TD N°1

Exercice

Considérant un moteur à courant continu ce qu'il est un système électromécanique. Donc, il se compose d'une partie mécanique et une partie électrique comme illustré dans la figure 1.

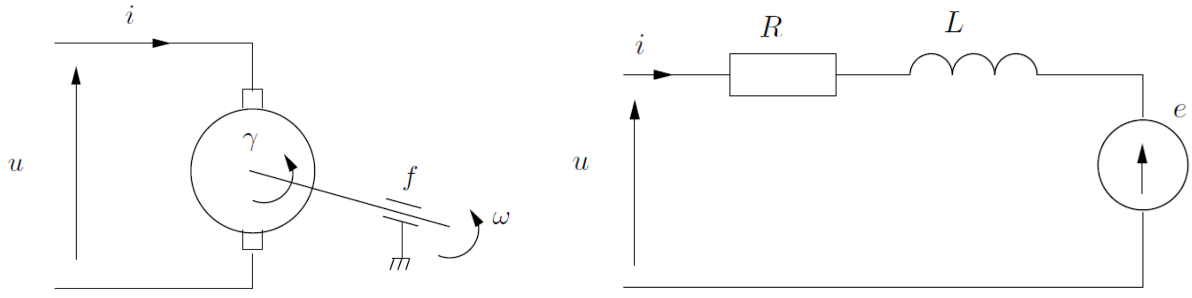


Figure.1. Schéma équivalant d'un moteur à courant continu

Afin de décrire le modèle mathématique du moteur à courant continu, on demande de :

1. Donner l'équation électrique et mécanique en tenant compte que :
   a. Le couple moteur $\gamma = K\,i(t)$
   b. La force électromotrice $e = K\,\omega(t)$
2. Donner l'équation différentielle qui décrit au dynamique du vitesse $\omega(t)$ et déduire la fonction de transfère du système en boucle ouvert.
3. Déduire la représentation d'état du système pour :
   a. $x = \begin{bmatrix} \omega(t) & i(t) \end{bmatrix}^T$
   b. $x = \begin{bmatrix} \omega(t) & \dfrac{d}{dt}\omega(t) \end{bmatrix}^T$
   c. Tenant compte la position angulaire $\theta(t)$, $x = \begin{bmatrix} \theta(t) & \omega(t) & i(t) \end{bmatrix}^T$

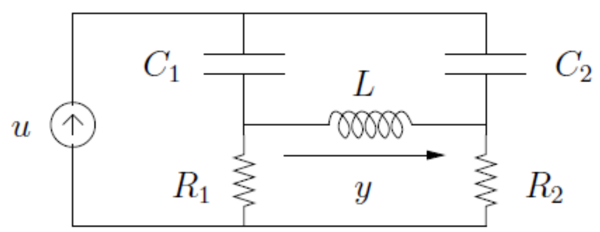
Exercice 02

Soit un circuit électrique RLC série, dans lequel u(t) (entrée) est la tension au générateur et y(t) (sortie) est la tension aux bornes de la capacité.

a) Écrire l'équation entrée-sortie du système
b) Tracer un bloc-diagramme du système.
c) Donner la représentation d'état correspondante.

Exercice 03

Construisez un bloc-diagramme et une représentation d'état pour le circuit électrique suivant, dont l'entrée est la source de potentiel u et la sortie est la différence de potentiel y aux bornes de la self.



Solution

Exercice N°1 :

1-

L'équation mécanique : $$\gamma - f\omega = J\frac{d\omega}{dt},$$

Avec $\gamma = K\,i(t)$ donc :

$$Ki = f\omega + J\frac{d\omega}{dt}. \tag{1}$$

L'équation électrique :

$$Ri + L\frac{di}{dt} + e = u,$$

Avec : $e = K\,\omega(t)$ donc :

$$Ri + L\frac{di}{dt} + K\omega = u \tag{2}$$

2- L'équation différentielle du système :

Par l'application du dérivé sur (1)

$$K\frac{di}{dt} = f\frac{d\omega}{dt} + J\frac{d^2\omega}{dt^2}. \tag{3}$$

En combinant (1) et (3) avec (2) :

$$\frac{R}{K}\left(f\omega + J\frac{d\omega}{dt}\right) + \frac{L}{K}\left(f\frac{d\omega}{dt} + J\frac{d^2\omega}{dt^2}\right) + K\,\omega = u.$$

Donc l'équation différentielle du système devient :

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{RJ+Lf}{LJ}\frac{d\omega}{dt} + \frac{Rf+K^2}{LJ}\,\omega = \frac{K}{LJ}u. \tag{4}$$

Donc la fonction de transfert du système est :

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K}{LJ}}{s^2 + \frac{RJ+Lf}{LJ}\,s + \frac{Rf+K^2}{LJ}}.$$

3- La représentation d'état du système

a. Le cas : $x = \left[\omega(t) \quad i(t)\right]^T$

Pour $x_1 = \omega(t)$ et $x_2 = i(t)$ l'équation (1) et (2) peuvent s'écrire comme suite :

$$Rx_2 + L\frac{dx_2}{dt} + K\,x_1 = u,$$
$$K\,x_2 - fx_1 = J\frac{dx_1}{dt}.$$

On en déduit la représentation d'état :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u,$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

b. Le cas : $x = \left[\omega(t) \quad \frac{d}{dt}\omega(t) \right]^T$

Pour $x_1 = \omega(t)$ et $x_2 = \frac{d}{dt}\omega(t)$, l'équation (4) peut s'écrire comme suite :

$$\frac{dx_2}{dt} + \frac{RJ + Lf}{LJ} x_2 + \frac{Rf + K^2}{LJ} x_1 = \frac{K}{LJ} u.$$

On en déduit la nouvelle représentation d'état :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Rf+K^2}{LJ} & -\frac{RJ+Lf}{LJ} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{LJ} \end{pmatrix} u,$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

c. Le cas : $x = \left[\theta(t) \quad \omega(t) \quad i(t) \right]^T$

Pour $x_1 = \theta(t)$, $x_2 = \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$ et $x_3 = i(t)$ la représentation d'état du système dans ce cas peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f}{J} & \frac{K}{J} \\ 0 & -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u,$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$