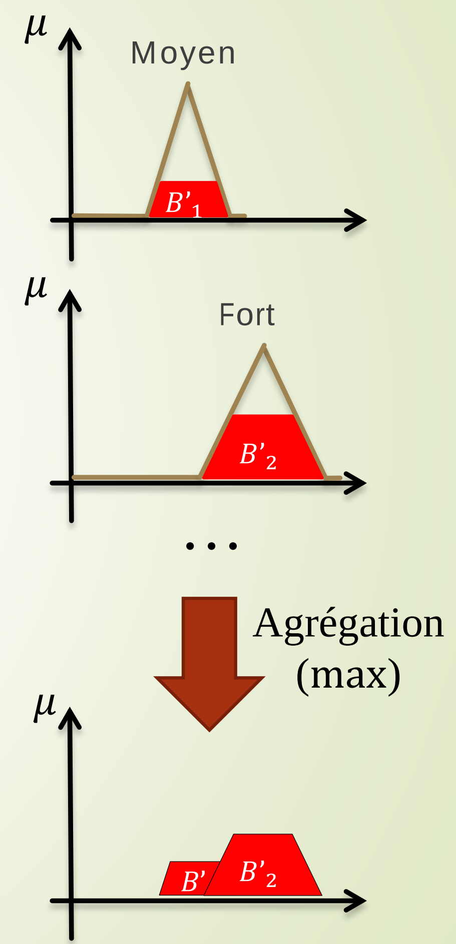
- Soit I l'ensemble de toutes les règles R_1, R_2, … R_n ayant été activées.
- Il faut trouver la **fonction d'appartenance globale** $\mu_{B'_I}(y)$ résultante des règles contenues dans I
- On utilise une fonction d'agrégation $\mathcal{F}$ donnée :

$$\mu_{B'_I}(y) = \mathcal{F}\left(\left\{\mu_{B'_i}(y_i) : i \in I\right\}\right)$$

  où $\mu_{B'_i}(y_i)$ est la fonction d'agrégation du conséquent de la règle R_i
- Le choix de cette fonction est évalué par un expert. Dans la suite, nous prendrons $\mathcal{F} = \max(\quad)$

Étape 4 : Agrégation (illustration)

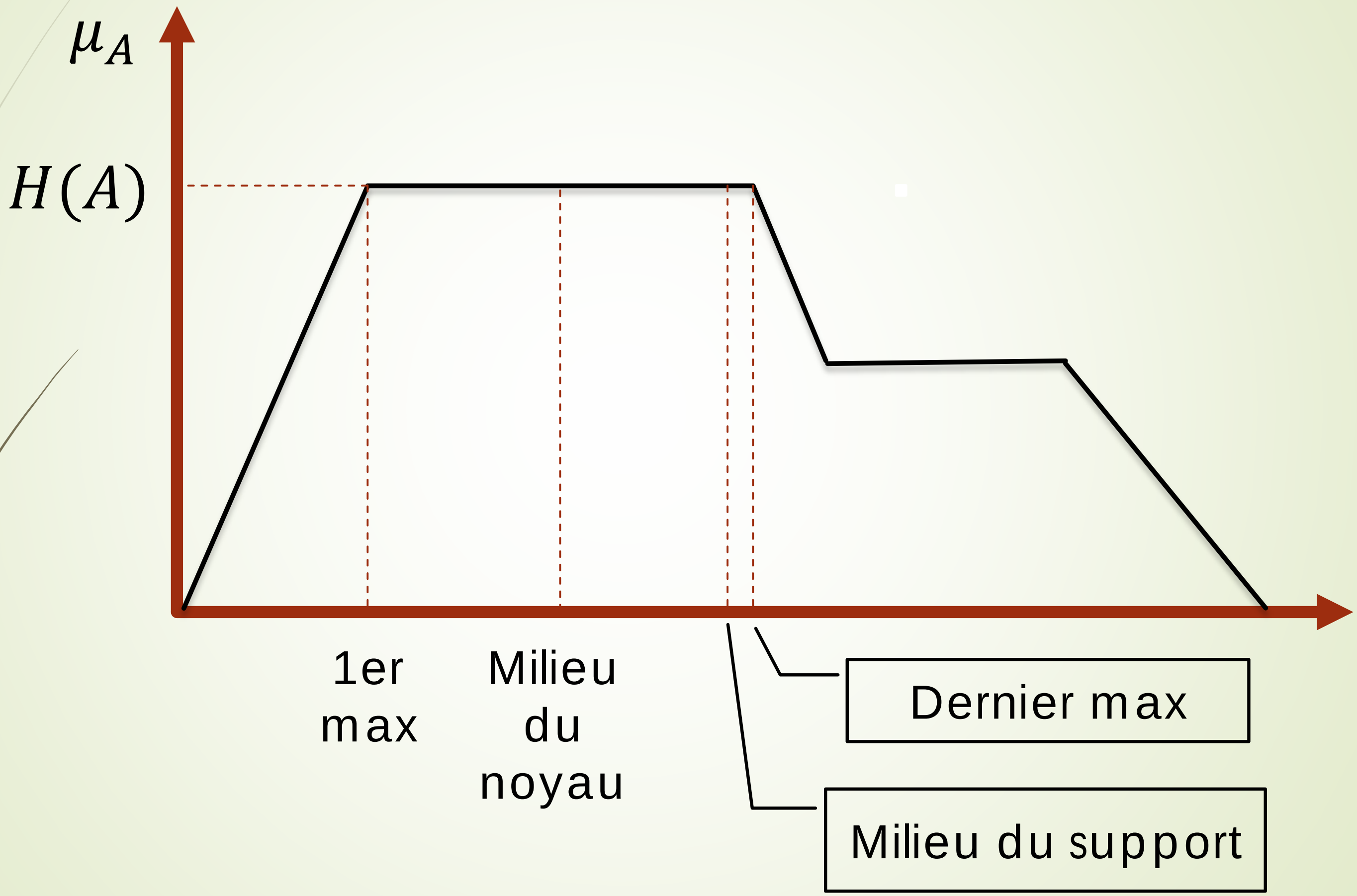
- Prendre max( ) comme fonction d'agrégation des ensembles flous B_i' obtenus revient à supperposer les ensembles flous B_i'
- L'ensemble flou B_I' obtenu a pour fonction d'appartenance $\mu_{B_I'}$



Étape 5 : Défuzzification (définition)

- C'est l'opération qui, inversement à la fuzzification, consiste à transformer un ensemble flou B' en grandeur numérique y_0.
- Parmi les méthodes de défuzzification les plus répandues :
  - Centre de gravité
  - Premier maximum
  - Dernier maximum
  - Centre maximum
  - Milieu du noyau…

Étape 5 : Défuzzification (exemple)



B – Modélisation à l'aide de logiques floues

3) Conception d'un contrôleur de pourboires

Présentation

- On se propose de définir une système flou indiquant le pourboire qu'on doit donné à un serveur suite à un repas pris dans un restaurant
- On va pour cela suivre les étapes 1 à 5 précédentes
- Pour vous aider à l'étape 1, on vous propose les règles (informelles) ci-contre :

R1	Si le service est mauvais ou la nourriture est mauvaise	Alors le pourboire est faible
R2	Si le service est bon	Alors le pourboire est moyen
R3	Si le service est excellent ou la nourriture est délicieuse	Alors le pourboire est élevé

Quelques conseils

- À propos des variables linguistiques :
  - Lesquelles ?
  - Domaine ?
  - Combien d'ensembles sont nécessaires et suffisants ?
  - Comment doit-on déterminer la forme des ensembles ?
- À propos des ensembles flous :
  - Il doivent correspondre à des concepts « larges » pour permettre un certain bruit (un ensemble qui serait soit une valeur, soit l'autre serait net et non plus flou !)
  - Un certain recouvrement est nécessaire entre les ensembles sur le domaine

Quelques conseils (fin)

- À propos des ensembles flous :
  - Commencer par des ensembles triangulaires symétriques et trois ensembles pour chaque variable.
  - Plus de sept ensembles n'apporte aucune amélioration.
  - Tout le domaine doit être couvert par les ensembles

Le travail à réaliser

- Définir les différentes variables linguistiques (et les ensembles flous les caractérisant) et les règles d'inférences formelles (étape 1)

- Choisir une valeur de service et de nourriture, et appliquer les 3 règles ci-dessus pour calculer d'abord leur activation, puis la fonction résultante (étapes 2 à 4)

- Choisir une fonction de déffuzification et répondre à la question : comment choisir le pourboire à donner ?