CHAPITRE 4

GÉNÉRATION DES RÉSIDUS PAR L'APPROCHE ESPACE DE PARITÉ

Sommaire

1 Introduction

L'idée de base est de vérifier la cohérence entre les relations mathématiques du système et les mesures (relations de redondance analytique). Supposons en effet, qu'une mesure puisse s'exprimer en fonction des autres par une relation connue. Pour cela,

- Si le résidu est nul, les mesures sont cohérentes par rapport au modèle, le système est déclaré sans défaut.
- Un résidu non nul indique l'apparition d'un défaut.

L'approche par espace de parité suppose donc la connaissance d'un modèle mathématique du système. Il existe deux types de relation de redondance analytique :

1. La redondance statique : ensemble de relations algébriques entre les mesures fournies par les différents capteurs.
2. La redondance dynamique : ensemble d'équations différentielles ou récurrentes entre les sorties des capteurs et les entrées du système.

2 Redondance statique

Dans un système physique, les variables mesurées peuvent être liées par un ensemble de relations algébriques. L'objet de la redondance statique est de rechercher les relations existantes entre les mesures fournies par les différents capteurs. Cette recherche est réalisée à l'aide d'un modèle mathématique du système de mesure qui s'écrit, généralement, de la façon suivante :

$$y(t) = Cx(t) + f(t) \tag{4.1}$$

Avce $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f(t) \in \mathbb{R}^p$ sont des paramètres déjà définis.

Les équations de redondance sont obtenues par élimination de l'inconnue $x(t)$. Ceci n'est possible que si la matrice est de rang plein colonne et si le nombre de mesures est supérieur à la dimension de l'inconnue. Dans ces conditions, il est possible de trouver une matrice V, dite de parité, orthogonale à C (c'est à dire telle que $VC = 0$), permettant de trouver des relations indépendantes liant les mesures entre elles. En effet, en multipliant les deux membres de la relation 4.1 par une matrice V telle que $VC = 0$, on obtient :

$$r(t) = Vy(t) = VCx(t) + Vf(t) = Vf't) = \sum_{i=1}^{p} V_i fi(t) \tag{4.2}$$

où $r(t)$ est le vecteur de parité de dimension $p-n$ et $V_i(t)$ le vecteur colonne numéro i de la matrice V . En l'absence de défaut, le vecteur de parité est nul (aux bruits de mesure près). En présence d'un défaut $f_i(t)$, le vecteur de parité s'oriente dans la direction V_i correspondant au vecteur défectueux. Les lignes de V forment une base de l'espace de parité de dimension $n-p$. V est une matrice de projection dans l'espace de parité.

Exemple 1. *Soit l'équation de mesure suivante :*

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix}$$

On a : $p = 3, C = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ et $rang(C) = 1$. Donc, l'espace de parité est de dimension $p - rang(C) = 2$. Une matrice V peut être choisie en cherchant deux vecteurs orthogonaux à C. Parmi les solutions existantes, on choisit :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Donc, on obtient les deux résidus indépendants :

$$\begin{aligned} r_1(k) &= y_1(k) - y_2(k) \\ r_2(k) &= y_2(k) - y_3(k) \end{aligned}$$

Le vecteur de résidus $r(k)$ peut s'écrire encore sous la forme :

$$r(k) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix}$$

Une façon simple de déterminer une matrice de parité V est de réarranger l'équation 4.1. En ab-sence de défaut $(f(t) = 0)$, la relation 4.1 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$y'(t) = C'x'(t), \quad \text{avec :} \quad y'(t) = r(k) = \begin{bmatrix} y_n(t) \\ y_{p-n}(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} C' = \begin{bmatrix} C_n \\ C_{p-n} \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

La matrice carrée C_n de la relation 4.3 est construite à partir de n lignes indépendantes de C, ceci afin d'assurer l'existence de son inverse. La matrice C_{p-n} est obtenue à l'aide de $p - n$ lignes restantes de C. On a alors :

$$y_{p-n}(t) = C_{p-n}C_n^{-1}y_n \tag{4.4}$$

Cette relation est indépendante des inconnues et permet de vérifier la cohérence des mesures. La relation 4.4 peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} -C_{p-n}C_n^{-1} & I_{p-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n(t) \\ y_{p-n}(t) \end{bmatrix} = 0 \tag{4.5}$$

La matrice de parité $\begin{bmatrix} -C_{p-n}C_n^{-1} & I_{p-n} \end{bmatrix}$ de dimension $(p-n, p)$ est orthogonale à C' c-à-d $V'C' = 0$.

Exemple 2. *Soit l'équation de mesure suivante :*

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Donc on a $rang(C) = 2$ *alors :* $C_n = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *et* $C_{p-n} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. *Les relations de redondances peuvent s'exprimer comme suite :* $\begin{bmatrix} -C_{p-n}C_n^{-1} & I_{p-n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ *et* $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{bmatrix}$

Donc les équations de redondance statique deviennent : $\begin{cases} -y_1(t) + 3y_2(t) - 4y_3(t) = 0 \\ 3y_1(t) + 3y_2(t) - 4y_3(t) = 0 \end{cases}$

Notons que la nécessité d'avoir un nombre de mesures supérieur à la dimension de l'état limite l'intérêt pratique de la redondance statique. Avec la redondance dynamique cette contrainte disparaît, car l'on prend en compte l'évolution des mesures et des entrées au cours du temps, on parle alors aussi de redondance temporelle ou dynamique.

3 La redondance dynamique

La redondance dynamique est une généralisation de la redondance statique dans le cas où l'on utilise un modèle dynamique du système étudié. L'objectif est de rechercher des relations entre les mesures fournies par les différents capteurs et les entrées du système à différents instants. Considérons à cet effet un système supposé correctement représenté par le modèle d'état discret :

$$\begin{cases} x(k+1) = F(x) + Gu(k) \\ y(k+1) = Cx(k) \\ x(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}^m, y(k) \in \mathbb{R}^p \end{cases} \tag{4.6}$$

On souhaite construire un générateur de résidus capable de détecter et de localiser un défaut de capteur ou d'actionneur.

La succession des états, depuis un état initial $x(k)$ jusqu'à un état final quelconque $x(k+h)$ peut s'exprimer uniquement en fonction de l'état à l'instant k et des entrées aux instants k à $k+h-1$. En effet,on a successivement :

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Fx(k) + Gu(k) \\
x(k+2) &= Fx(k+1) + Gu(k+1) = F^2x(k) + FGu(k) + Gu(k+1) \\
x(k+3) &= Fx(k+2) + Gu(k+2) = F^3x(k) + F^2Gu(k) + FGu(k+1) + Gu(k+2) \\
&\vdots \\
x(k+h) &= F^hx(k) + \sum_{i=1}^{h} F^{h-i}Gu(k+i-1)
\end{aligned}
$$

Sur un horizon d'observation $[k,\ k+h]$, les sorties aux différents instants k à $k+h$ s'écrivent alors :

$$
\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CF \\ CF^2 \\ \vdots \\ CF^h \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CG & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CFG & CG & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CF^{h-1}G & CF^{h-2}G & \cdots & CG & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ \vdots \\ u(k+h) \end{bmatrix} \tag{4.7}
$$

Posons que :

$$
y(k,h) = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ y(k+h) \end{bmatrix}, u(k,h) = \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ \vdots \\ u(k+h) \end{bmatrix}, \mathscr{C} = \begin{bmatrix} C \\ CF \\ CF^2 \\ \vdots \\ CF^h \end{bmatrix},
$$

$$
\mathscr{G}(h) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CG & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CFG & CG & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CF^{h-1}G & CF^{h-2}G & \cdots & CG & 0 \end{bmatrix}
$$

La relation 4.7, s'écrit donc, de manière plus condensée :

$$
y(h,k) = \mathscr{C}(h)x(k) + \mathscr{G}(h)u(k,h) \tag{4.8}
$$

On est alors ramené au cas de la redondance statique. En multipliant les deux membres de la relation 4.8 par une matrice de parité V orthogonale à $\mathscr{C}(h)$, on obtient le vecteur de parité généralisé :

$$r(k,h) = V(y(k,h) - \mathscr{G}(h)u(k,h))$$

qui ne dépend que des entrées et des sorties du système. En l'absence de défaut, le vecteur de parité est nul (au bruit de mesure près), et différent de zéro si non. On peut donc l'utiliser comme résidus dans le but de détecter et de localiser, par exemple, un défaut de capteur ou actionneur. Toutefois, les relations ainsi obtenues ne sont pas toutes nécessairement indépendantes, surtout si la fenêtre d'observation est importante. Les techniques d'auto-redondance et d'inter-redondance permettent alors de contourner cette difficulté.

3.1 Auto-redondance

Les relations d'auto-redondance sont obtenues en écrivant la relation 4.8 pour chacun des capteurs. On ne conserve alors, pour un capteur donné, que les relations indépendantes permettant d'exprimer une partie de l'état. Pour obtenir de la redondance, une relation supplémentaire est introduite, permettant de ne faire apparaître que les mesures aux divers instants, issues du capteur considéré et les entrées. Par exemple, pour le capteur numéro j la relation 4.7 s'écrit :

$$\begin{bmatrix} y_j(k) \\ y_j(k+1) \\ y_j(k+2) \\ \vdots \\ y_j(k+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_j \\ C_jF \\ C_jF^2 \\ \vdots \\ C_jF^h \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_jG & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_jFG & C_jG & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_jF^{h-1}G & C_jF^{h-2}G & \cdots & C_jG & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ \vdots \\ u(k+h) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

où C_j représente le vecteur ligne numéro j de la matrice C. Cette relation s'écrit sous forme plus condensée :

$$y_j(k,h) = \mathscr{C}_j(h)x(k) + \mathscr{G}_j(h)u(k,h) \quad (4.10)$$

Soit n_j le rang maximum de la matrice $C_j(h)$ (la matrice $C_j(h)$ comporte $h+1$ lignes). Dans ces conditions, il est possible d'exprimer les composantes du vecteur d'état à l'aide des n_j mesures $y_j(k)$ à $y_j(k+n_j-1)$.

La matrice de rang maximum $C_j(n_j-1)$ est appelée matrice d'observabilité réduite. La relation 4.10 s'écrit alors :

$$y_j(k,n_j-1) = \mathscr{C}_j(n_j-1)x(k) + \mathscr{G}_j(n_j-1)u(k,n_j-1) \tag{4.11}$$

Remarquons que si le système est complètement observable par la sortie numéro j alors le rang de la matrice d'observabilité réduite est de n. Afin d'obtenir de la redondance, on ajoute une ligne supplémentaire à $C_j(n_j-1)$ et la relation 4.11 devient donc :

$$y_j(k,n_j) = \mathscr{C}_j(n_j)x(k) + \mathscr{G}_j(n_j)u(k,n_j) \tag{4.12}$$

L'équation d'auto-redondance est alors obtenue en éliminant l'état de la relation 4.12. Pour cela, on cherche un vecteur ligne V_j tel que :

$$V_jC_j(n_j) = 0$$

L'équation d'auto-redondance s'écrit alors :

$$r_j(k) = V_j\left[\begin{bmatrix} y_j(k) \\ y_j(k+1) \\ y_j(k+2) \\ \vdots \\ y_j(k+n_j) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_jG & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C_jFG & C_jG & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_jF^{h-1}G & C_jF^{h-2}G & \cdots & C_jG & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ \vdots \\ u(k+n_j) \end{bmatrix}\right] \tag{4.13}$$

En absence de défaut, la grandeur $r_j(k)$ est réduite aux bruits des mesures et des structures. L'apparition d'un défaut se traduit par une évolution de $r_j(k)$; ce qui permettra la détection de l'anomalie.

3.2 Inter-redondance

Les relations d'inter-redondances permettent de relier les mesures provenant de plusieurs capteurs. On les obtient en considérant les $n_j(j = 1 \text{ à } q)$ relations indépendantes obtenues à partir de 4.11 :

$$\begin{bmatrix} y_1(k,n_1-1) \\ \vdots \\ y_j(k,n_j-1) \\ \vdots \\ y_q(k,n_q-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathscr{C}_1(k,n_1-1) \\ \vdots \\ \mathscr{C}_j(k,n_j-1) \\ \vdots \\ \mathscr{C}_q(k,n_q-1) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1(k,n_1-1) \\ \vdots \\ \mathscr{G}_j(k,n_j-1) \\ \vdots \\ \mathscr{G}_q(k,n_q-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u((k,n_1-1) \\ \vdots \\ u(k,n_j-1)) \\ \vdots \\ u(k,n_q-1) \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Le système 4.14 est composé de N relations indépendantes, avec $N = \sum_{j=1}^{p} n_j$. Le vecteur d'état étant de dimension n, il existe $N-n$ relations d'inter-redondance indépendantes. Les équations d'inter-redondance sont obtenues par élimination du vecteur d'état. Cela revient à rechercher une matrice V telle que :

$$v \begin{bmatrix} \mathscr{C}_1(k,n_1-1) \\ \vdots \\ \mathscr{C}_j(k,n_j-1) \\ \vdots \\ \mathscr{C}_q(k,n_q-1) \end{bmatrix} = 0$$

Les relations d'inter-redondance s'écrivent alors :

$$r(k) = V \left[\begin{bmatrix} y_1(k,n_1-1) \\ \vdots \\ y_j(k,n_j-1) \\ \vdots \\ y_q(k,n_q-1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathscr{G}_1(k,n_1-1) \\ \vdots \\ \mathscr{G}_j(k,n_j-1) \\ \vdots \\ \mathscr{G}_q(k,n_q-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u((k,n_1-1) \\ \vdots \\ u(k,n_j-1)) \\ \vdots \\ u(k,n_q-1) \end{bmatrix} \right] \tag{4.15}$$