Chapitre 01

Rappels sur les systèmes échantillonnés

1. Classification des signaux

Un signal est une grandeur physique qui transporte une information. Il est généralement représente par une fonction $s(t)$ de la variable indépendante t qui représente le temps.

Les signaux sont classifiés selon la nature de temps et de l'amplitude qui peuvent être continus ou discrets.

La variable est dite **continu** (**analogique**), si entre deux valeurs quelconques de cette variable, il existe un nombre infini de valeurs possibles que la variable peut prendre.

La variable est dite **discrète (échantillonnée)**, si entre de valeurs quelconques, il existe un nombre fini de valeurs possibles pour la variable.

L'obtention des variables discrètes se fait généralement par échantillonnage des variables continues.

Quatre catégories des signaux peuvent être distinguées selon la nature de l'amplitude et le temps.

- **Signaux analogiques :** Amplitude et temps continus.
- **Signaux échantillonnés :** Amplitude continue et temps discret.
- **Signaux quantifiés :** Amplitude discrète et temps continu.
- **Signaux numériques :** Amplitude et temps discrets.

1.2. Signal échantillonné

Un *signal à temps discret* est une suite de nombres $\{\ldots, s(0), s(1), s(2), \ldots\}$ qui dépend d'un paramètre discret k. Il peut être représente par une suite $s(k)$ ou k est un entier.

Il provient de l'échantillonnage d'un signal a temps continu $s(t)$ a une période d'echantalonnage Ts. On utilise alors souvent la notation $s(k)$ pour designer l'échantillon $s(kTs)$ à l'instant kTs.

$$s(k) = s(kTs)$$

1.3. Signal numérique

Un signal à temps discret possède une amplitude continue. La quantification et la numérisation (conversion en séquence binaire) de ce signal produit un *signal numérique* qui est adapté pour un traitement par calculateur.

1.4. Signal impulsionnel discret

Soit s(t) un signal à temps continu et Ts la période d'échantillonnage. Le signal impulsionnel discret s*(t) est défini par

$$s^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(kT_s)\delta(t - kT_s)$$

Le signal impulsionnel discret $s^*(t)$ provient de la multiplication du signal à temps continu $s(t)$ par un peigne périodique de Dirac $\delta_{Ts}(t)$.

$$s^*(t) = s(t) \cdot \delta_{T_s}(t)$$

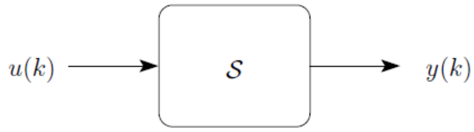
$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$

2. Classification des systèmes

En fonction de la nature de leurs entrées et sorties, il est aussi possible de faire la classification suivante des systèmes.

- **Systèmes analogiques :** Toutes les entrées et les sorties sont analogiques. A titre d'exemple, on peut citer les amplificateurs, les filtres et les modulateurs analogiques
- **Systèmes échantillonnés :** Les signaux sont échantillonnés mais ne sont pas numérises. C'est le cas des circuits a transfert de charge et des filtres a capacités commutées.
- **Systèmes numériques :** toutes les entrées et les sorties sont numériques. Les filtres numériques, les corrélateurs et les processeurs spécialises (DSP par exemple) sont des exemples de ces systèmes.
- **Systèmes hybrides :** Des signaux analogiques et numériques coexistent ensemble dans ce type de système. Un exemple typique est celui des convertisseurs analogique-numérique (CAN) et numérique-analogique (CNA).

Un système échantillonné ou à temps discret est un opérateur S qui transforme une séquence d'entrée u(k) en une séquence de sortie y(k)



$$y(k) = S(u[k])$$

3. Représentation d'un système à temps discret

3.1. Réponse impulsionnelle

Le système est représenté par sa réponse $g(k)$ à une impulsion discrète $\delta(k)$

$$g(k) = S\,(\delta(k))$$

avec $\delta(k)$ l'impulsion discrète

$$\begin{cases} \delta(k) & = 1, \text{ si } k = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On montre que la réponse du système à une séquence d'entrée quelconque est égale au produit de convolution discret de cette entrée par la réponse impulsionnelle du système.

$$y(k) = u(k) * g(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) \cdot g(k-n)$$

y(k) est la convolution discrète de u(k) et g(k).

3.2. Fonction de transfert

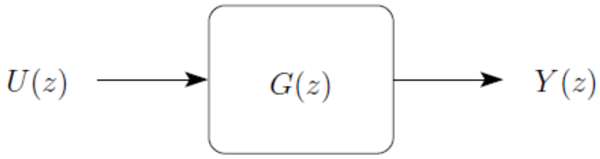
En calculant la transformée en Z des deux termes de l'équation au-dessus, on obtient :

$$y(k) = u(k) * g(k) \xrightarrow{Z} Y(z) = U(z) \cdot G_d(z)$$

$$G_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

La fonction de transfert discrète G(z) est égale à la transformée en z de la réponse impulsionnelle g(k).

La fonction de transfert discrète est aussi appelée transmittance pulsée.



3.3. Equation aux différences (récurrente)

Dans cette représentation, pour un système causal, la sortie $y(k)$ a l'instant k est définie, de façon récurrente, à partir de la valeur actuelle et des valeurs passées de la sortie et de l'entrée. Cette équation récurrente est appelée *équation aux différences.*

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^{p} b_j u(k-j) \qquad n \geq p$$

L'équation aux différences est l'équivalent de la représentation par équation différentielle dans le cas d'un système à temps continu.

3.3.1. Système sans retard

En tenant compte de la relation donnant la transforme en Z d'un signal retarde de i pas d'échantillonnage.

$$Z\ \{y(k-i)\} = z^{-1} Y(z)$$

Le calcul de la transformée en **z** de l'équation aux différences donne l'expression suivante pour la fonction de transfert discrète :

$$G_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_p z^{-p}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

Qui peut aussi être écrite :

$$G_d(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_p z^{n-p}}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

3.3.2. Systèmes à retard

Pour les systèmes à temps discret provenant de l'échantillonnage (discrétisation) de systèmes à temps continu, la fonction de transfert est de la forme suivante :

$$G_d(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \qquad m \leq n$$

soit en z^{-1}

$$G_d(z) = \frac{b_0 z^{m-n} + b_1 z^{m-n-1} + \cdots + b_m z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

Qui peut aussi s'écrire

$$G_d(z) = z^{-d} \cdot \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

avec d = n-m le retard du signal d'entrée : C'est la différence entre le nombre de pôles et de zéros du système. C'est aussi la différence entre le degré du numérateur et du dénominateur dans le cas d'une représentation en z (avec des puissances de z positive). A partir de la fonction de transfert $G_d(z)$, en appliquant la transforme en z inverse on déduit l'équation aux différence du système retarde.

$$y(k) = -\sum_{i=1}^{n} a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^{m} b_j u(k-d-j)$$

4. Représentation polynomiale

On définit l'opérateur q d'avance temporelle d'un pas comme suit :

$$qx(k) = x(k+1)$$

L'operateur q^{-1} est alors celui du retard temporel d'un pas

$$q^{-1}x(k) = x(k-1)$$

En utilisant l'operateur q, l'équation aux différences précédente peut être réécrite comme suit :

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n} a_i q^{-i}\right) y(k) = q^{-d} \left(1 + \sum_{j=0}^{m} b_j q^{-j}\right) u(k)$$

En introduisant les polynômes $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$:

$$A(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i q^{-i} \; ; \; B(q^{-1}) = 1 + \sum_{j=0}^{m} b_j q^{-j}$$

L'équation aux différence du système s'écrit sous forme polynomiale

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) = B(q^{-1})u(k-d)$$

Pour un SLTI échantillonné, la fonction de transfert discrète est obtenue en remplaçant q^{-1} par z^{-1}

$$G_d(z^{-1}) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$$

5. Calcul de fonctions de transfert échantillonnées

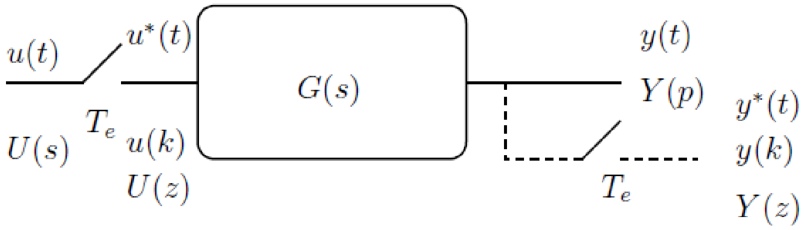
5.1. Passage de la FT continue à la FT discrète

On utilisera les notations suivantes

y(t) : Signal a temps continu.

y*(t) : Signal impulsionnel.

y(k) : Signal a temps discret.



Soit $\delta_{Ts}(t)$ un peigne périodique de Dirac de période Ts

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$

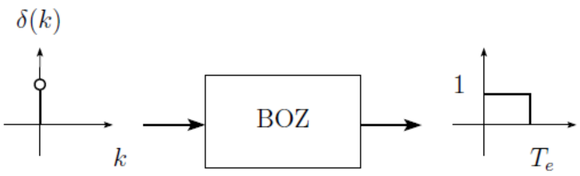
Le signal impulsionnel y*(t) provient de la multiplication du signal à temps continu y(t) par un peigne périodique de Dirac δ_T (t).

$$y^*(t) = y(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(kT)\delta(t - kT_s)$$

de même pour l'entrée impulsionnelle $u^*(t)$. On montre que la fonction de transfert discrète $G_d(z)$ est égale a la transformée en Z correspondant à la fonction de transfert continue $G_c(s)$.

5.2. Fonction de transfert échantillonnée avec BOZ

Le bloqueur d'ordre zéro permet de maintenir l'entrée constante pendant la durée d'une période d'échantillonnage. Il génère ainsi un signal en marches d'escalier à partir d'un signal impulsionnel comme le montre le schéma ci-dessous.



La fonction de transfert continue $B_0(s)$ du BOZ est donnée par

$$B_0(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

La fonction de transfert échantillonnée avec un BOZ est alors

$$G_d(z^{-1}) = \overline{G_c B_0}(z^{-1}) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left(\frac{G_c(s)}{s}\right)$$

6. Représentation d'état

On considère un système échantillonné décrit par sa fonction de transfert discrète dans le cas où les degrés du numérateur et dénominateur sont égaux (p = n) : C'est le cas limite pour un système propre.

$$G_d(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Il admet une représentation d'état

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Qui peut prendre plusieurs formes.

6.1. Forme canonique commandable

Les matrices (A,B,C,D) de la représentation d'état commandable sont données par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \cdots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = b_0$$

6.2. Forme canonique observable

Les matrices (*A,B,C,D*) de la représentation d'état observable sont données par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = b_0$$

6.3. La forme modale

C'est une forme diagonale ou les pôles du système sont regroupés sur la diagonale de la matrice d'état *A*. Si on suppose que le système ne possède que des pôles réels simples, la décomposition de la fonction de transfert en éléments simples s'écrit :

$$G(z) = b_0 + \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \cdot + \frac{c_n}{z - p_n}$$

Avec

pi : Pôles de la fonction de transfert

$$c_i = \lim_{p \to p_i} [G(z) \cdot (z - p_i)]$$

On obtient alors la forme modale suivante :

$$A = \begin{bmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \quad ; \quad D = b_0$$