

CHAPITRE 3

GÉNÉRATION DE RÉSIDUS PAR OBSERVATEURS D'ÉTAT

Sommaire

1	Introduction	25
2	L'estimation d'état	26
2.1	Observabilité des systèmes linéaires	26
2.2	Synthèse d'observateur de Luenberger pour la génération des résidus	27
2.3	Génération des résidus par filtre de Kalman	30
2.4	Génération des résidus par observateur à entrée inconnue	33
2.5	Structuration et évaluation des résidus générés à base d'observateurs	36
2.5.1	Structure d'observateurs simplifiés	36
2.5.2	Structure d'observateurs dédiés (DOS)	37
2.5.3	Structure d'observateurs généralisés (GOS)	38

1 Introduction

Un observateur est un développement mathématique permettant de reconstituer les états internes d'un système uniquement à partir des données accessibles (les entrées et les sorties mesurées).

L'observateur fait deux phases :

L'estimation se fait par le calcul des grandeurs d'état à l'aide de modèles proches du système.

La correction se fait par l'addition ou la soustraction de la différence entre les états estimés et ceux mesurés que l'on multiplie par un gain L .

Le gain régit la dynamique et la robustesse de l'observateur, donc son choix est important et doit être adapté aux propriétés du système dont on veut effectuer l'observation des états. Les observateurs sont des systèmes dynamiques qui permettent, sous certaines conditions dites d'observabilité, d'estimer l'état du système en utilisant les grandeurs accessibles du système.

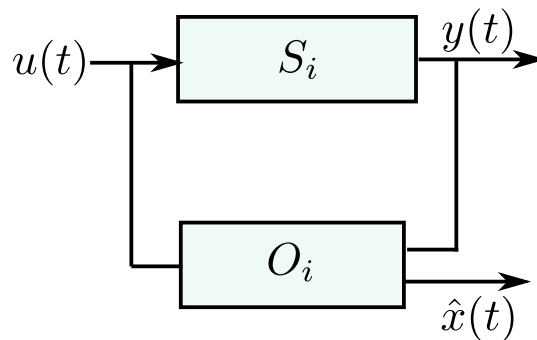


FIGURE 3.1 – Structure d'un observateur d'état

Plus formellement (figure 5.1), un observateur O_i (ou reconstruteur d'état) asymptotique d'un système dynamique S_i :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_i(x(t), u(t)) \\ y(t) = h_i(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée et de sortie du système à observer et dont le vecteur de sortie, avec $\hat{x}(t)$ est l'état estimé :

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = \hat{f}_i(Z(t), u(t), y(t)) \\ \hat{x}(t) = \hat{h}_i(Z(t), u(t), y(t)) \end{cases} \quad (3.2)$$

Ce système O_i est déterminé pour que la norme de l'erreur entre le vecteur d'état estimé $\hat{x}(t)$ et le vecteur d'état du système $x(t)$ tende asymptotiquement vers zéro.

$$\|e_i(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

Objectif de l'observateur :

- Observe les mesures (observations) issues de $u(t)$ et/ou $y(t)$
- Simule (prédit) le comportement du système $\hat{x}(t)$ (reconstruction d'information, état, état de santé...)
- Génère une estimation $\hat{y}(t)$ cohérente avec les observations
- Résidu : l'écart entre la mesure de sortie et la prédiction : $r(t) = y(t) - \hat{y}(t)$

La méthode basée sur l'observateur est appropriée si les défauts sont associés à des changements d'actionneurs, de capteurs ou de variables d'état non mesurables, c'est-à-dire qu'elle est particulièrement appropriée pour détecter et isoler des défauts supplémentaires. Un modèle mathématique détaillé pour l'installation est nécessaire, dérivé de préférence des principes afin que les états dans les équations d'espace d'état aient une interprétation physique. Les états non mesurés sont reconstruits à partir des variables d'entrée et de sortie mesurables à l'aide d'un observateur de Luenberger ou d'un filtre de Kalman.

2 L'estimation d'état

2.1 Observabilité des systèmes linéaires

Considérant le système 3.1 qui présente la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

avec x le vecteur d'état, u le vecteur d'entrée et y le vecteur de sortie. Le système 3.3 est dit observable si et seulement si, la connaissance des signaux externes (u, y) implique la connaissance du signal interne x . Autrement dite, si (x^1, u^1, y^1) et (x^2, u^2, y^2) sont deux solutions du système 3.3 et $(u^1, y^1) = (u^2, y^2)$, il doit alors suivre que $x_1 = x_2$. En outre, la connaissance de $x(t_0)$ pour tout

$t_0 \in T$ implique la connaissance de l'état x , donc l'observabilité d'un système dynamique peut être traduite par la question :

est-ce qu'il est possible de reconstruire la valeur initiale $x(0)$ par la connaissance de u et y ?

En raison de linéarité, il est facile de voir que l'observabilité du système 3.3 ne dépend pas de l'entrée u . Par conséquent, la matrice B ne présente aucun rôle avec l'observabilité du système et la question d'observabilité peut être réduite à la question :

$y \equiv 0$ implique $x \equiv 0$?.

En prenant des dérivés de la sortie, il est facile de voir que :

$$y \equiv 0 \Leftrightarrow y^{(i)}(0) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x(0) \in \ker O_{(A,C)}$$

avec $O_{(A,C)} = \begin{bmatrix} C & CA & \dots & CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$ est la matrice d'observabilité de Kalman. Notamment, le système 3.3 est observable si et seulement si, $\ker(O_{(A,C)}) = \{0\}$ c.à.d le rang de la matrice d'observabilité est de rang plein.

$$\text{rang}(O_{(A,C)}) = \dim(x)$$

2.2 Synthèse d'observateur de Luenberger pour la génération des résidus

Considérons le système à surveiller, supposé correctement décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu + F_x f(t) + D_x d(t) \\ y(t) = Cx(t) + F_y f(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

où D_x représente la matrice d'action des perturbations $d(t)$, F_x et F_y sont les matrices d'action des défauts $f(t)$ à détecter sur l'état et la sortie. Les grandeurs et les matrices suivantes $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$, A , B , et C ont la signification habituelle. Si la paire (A, C) est observable, il est possible de reconstruire l'état $x(t)$ à l'aide d'un modèle du système nominal, corrigé par l'écart entre la sortie mesurée et la sortie estimée.

L'observateur d'état, utilisé en tant que générateur de résidus $r_y(t)$ est alors le suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = Ax(t) + Bu + L[y(t) - \hat{y}(t)], & \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ y(t) = Cx(t) \\ r_y(t) = e(t) = y(t) - \hat{y}(t) \end{cases} \quad (3.5)$$

Le gain d'observateur L est calculé de façon que l'estimation tende vers l'état $x(t)$ du système quand t tend vers l'infini, quels que soient les états initiaux $x(0)$ et $\hat{x}(t)$. La dynamique de l'erreur de l'estimation sur l'état $e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) + F_x f(t) + D_x d(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - Ly(t) + L\hat{y}(t) \end{aligned}$$

comme $y(t) = Cx(t) + F_y f(t)$ et $\hat{y}(t) = C\hat{x}(t)$, nous avons :

$$\dot{e}_x(t) = (A - LC)e_x(t) + (F_x - LF_y)f(t) + D_x d(t) \quad (3.6)$$

En l'absence de défaut ($f(t) = 0$) et en négligeant l'effet des entrées inconnues ($d(t) = 0$), l'erreur d'estimation devient $\hat{e}_x(t) = (A - LC)e_x(t)$. On veut que $\lim_{0 \rightarrow \infty} e_x(t) = 0$, ceci le cas en calculant L telle que la matrice $(A - LC)$ soit de Hurwitz.

Intéressons-nous maintenant à la matrice de transfert reliant les diverses entrées à l'erreur d'estimation d'état. La transformée de Laplace de l'expression 2.2 s'écrit :

$$se(t)_x = (A - LC)e_x(s) + (F_x - LF_y)f(s) + D_x d(s)$$

où l'expression de l'erreur de l'estimation d'état est donnée par :

$$e(t)_x = [sI - (A - LC)]^{-1}(F_x - LF_y)f(s) + [sI - (A - LC)]^{-1}D_x d(s) \quad (3.7)$$

Notons que cette erreur est sensible aux défauts $f(s)$ et pourrait donc être utilisée pour générer un vecteur indicateur de défauts. Toutefois, l'état étant inconnu, cet écart ne peut être exploité directement. Considérons alors l'erreur d'estimation en sortie $e_y(s)$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= y(s) - \hat{y}(s) \\ &= Cx(s) + F_y f(s) - C\hat{x}(s) \\ &= Ce_x(s) + F_y f(s) \end{aligned}$$

En reportant dans $e_y(s)$ l'expression de $e_x(s)$ donnée par la relation 3.10, on obtient :

$$\begin{aligned} e(t) &= G_f(s)f(s) + G_d(s)d(s) \\ G_f(s) &= C[sI - (A - LC)]^{-1}(F_x - LF_y) + F_y \\ G_d(s) &= C[sI - (A - LC)]^{-1}D_x \end{aligned}$$

Soit $Q(s)$ une matrice de transfert stable est propre et générons un vecteur de résidus tel que : $r(s) = Q(s)e_y(s)$ Soit aussi $r(s) = Q(s)G_f(s)f(s) + Q(s)G_d(s)d(s)$ Dans ces conditions, si l'on peut trouver une matrice de paramétrisation $Q(s)$ telle que les deux relations suivantes soient vérifiées :

$$Q(s)G_f(s) \neq 0 \quad , \quad Q(s)G_d(s) = 0$$

on obtiendra un vecteur des résidus $r(s)$ insensibles aux perturbations $d(s)$ et sensibles aux défauts $f(s)$. Dans le cas où l'influence des perturbations est négligeable sur l'évolution des résidus, la

matrice $Q(s)$ peut être entièrement utilisée pour faciliter la localisation des défauts, on parle alors de structuration des résidus.

2.3 Génération des résidus par filtre de Kalman

Le filtre de Kalman est une approche dédiée à l'estimation des paramètres des systèmes et des variables d'état, dans le temps et à partir de mesures bruitées. Il permet d'estimer l'état du système en utilisant à la fois des informations préalables sur l'évolution de l'état et des mesures réelles. Cette approche peut prédire les paramètres et les variables d'état des systèmes ainsi que la réduction et la correction des erreurs. Le filtre de Kalman permet également de fournir à la fois l'erreur d'estimation moyenne et la matrice de covariance d'erreur.

Le filtre de Kalman utilise à la fois un modèle d'état et d'observation. Le modèle d'état décrit la dynamique du système évoluant dans le temps à travers la formulation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

où $w(t)$ et $v(t)$ sont des bruits blancs (Gaussien) avec des covariances $Q(t)$ et $R(t)$, respectivement. Supposons que la distribution initiale est Gaussienne, telle que :

$$E[x_0] = \hat{x}_0 \quad E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] = P_0$$

avec E représente l'espérance mathématique et P_0 est la matrice de covariance initiale de l'erreur.

Le fonctionnement du filtre de Kalman peut se diviser en trois étapes principaux comme bien illustré dans la figure 3.2

- La première étape permet d'initialiser le vecteur d'état et sa covariance,
- La deuxième étape permet de réaliser une prédiction de l'estimation selon le modèle du système. Pour ce faire, le filtre de Kalman reprend l'estimation précédente des paramètres et de l'erreur et prédit les nouveaux paramètres et la nouvelle erreur en fonction de la modélisation du système.
- La troisième étape va faire la mise à jour de cette prédiction grâce aux nouvelles me-

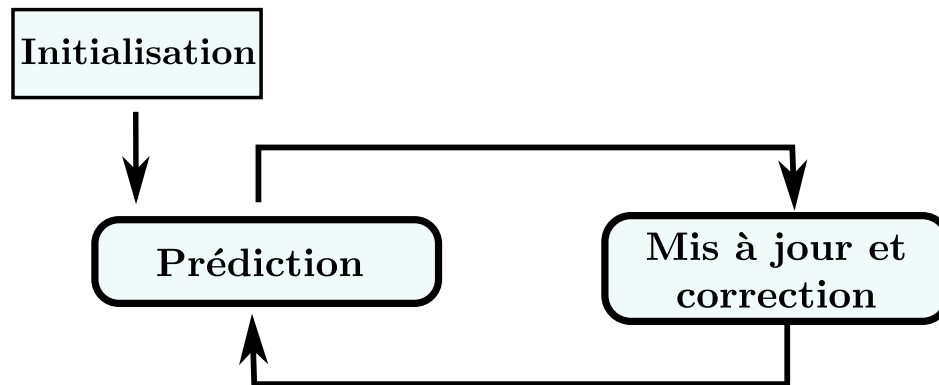


FIGURE 3.2 – Principe de fonctionnement de filtre de Kalman

sures. Ces mesures (par définition bruitées) vont permettre d'obtenir une estimation des paramètres et de l'erreur à partir de la prédiction faite. Si jamais le modèle comporte des erreurs, cette étape de mise à jour permettra de les rectifier.

La forme finale du filtre de Kalman peut-être écrite de la façon suivante :

1. Initialisation

$$E[x_0] = \hat{x}_0 \quad E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] = P_0$$

2. Prédiction

$$\begin{aligned} \hat{x}_t^+ &= A\hat{x}_t + Bu_t \\ P_t^+ &= AP_tA^T + Q \end{aligned}$$

3. Mise à jour et correction

$$\begin{aligned} L_{t+1} &= P_t^+ C_{t+1}^T (R_{t+1} + C_{t+1} P_t^+ C_{t+1}^T)^{-1} \\ P_{t+1} &= (I - L_{t+1} C_{t+1}) P_t^+ \\ \hat{x}_{t+1} &= \hat{x}_t^+ + L_{t+1} (y_{t+1} - C_{t+1} \hat{x}_t^+) \end{aligned}$$

Avec \hat{x}_t^+ est l'estimation d'état courante, \hat{x}_t est l'estimation d'état précédente, \hat{x}_{t+1} est l'estimation d'état suivante. La matrice d'état A fait la relation entre l'état précédant et l'état suivant, P_{t+1} est la covariance de l'erreur à l'instant $t + 1$, C_{t+1} est la matrice de mesure courante, R_{t+1} est la matrice de covariance du bruit à l'instant $t + 1$ et y_{t+1} est la mesure à

l'instant $t + 1$.

La figure 3.3, résume les étapes et le fonctionnement du filtre de Kalman pour l'estimation d'état d'un système dynamique.

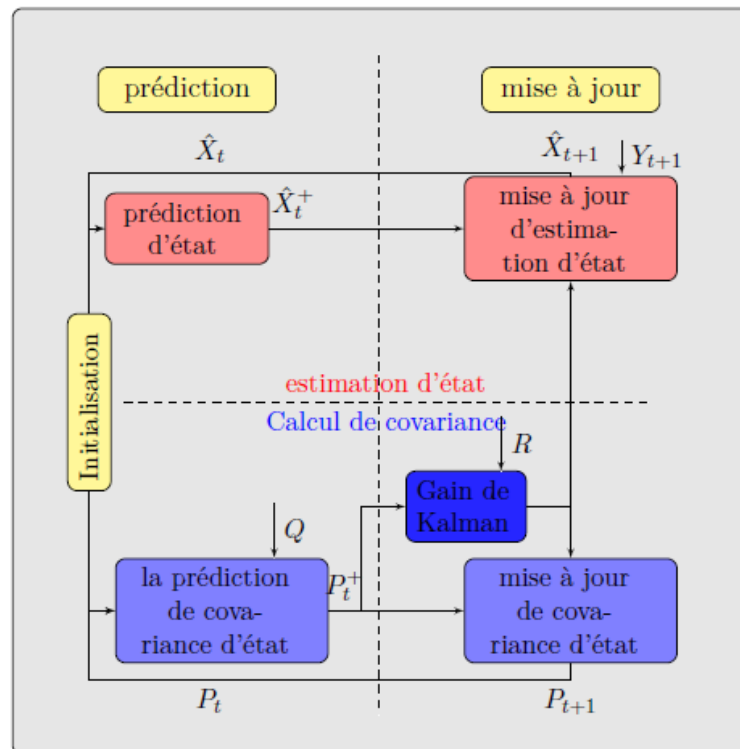


FIGURE 3.3 – Evolution de filtre de Kalman pour l'estimation d'état

Dans le cas de l'observateur de Luenberger ou de Kalman, il suffit de choisir L telle que la matrice $(A - LC)$ soit une matrice de Hurwitz, c'est-à-dire telle que ses valeurs propres soient toutes à parties réelles strictement négatives dans le cas continu ou possèdent un module strictement inférieur à 1 dans le cas discret. La différence entre les deux observateurs se trouve principalement dans la façon de calculer le gain de retour L :

1. Pour l'observateur de Luenberger, on utilise la technique de placement de pôles,
2. Pour le filtre de Kalman, on résout une équation de Riccati en minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation et de perturbation.

En absence de défaut, le vecteur de résidus $r(t)$ suit une distribution gaussienne $E[r(t)]$. L'apparition d'un défaut provoque un changement de la moyenne (qui devienne non nulle), de la

matrice

de covariance ou même rend le résidu non-gaussien. Cette modification peut être détectée en utilisant des algorithmes de détection de changement basés sur l'analyse des propriétés statistiques du signal résidu. La localisation de défauts avec le filtre de Kalman est plus délicate par rapport aux autres approches à base d'observateur de Luenberger.

2.4 Génération des résidus par observateur à entrée inconnue

Le principe de construction d'un observateur à entrées inconnues consiste à rendre l'erreur d'estimation indépendante des perturbations non mesurables. Considérons le système à surveiller, supposé correctement décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_x f(t) + D_x d(t) \\ y(t) = Cx(t) + F_y f(t) \end{cases}$$

Dans le cas où le vecteur des entrées inconnues agit également sur le vecteur de sortie, il est possible moyennant une transformation linéaire, de se ramener à la forme ci-dessous. La structure de l'observateur généralement adoptée est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Mz(t) + Nu(t) + Py(t) \\ \hat{x} = z(t) + L_y y(t) \end{cases} \quad (3.9)$$

Où M , N , P et L_y sont des matrices de dimensions appropriées, qui vont être déterminées de façon que l'estimé $\hat{x}(t)$ converge asymptotiquement vers l'état réel $x(t)$ du système, malgré l'influence des perturbations. L'erreur de construction d'état $e_x(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ s'écrit :

$$e_x(t) = z(t) - L_y y(t) - x(t) = z(t) - (I + L_y C)x(t) - L_y F_y f(t)$$

En posant $E = I + L_y C$ donc :

$$e_x(t) = z(t) - Ex(t) - L_y F_y f(t) \text{ soit aussi } z(t) = e_x(t) + Ex(t) + L_y F_y f(t)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) = & M e_x(t) + (ME + PC - EA)x(t) + (N - EB)u(t) + \\ & (ML_y F_y + PF_y - EF_x)f(t) - L_y F_y \dot{f}(t) - ED_x d(t) \end{aligned}$$

Si les conditions suivantes sont remplies :

$$\left\{ \begin{array}{l} M \text{ est Hurwitz} \\ ME + PC = EA \\ N = EB \\ ED_x = 0 \\ ML_y F_y + PF_y - EF_x \neq 0 \\ L_y F_y \neq 0 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Alors, la dynamique de l'erreur d'estimation devient indépendante de l'état, de l'entrée de commande et de l'entrée inconnue, elle n'est sensible qu'aux défauts :

$$\dot{e}_x(t) = M e_x(t) + (ML_y F_y + PF_y - EF_x)f(t) - L_y F_y \dot{f}(t) \quad (3.11)$$

La résolution du système 3.10 consiste, en premier lieu, à assurer la condition de découplage des entrées inconnues, c'est-à-dire à satisfaire $ED_x = 0$ or $E = I + L_y C$, d'où

$$(I + L_y C)D_x = 0 \Rightarrow L_y C D_x = -D_x \quad (3.12)$$

Il s'agit donc de déterminer la matrice L_y telle que la relation ci-dessus soit satisfaite. Si l'inverse généralisée de CD_x , notée $(CD_x)^+$, existe, L_y peut être calculée à l'aide de la relation suivante :

$$L_y = -D_x(CD_x)^+ \quad \text{avec} \quad (CD_x)^+ = [(CD_x)^T(CD_x)]^{-1}(CD_x)^T$$

La matrice L_y n'existe que si la matrice $(CD_x)^T(CD_x)$ est inversible. Cette matrice étant de dimension $n_d \times n_d$, elle n'est inversible que si $\text{Rang}(CD_x) = n_d$, où n_d représente le nombre d'entrée inconnues. Finalement, le découplage n'est possible que si le rang de la matrice (CD_x) est égal au nombre d'entrées à découpler. La synthèse de l'observateur peut être résumée comme suit :

1. Vérifier que le $\text{Rang}(CD_x) = n_d$, puis calculer $L_y = -D_x[(CD_x)^T(CD_x)]^{-1}(CD_x)^T$
2. A partir de L_y calculer $E = I + L_y C$
3. A partir de E calculer $N = EB$
4. Imposer que M soit une matrice de Hurwitz. On peut à cet effet choisir M une matrice diagonale faisant apparaître les valeurs propres désirées pour l'observateur.
5. Calculer la matrice P telle que : $PC = EA - ME$

Calculons à présent la matrice de transfert reliant les défauts à l'erreur d'estimation en sortie. Posons $F = ML_y F_y + PF_y - EF_x$ et $F' = -L_y F_y$. La transformation de Laplace de l'expression 3.12 s'écrit alors :

$$s e_x(s) = M e_x(s) + F f(s) + F' s f(s) \Rightarrow e_x(s) = (SI - M)^{-1} (F + s F') f(s)$$

L'erreur d'estimation en sortie s'écrit :

$$s e_y(s) = \hat{y}(s) - y(s) = C(\hat{x}(s) - x(s)) - F_y f(s) = C e_x(s) - F_y f(s)$$

En remplaçant $e_x(s)$ par son expression :

$$\begin{cases} e_y(s) = [C(sI - K)^{-1}(F + sF') - F_y]f(s) \\ F = ML_yF_y + PF_y - EF_x \\ F' = -L_yF_y \end{cases}$$

Soit $Q(s)$ une matrice de transfert stable et propre et générons un vecteur de résidus $r(s)$ tel que :

$$\begin{cases} r(s) = Q(s)e_y(s) = Q(s)G_f(s)f(s) \\ F = C(sI - M)^{-1}(F + sF') - F_y \end{cases}$$

La matrice de paramétrisation $Q(s)$ permet de structurer les résidus afin de faciliter la localisation des défauts.

2.5 Structuration et évaluation des résidus générés à base d'observateurs

Il est important d'obtenir une structure du résidu permettant son évaluation. Les résidus doivent être produits, de manière que pour chaque défaut un ou un ensemble de résidus soient affectés. Cependant, même si l'apparition de défauts multiples est peu probables, les résidus doivent être capables de situer chacun des défauts arrivant simultanément, en occurrence, il devrait être garanti que le recouvrement des effets résultants de la combinaison des défauts ne mène pas à une décision fautive, par exemple détection manquée d'un défaut ou mauvaise isolation du défaut. Il existe plusieurs manières de définir les résidus structurés afin de parvenir à une évaluation correcte du résidu. Les résidus structurés sont conçus de manière à être chacun affecté par un sous ensemble de défaut et robuste (non affecté) par rapport aux défauts restantes. Ainsi, lorsqu'une défaillance apparaît, seul un sous ensemble de résidus réagit. Le résidu est dit structuré par rapport à un vecteur de défaillances f_1 s'il n'est affecté que par les défaillances f_1 s'il est robuste aux autres. Dans la littérature, on distingue trois structures de génération de résidus à base d'observateur ou chacune est définie par un schéma particulier.

2.5.1 Structure d'observateurs simplifiés

Dans cette structure le banc est constitué d'un seul observateur. Il est synthétisé de façon à n'être sensible qu'à un groupe de défauts. Dans le cas où un des défauts auquel il est sensible apparaît

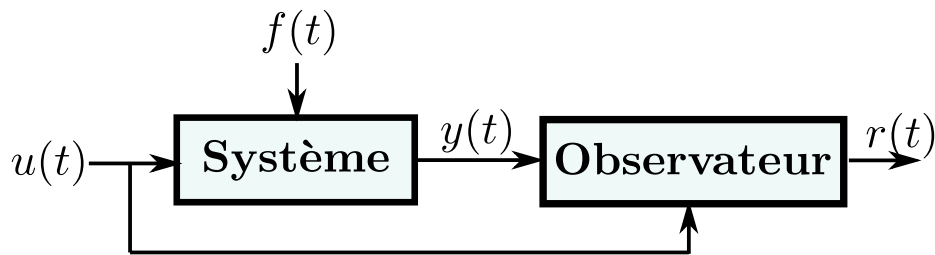


FIGURE 3.4 – Structure d'observateurs simplifiés

alors les estimations seront faussées. Dans le cas contraire, elles seront exactes. la figure 3.4 présente une structure simplifié d'observateur d'état.

2.5.2 Structure d'observateurs dédiés (DOS)

Dans ce type de structure (figure 3.5), il est question de construire autant d'observateurs que de défauts à détecter, chacun d'entre eux génère un résidu insensible à tous les défauts sauf un. Ainsi, l'observateur recevant une mesure défaillante fournit une mauvaise estimation des variables estimées, tandis que les estimations des autres observateurs convergent vers les mesures des sorties correspondantes sauf sur la sortie erronée. Ce schéma reste valable même dans le cas de plusieurs défauts simultanés.

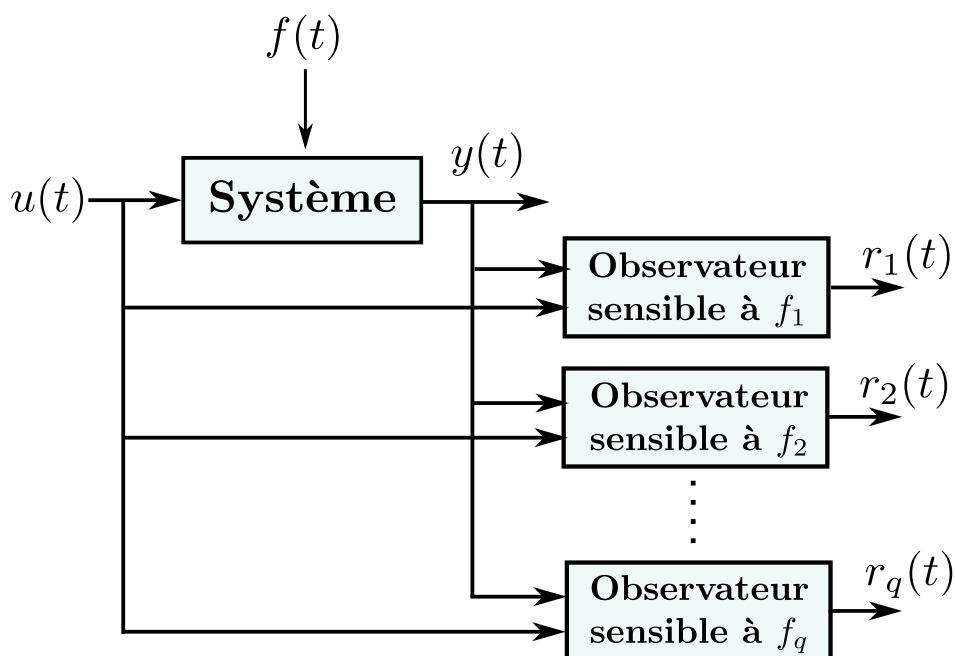


FIGURE 3.5 – Structure d'observateurs dédiés (DOS)

Mais, si cette structure donne parfois de bons résultats sa conception reste très limitée car elle ne

permet pas de s'affranchir des entrées inconnues et des bruits.

2.5.3 Structure d'observateurs généralisés (GOS)

Dans ce genre de structure (figure 3.5), il s'agit de synthétiser un certain nombre d'observateurs où chacun d'entre eux étant insensible à un seul défaut. Si un défaut apparaît alors, toutes les estimations d'états seront erronées sauf celles issues de l'observateur insensible à ce seul défaut. Ce schéma offre plus de degrés de liberté pour la conception de l'observateur et permet d'augmenter la robustesse. Cependant, en plus de ne pas être généralement capables de résoudre les problèmes de localisation des défauts, La problématique de cette approche reste dans les interactions entre les sous-systèmes. En effet, si ces interactions sont faibles (voire nulle), un défaut n'affectera que l'estimation de l'observateur local correspondant. Il est alors possible de localiser le composant défaillant. En revanche, si les interactions sont grandes, un défaut d'un des composants se propagera aux observateurs des autres composants.

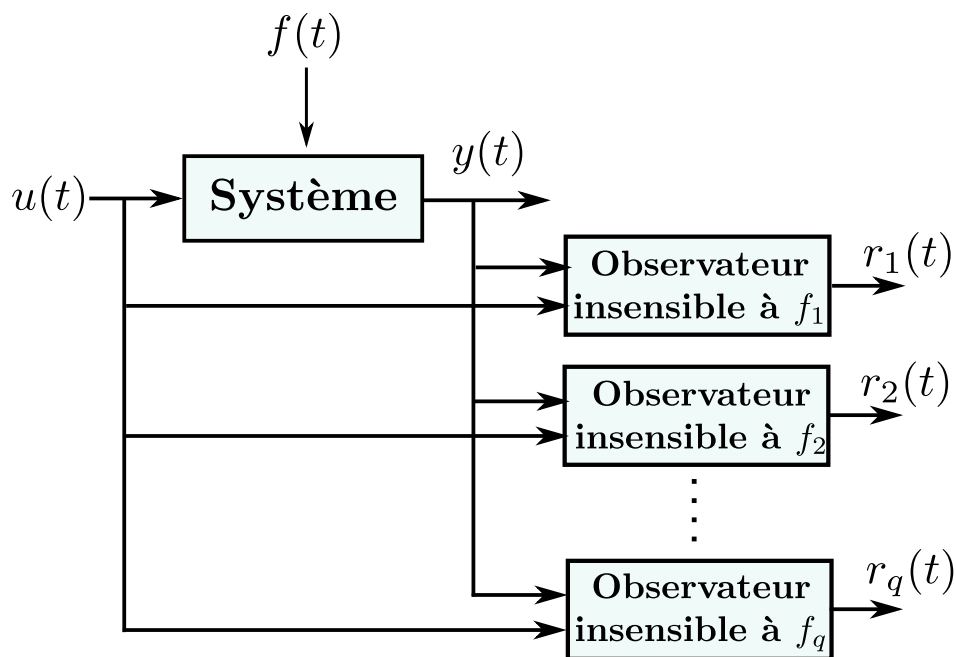


FIGURE 3.6 – Structure d'observateurs généralisés (GOS)