المحور الثاني: التوزيعات الاحتمالية المتصلة

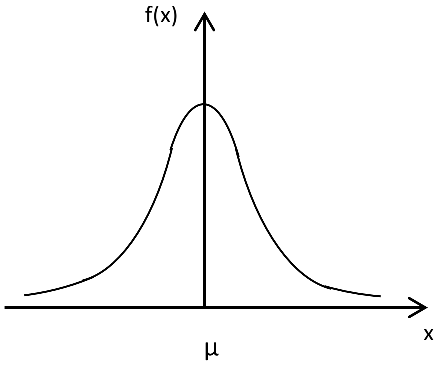
1 التوزيع الطبيعي أو توزيع لابلاس قوس D. Normale ou D. de Laplace -Gausse

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية شائعة الاستخدام لما له من خصائص تنطبق على نسبة كبيرة من الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية. فلو اخترنا بالصدفة مئة أو ألفا من المارين في شارع ما وقسنا أطوالهم لوجدنا نسبة كبيرة منها قريبة من متوسط ما، ونسبة قليلة من طوال القامة ونسبة مقاربة لها من قصار القامة. ومثل هذا بالنسبة للأوزان. ولو مثلنا هذه البيانات في معلم متعامد متجانس لكان المنحنى الذي يمثل النسبة، أو ما يمكن أن نسميه الاحتمال، ذا شكل جرسي متماثل حول المتوسط وهي صفات التوزيع الطبيعي (الشكل9) :

1-1- صيغة القانون

تكتب دالة الكثافة لمنحنى للتوزيع الطبيعي كما يلي:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\qquad -\infty<x<\infty}$$



رسم**1** **الشكل العام للتوزيع الطبيعي**

حيث μ و σ هما على التوالي التوقع والانحراف المعياري. ونكتب $X \sim N(\mu, \sigma)$

دالة التوزيع (الدالة التجميعية) للتوزيع الطبيعي تكتب كما يلي:

$$F(x)=P(X\le x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-1/2\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2}dv$$

1-2- **المتغيرة المركزية أو المعيارية:** تستخدم المتغيرة المعيارية $Z=(X-\mu)/\sigma$ لتكوين الجداول الإحصائية للاحتمالات:

$F(z)=P(Z\le z)$، أو $P(0\le Z\le z)$

حيث تسمح بكتابة الدالة f وF بدلالة مجهول واحد z بدلا من 3 مجاهيل x وμ و σ وذلك كما يلي:

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\qquad -\infty<z<\infty}$$

$$F(z)=P(Z\le z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}e^{\frac{-u^2}{2}}du$$

بالنظر إلى العلاقة الخطية بين المتغيرتين x و z، فإن z تتبع نفس توزيع x أي التوزيع الطبيعي. ونعلم أن:

$$V(Z) = 1 \; E(Z) = 0$$

3-1- خصائص التوزيع الطبيعي:

من خصائص التوزيع الطبيعي أنه يعتبر معتدلا لا مدببا ولا مفلطحا، حيث يعتبر معامل التفلطح للتوزيع الطبيعي معيارا لاعتدال المنحنيات.

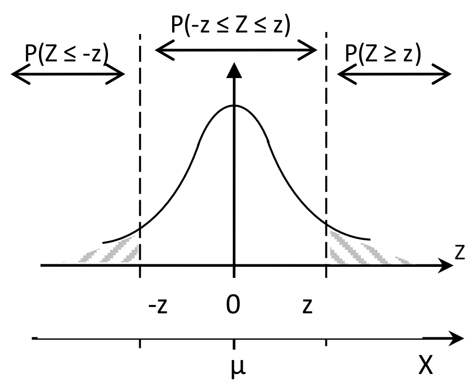
من خصائص التوزيع الطبيعي أيضا أنه متماثل حول القيمة المتوقعة.

تماثل منحنى x حول المتوسط (أنظر الشكل 3) يعني تماثل لمنحنى z حول 0، مما يعني أنه من أجل أي قيمة للمتغيرة المعيارية

: $z > 0$

$$P(0 \le Z \le z) = P(-z \le Z \le 0) = P(-z \le Z \le z) / 2$$

$$P(Z \le -z) = 1 - P(Z \le z) = P(Z \ge z)$$



رسم بياني يمثل استخدام تماثل الوزيع الطبيعي في حساب الاحتمالات

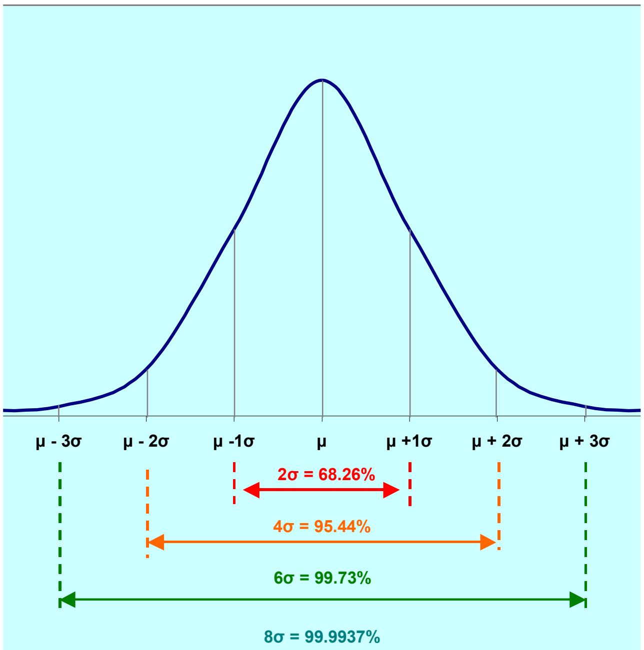
و لقد تم باستخدام المتغيرة المعيارية Z حساب الاحتمالات (المساحات) تحت المنحنى ومنها خاصة:

$$P(-\sigma \le X \le \sigma) = P(-\sigma \le Z \le \sigma) = 0.6837,$$

$$P(-2\,\sigma \le X \le 2\,\sigma) = P(-2 \le Z \le 2) = 0.9544,$$

$$P(-3\sigma \le X \le 3\sigma) = P(-3 \le Z \le 3) = 0.9973.$$

هذه القيم وغيرها متوفرة في الجداول الإحصائية التي نجدها في الكثير من المراجع، كما يمكن حسابها باستخدام الحاسوب.



المساحات الأساسية تحت منحنى التوزيع الطبيعي

مثال: باستعمال الجداول الاحصائية 1) أحسب : $P(0 \le Z \le z)$ حيث $z = 1, 2, 3$

2) أحسب $P(-z \le Z \le z)$ من أجل نفس القيم ل z.

1) 0.3413 ، 0.47725 ، 0.49865

2) 0.6827، 0.9545، 0.9973

العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الثنائي

في حالة n كبيرة وp غير قريب من 0 يمكن اعتبار التوزيع الثنائي كتقريب جيد للتوزيع الطبيعي. ويعطي التوزيعان نتائج أكثر تقاربا كلما كانت n كبيرة أكثر. ونكتب:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(a \le z \le b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2} dz, \qquad z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$$

ويسرع تقارب التوزيع الثنائي من التوزيع الطبيعي كون p قريب من 0.5.

قاعدة التقريب:

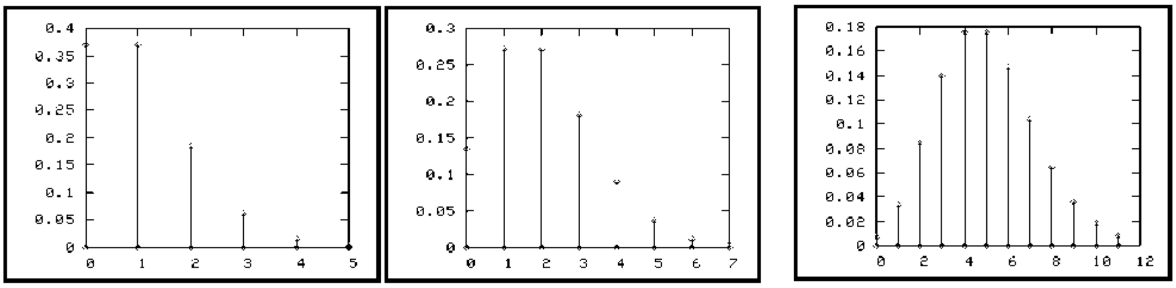
- **عموما نعتبر التقريب إلى التوزيع الثنائي ملائما عندما np و nq كلاهما أكبر من 5.**
- عدد من الاحصائيين يعتمد قاعدة أخرى هي أن يكون أحد الشرطين التاليين متوفرين:

$$npq \ge 9 \qquad ou \qquad n \ge 20, np \ge 10, nq \ge 10$$

العلاقة بين التوزيع الطبيعي وتوزيع بواسون

عندما ∞ ←λ فإن التوزيعين الطبيعي وبواسون يعطيان نتائج متطابقة . ونكتب:

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} P\left(a \le \frac{x - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$



رسم 2 سلوك توزيع بواسون عند زيادة المعلمة من 1 إلى 2 إلى 5 (من اليسار إلى اليمين)

قاعدة التقريب:

- **عموما نعتبر أن التقريب ملائم من التوزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي عندما λ ≥10**
- **فيما يعتمد عدد من الإحصائيين[1] كشرط للتقريب λ≥15**

ويمكن أن تتقارب نتائج التوزيعات الثلاث معا: الثنائي، بواسون والطبيعي حسب الشروط المذكورة (أنظر حل التطبيق أدناه.)

[1]

2- التوزيع الأسي Distribution exponentielle

عادة ما يستخدم التوزيع الأسي في مسائل متعلقة بقياس الزمن. من ذلك مدة خدمة شباك البريد، مدة مكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة...في العلوم الدقيقة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة الذرات المشعة (atomes radioactives) قبل أن تتفكك، حيث يعبر الوسيط عن اللحظة التي يبقى فيها نصف المجتمع الأصلي.

من الضروري فهم الآتي: كقاعدة عامة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة ظاهرة ما إذا كان لها متوسط ثابت $1/\lambda$ وكانت هذه الظاهرة لا تخضع للتقادم (vieillissement)أي أن مدة حياة الظاهرة بعد لحظة ما T لا تتبع اللحظة T؛ أي لا تتأثر بالمدة التي دامتها الظاهرة من قبل. مثلا قد نستبعد استخدام التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة آلة عاملة قبل تعطلها لأن احتمال تعطلها في لحظة ليس مستقلا عن المدة التي عملتها الآلة من قبل، كذلك الأمر بالنسبة لمدة حياة الإنسان.

عمليا، نتحقق من دقة تمثيل التوزيع الأسي _أو أي توزيع آخر_ لظاهرة ما من خلال تقنيات اختبارات الفروض، وبالتحديد اختبار التجانس و التعديل.

نشير أخيرا إلى أن للتوزيع الأسي علاقة بالتوزيع بواسون، فإذا كان وقوع أحداث ما يتبع هذا التوزيع، فإن المدة بين وقوع حدثين تتبع التوزيع الأسي؛ كمثال على ذلك، إذا كان وصول الزبائن إلى مركز خدمة ما يتبع التوزيع بواسون فإن المدة الزمنية بين وصول زبون "أ" والزبون الموالي تتبع التوزيع الأسي. تتبين هذه العلاقة عند استنتاج صيغة القانون الأسي.

2-1- صيغة القانون الأسي أو دالة الكثافة و الدالة التجميعية للتوزيع.

بينت دراسة أن عدد حوادث العمل في معمل معين تتبع توزيع بواسون بمعدل λ حادث يوميا.

أوجد احتمال أن يسجل حادث على الأقل (حادث أو أكثر) في مدة t يوم.

$$\mathbf{P(X \geq 1) = 1 - e - \lambda t} \quad \mathrm{P(X \geq 1) = 1 - P(0)}$$
$$= 1 - [\lambda 0t * e - \lambda t/0!] \quad =>$$

لنرمز ب T للزمن (باليوم) بين حادثين إذن سيكون لدينا f(t) دالة الكثافة للزمن بين حادثين، و $F(t) = P(T \leq t)$ دالة التوزيع ل T.

لنحسب احتمال P أن يكون الزمن بين حادثين يوم أو أقل:

لدينا $P = P(T \leq t = 1)$ إذن:

$P = F(t = 1)$ .... (1)

لاحظ من ناحية أخرى أن P هو معادل لاحتمال أن يسجل على الأقل حادث في يوم معين:

$P = P(X \geq 1) = 1-e^{-\lambda t}$ ....(2)

من (1) و(2) نستنتج أن $\boxed{\mathbf{F(t) = 1 - e^{-\lambda t}}}$............(3)

و منه $f(t) = F(t)' = (1 - e^{-\lambda t})'$

إذن $\mathbf{f(t) = \lambda e^{-\lambda t}}$

قاعدة: إذا كان حدث عشوائي ما يتكرر في الزمن وفق توزيع بواسون:

$$\boxed{p_\tau(x) = \frac{(\lambda\tau)^x e^{-\lambda\tau}}{x!}}$$

فإن الزمن T بين حادثين يتبع التوزيع التالي:

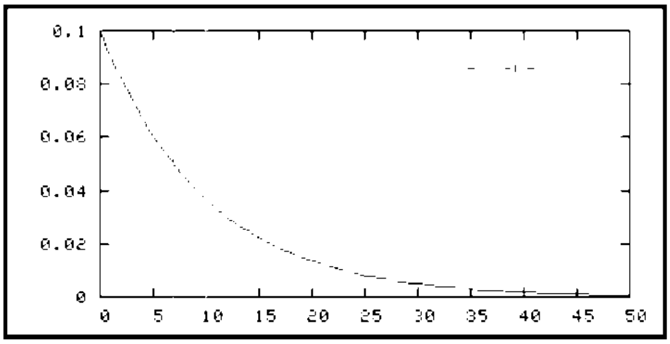
$$f(\tau) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\tau} & , \quad \tau > 0 \\ 0 & , \quad \tau \leq 0 \end{cases}$$

حيث λ عدد حقيقي موجب.

و يسمى هذا التوزيع التوزيع الأسي ويسمى أيضا التوزيع الأسي السالب لعلاقته بتوزيع بواسون.

2-2- التمثيل البياني للتوزيع الأسي

رسم 3 دالة الكثافة للتوزيع الأسي



2-3- خصائص التوزيع الأسي

$$\mu = 1/\lambda \quad , \quad \sigma^2 = 1/\lambda^2 \quad , \quad Med = \mu \ln(2) < \mu \quad , \quad M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

3- توزيع قاما Distribution gamma

توزيعي قاما و بيتا يمثلان مجموعة واسعة من التوزيعات ذات معلمتين تتميز بمرونة وقدرة على توليد توزيعات متعددة حسب قيم المعلمتين. ندرس هذين التوزيعين أيضا لعلاقتهما بالتوزيعات F، t، و ك2. يستخدم توزيع قاما لتمثيل بعض الظواهر مثل توزيع الدخل والادخار تحت شروط معينة.

3-1- صيغة القانون:

نقول عن متغيرة عشوائية أنها تتبع توزيع قاما إذا كانت دالة كثافتها كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0 \quad , & x \le 0 \end{cases} \quad , \alpha > 0, \beta > 0$$

حيث $\Gamma(\alpha)$ هي الدالة قاما: $$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \qquad \alpha > 0$$

ونكتب $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

3-2- خصائص توزيع قاما

$$\mu = \alpha\beta \quad , \quad \sigma^2 = \alpha\beta^2, \quad M(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha}$$

Pour $\alpha > 1$: $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$ et si $\alpha \in N : \Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$,
$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

من خصائص توزيع قاما علاقته بالتوزيع الأسي كما سنرى في السلسلة.

مثال: أحسب ما يلي:

$$\int_0^\infty t^4 e^{-t} dt, \quad \int_0^\infty x^6 e^{-x} dx, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{1/2}} dx, \quad \Gamma(7), \quad \Gamma(4.5), \quad \Gamma(2.5).$$

$$\int_0^\infty t^4 e^{-t} dt = \Gamma(5) = 4! = 24, \int_0^\infty x^6 e^{-x} dx = \Gamma(7) = 6! = 720, \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{1/2}} dx = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(4.5) = \Gamma(3.5+1) = 3.5\Gamma(3.5) = 3.5(2.5)\Gamma(2.5) = 3.5(2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5) = 3.5(2.5)(1.5)(0.5)\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(7) = 6! = 720, \qquad \Gamma(2.5) = 1.5\Gamma(0.5) = 1.5\sqrt{\pi}$$

مثال2. أحسب المتوسط والتباين للمتغيرات العشوائية X و Y و Z المعرفة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 e^{-x/2}}{2^5 \Gamma(5)}, & x > 0 \\ 0 \quad , & x \le 0 \end{cases}, \quad f(y) = \begin{cases} \frac{y^3 e^{-y/4}}{4^4 (6)}, & y > 0 \\ 0 \quad , & y \le 0 \end{cases}, \quad f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 e^{-z}}{6}, & z > 0 \\ 0 \quad , & z \le 0 \end{cases}$$

$$\mu_x = \alpha\beta = 5(2) = 10, \sigma^2{}_x = \alpha\beta^2 = 5(2^2) = 20, \mu_y = 4(4) = 16, \sigma^2{}_y = 4(4^2) = 64, \mu_z = 3(1) = 3, \sigma^2{}_z = 3$$

4- توزيع بيتا Distribution bêta

يتميز توزيع بيتا بمرونته الكبيرة تبعا لقيم معلمتيه (أنظر الرسم 14) حيث يستخدم لحساب توزيع t^2، F، التوزيع الثنائي، الثنائي السالب وغيرها[2]، وتستخدم لتمثيل بعض المتغيرات التي تتراوح بين 0 و 1، مثل نسبة ما كنسبة التالف أو المبيعات، إلخ.

4-1- صيغة القانون.

نقول عن متغيرة عشوائية أنها تتبع توزيع بيتا إذا كانت دالة كثافتها كما يلي:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & 0 < x < 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases} \qquad (\alpha, \beta > 0)}$$

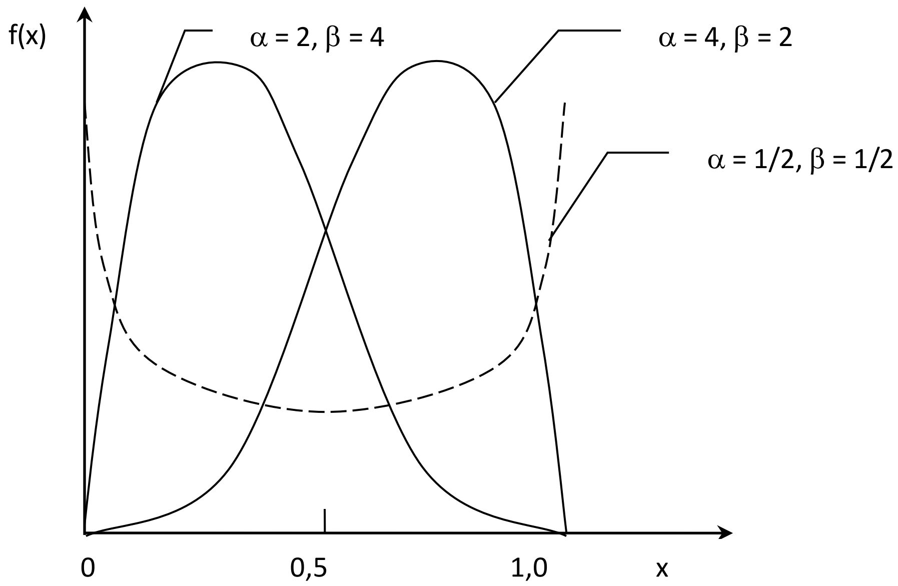
حيث B(α, β) هي الدالة بيتا: $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du, \qquad \alpha, \beta > 0$

و نكتب $X \sim B(\alpha, \beta)$

$\alpha = 4, \beta = 2$

---

[2] المرجع السابق.



رسم 4   التمثيل البياني لدالة الكثافة للتوزيع بيتا من أجل قيم مختلفة للمعالم

4-2- خصائص توزيع بيتا

$$\alpha = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

العلاقة بين الدالتين قاما وبيتا:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

مثال. أحسب ما يلي:

$$B(3,4), \qquad B(1/2,1/2), \quad B(n,2), \qquad B(1,n), \qquad B(n,1) \quad (n \in N)$$

$$B(3,4) = \frac{(3-1)!(4-1)!}{(7-1)!} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}, \quad B(1/2,1/2) = \frac{(\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})}{(1/2)+(1/2)} = \pi,$$

$$B(n,\ 2) = \frac{(n-1)!1!}{(2+1)!} = \frac{1}{n(n+1)!}, \qquad B(1,n) = \frac{1(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} = \frac{1}{n}, \qquad B(n,1) = \frac{(n-1)!1}{n!} = \frac{1}{n}$$

مثال2. أحسب ما يلي: $\int_0^1 x(1-x)dx$, $\quad \int_0^1 x^4(1-x)^3 dx,$ $\quad B(3,2),$

$$B(3,2) = 1/[n(n+1)] = 1/[3(4)] = 1/12$$

$$\int_0^1 x^4(1-x)^3 dx = B(5,4) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)} = \frac{4!3!}{8!} = \frac{1}{280}, \qquad \int_0^1 x(1-x)dx = B(2,2) = \frac{1!1!}{3!} = 1/6$$

وباستعمال العلاقة $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ نجد أن دالة الكثافة للتوزيع بيتا تكتب أيضا:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1\\ 0 \quad , & ailleurs\end{cases}$$

للتوزيعين قاما وبيتا علاقة بعدد من التوزيعات المهمة كالتوزيع الأسي وتوزيع كاي تربيع، من ذلك **مثلا** أن التوزيع الأسي هو حالة خاصة من توزيع قاما عندما **α = 1** **., β = 1/λ**

مثال3. أحسب النسبة المتوقعة للإنتاج التالف والتباين، إذا كانت نسبة الإنتاج التالف تتبع التوزيع التالي:

$$f(x)=\begin{cases}6(1-x)^5, & 0<x<1\\ 0 \quad , & \text{sinon}\end{cases}$$

من المثال السابق لدينا: $B(1,n)=1/n \Rightarrow 6=1/B(1,6).$

بوضع α و β يساويان 1 و 6 على التوالي، نجد أن X ~ B(1, 6)

ومنه: $\mu=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}=1/2, \qquad \sigma^2=\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}=\dfrac{4}{16(5)}=1/20.$

مثال4. نسبة الإنتاج المباع في مؤسسة تتبع التوزيع التالي. أحسب النسبة المتوقعة، واحتمال أن تبلغ النسبة أكثر من 35% .

$$f(x)=\begin{cases}12x^2(1-x), & 0<x<1\\ 0 & ,\ \text{sinon}\end{cases}$$

$$12=3*4 \Rightarrow 12=1/B(3,2) \Rightarrow X \sim B(3,2) \Rightarrow \mu=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{3}{3+2}=3/5=60\%$$

$$P(X>0.35)=\int_{0,35}^{1}12x^2(1-x)dx.$$

$$soit: v=x^2dx\ et\ u=1-x \Rightarrow P(X>0.35)=12\left(\left[(1-x)\frac{x^3}{3}\right]_{0,35}^{1}+\int_{0,35}^{1}x^2dx\right)=0.3125$$