

SAIDI SIEF ALI

I. Chapitre 2 : Commande adaptative par modèle de référence

1.1. Introduction

La commande adaptative est une technique promettant, qui permet d'améliorer la commande de systèmes en présence des incertitudes dues à plusieurs facteurs tels que la dégradation, l'incertitude des paramètres, les changements internes dans la dynamique du système, les bruits externes ...etc. La commande adaptative décrit tout système de commande possédant la capacité d'ajuster les paramètres de contrôleur en ligne en basant sur les états passés et actuels du processus. Le schéma bloc de la commande adaptative contient les paramètres d'ajustement qui sont appelés les paramètres d'adaptation et le mécanisme d'ajustement qui est appelé la loi adaptative, cette dernière se décrit par des équations mathématiques [1].

Les premières recherches sur la commande adaptative remontent aux années 1950. En 1951, Draper et Li ont développé une commande pour l'optimisation des performances d'un modèle de moteur qui comporte des incertitudes dans sa dynamique. En 1955, Whitaker et al. s'est intéressé à la conception d'un autopilote avancé pour un avion qui se déplace sur un large espace dans certaines conditions de vol en utilisant une commande adaptative à un modèle de référence. Le modèle de l'avion à piloter présente des incertitudes et des variations dans sa dynamique.

A partir de l'année 1960, une nouvelle technique moderne de la commande adaptative s'est apparue en y introduisant la théorie de stabilité de Lyapunov. Dans la même année, Li et Van der Velde ont proposé une nouvelle technique qui est connue sous le nom de *systèmes adaptatifs auto-oscillants*, pour améliorer les performances de la compensation adaptative des variations paramétriques en introduisant un cycle-limite à la boucle de la commande.

En 1970, une amélioration a été introduite à la commande adaptative en utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov pour la conception de contrôleur adaptatif à modèle de référence. Plus tard, en 1980, malgré l'efficacité de la théorie de stabilité de Lyapunov, le contrôleur adaptatif fait preuve d'un comportement instable en présence d'une faible perturbation ou à cause d'une dynamique non modélisée. Ce qui est conduit à conclure que cette commande adaptative est sensible à la précision de la modélisation de systèmes, ce qui est amené à des résultats inadéquats entre le système réel et le modèle de système. Ce manque de robustesse a obligé les chercheurs à proposer des modifications robustes pour améliorer les propriétés

de stabilité de la commande adaptative. Ces modifications représentent une nouvelle classe de commande qui est connue sous le nom de *commande adaptative robuste*.

Depuis l'année 1990 et jusqu'à présent, les recherches dans le domaine de la commande adaptative restent actives, et elle devient plus intelligente en introduisant les réseaux de neurones et la logique floue dans le mécanisme d'adaptation, où ils ont été utilisés pour l'estimation des paramètres incertains de systèmes. Par conséquent, des nouvelles classes de la commande adaptative ont été développées telles que : commande adaptative neuronale, commande intelligente ...etc.

1.2. Les différentes méthodes de commande adaptative

La commande adaptative est une technique qui permet d'adapter en permanence certains paramètres du régulateur en fonction d'un indice de qualité de commande. Le but de cette commande est d'atteindre et de maintenir le comportement du procédé commandée au voisinage des valeurs désirées lorsque système possède des paramètres inconnus et variant dans le temps, ou de régler en boucle fermée les paramètres de régulateur si les paramètres du système sont inconnus et constants [1] [2].

Donc, la technique permet d'introduire des systèmes d'adaptation au moyen de l'ajustement adéquat des paramètres du système par :

- L'introduction des actions de commande
- Le changement de la structure du système
- Le changement de l'algorithme de commande

1.3. Classification des systèmes à commande adaptative

1.4. Commande adaptative en boucle ouverte

La figure 1.1, présente le schéma bloc de la commande adaptative en boucle ouverte. La technique de commande adaptative en boucle ouverte basée principalement sur l'idée qu'il existe une relation rigide entre les variables mesurables caractérisant l'environnement, et les paramètres du modèle. Les paramètres du correcteur sont ajustés à partir d'un tableau, ce tableau contient pour chaque ensemble de mesures provenant de l'environnement (conditions de fonctionnement) les paramètres du correcteur correspondant. Cette méthode agit en boucle ouverte, par conséquent, les modifications des paramètres de contrôleur sont calculées indépendamment de l'état du système. A Cet effet, la commande peut être échouée si la relation entre les mesures de l'environnement et les paramètres de systèmes sont changés [2].

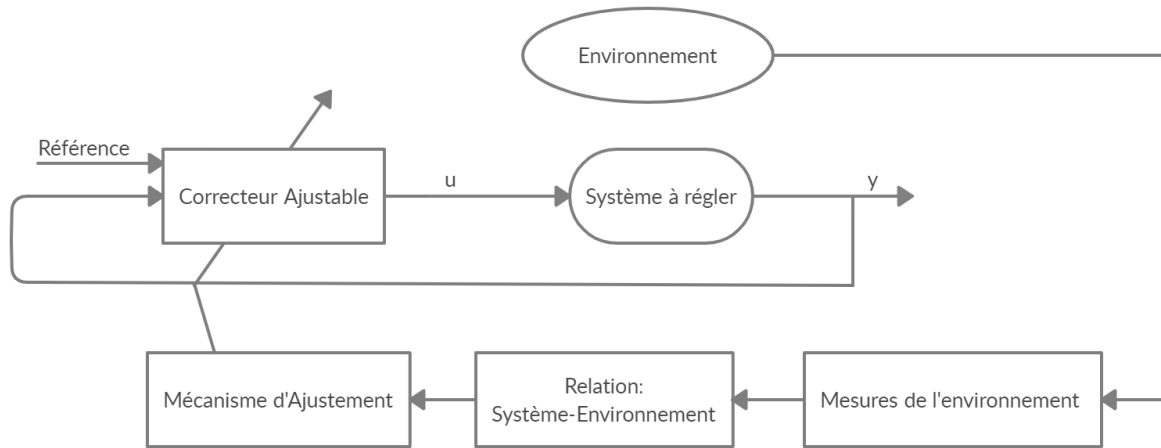


Figure 0.1 Commande adaptative en boucle ouverte.

1.4.1. Commande adaptative directe

Le modèle de référence doit contenir les spécifications désirées en termes de caractéristiques dynamiques, qui permettent au système commandé d'avoir le comportement souhaité en boucle fermée. Si on prend la poursuite comme l'objectif de commande, le modèle de référence peut-être se caractérise par son temps de réponse, son dépassement son facteur d'amortissement ou sa fréquence propre [2].

La figure 1.2, reformule le schéma bloc de la commande adaptative directe, dont le modèle de référence est l'équivalent d'un système avec les performances désirées.

Cette technique pourrait remplir principalement deux objectives :

- Atteindre une erreur nulle entre la sortie du système commandé et le modèle de référence s'ils partent des mêmes conditions initiales.
- Avoir une erreur qui converge asymptotiquement vers zéro si les conditions initiales sont différentes.

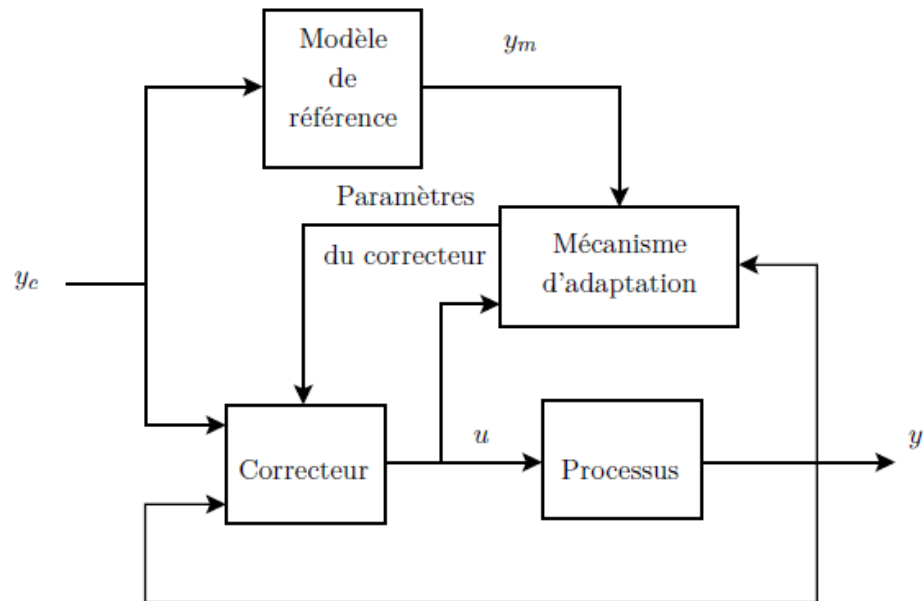


Figure 0.2 Commande adaptative directe.

Selon le schéma bloc, le mécanisme d'ajustement se fait à partir de l'information venant de sortie du système, de la sortie du modèle de référence et de la commande et la différence entre les mesures la sortie du système réel et le modèle désiré (*plant-model error*). L'ensemble de ces informations permet d'ajuster les paramètres du correcteur en temps réel. Le modèle de référence peut recevoir des mesures à partir du système à commande pour prédire la sortie désirée du système.

Le schéma de commande adaptative par modèle de référence constitue un prototype de base de la commande adaptative directe. L'erreur entre le système et le modèle est une erreur de prédiction de performances désirées, elle est utilisée avec les informations recueillies pour ajuster directement les paramètres de correcteur.

1.4.2. Commande adaptative indirecte

La commande adaptative indirecte est la technique de synthèse en temps réel d'un correcteur. La conception du correcteur en temps réel peut être réalisée si le modèle du système est estimé en temps réel à partir des mesures entrées-sorties du système.

La commande adaptative indirecte est réalisée principalement en deux étapes:

- 1- Estimation en-ligne (temps réel) des paramètres du modèle du processus,
- 2- Calcul en-ligne des paramètres du correcteur en fonction du modèle estime.

La figure 1.3, décrit le schéma bloc de cette technique

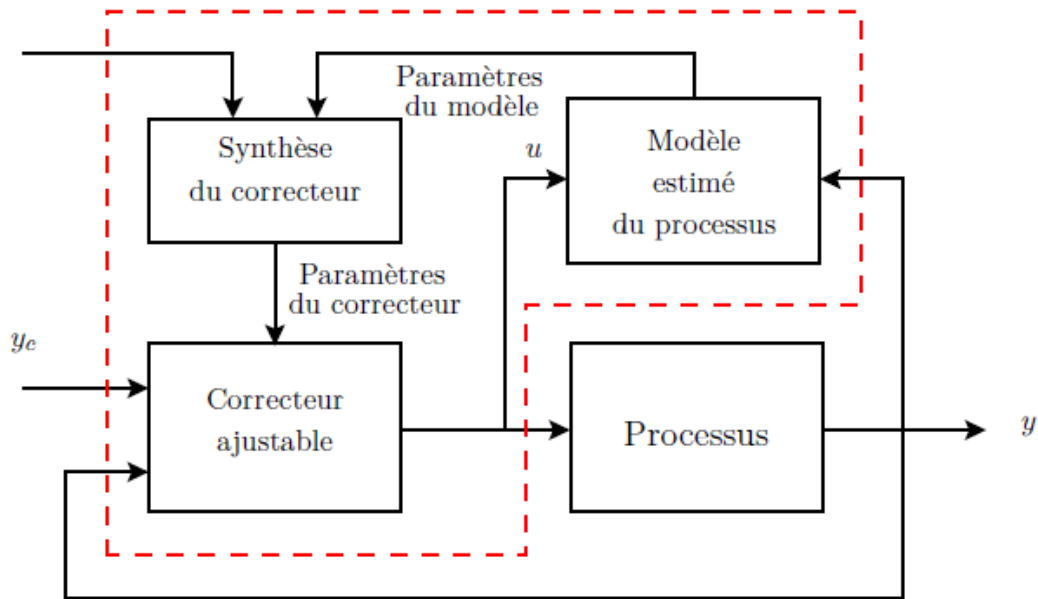


Figure 0.3 Commande adaptative indirecte.

Le schéma bloc présenté dans la figure 1.4, montre le mécanisme global de l'estimation en-ligne des paramètres du modèle. La technique est basée principalement sur la construction en-ligne d'un correcteur ajustable des sorties du système, en utilisant les sorties précédentes du système pour prédire les sorties actuelles. L'erreur entre la sortie du système et la sortie prédite est utilisée pour ajuster le correcteur à travers un algorithme d'adaptation des paramètres qui ajuste à chaque instant les paramètres du correcteur dans le but de minimiser l'erreur de prédiction dans le sens de certains critères prédéfinis.

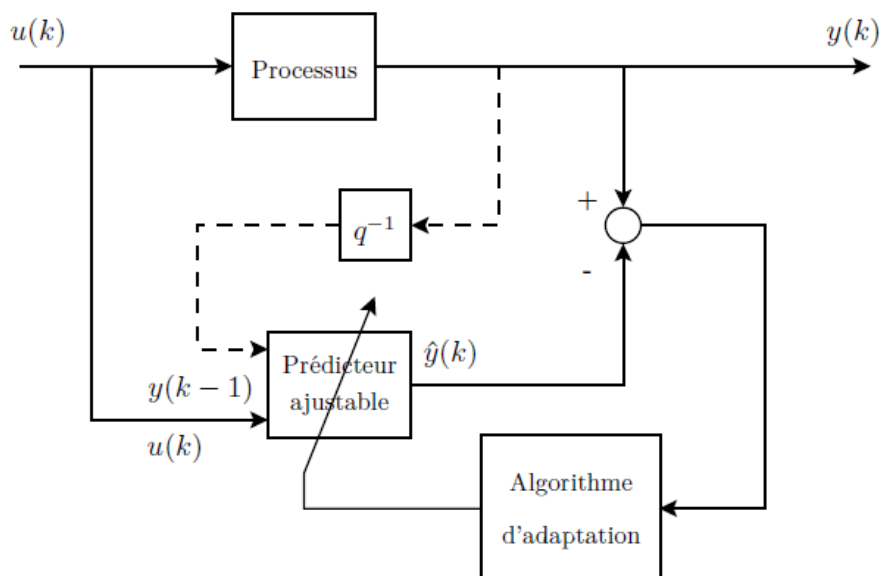


Figure 0.4 Prédicteur dans une commande adaptative indirecte.

1.4.3. Commande adaptative par modèle de référence

La commande adaptative par modèle de référence (MRAC) est utilisée un nouveau mécanisme pour adapter certains paramètres du système au cours de du temps. Deux problèmes sont résolus par cette commande ; l'identification et l'estimation. L'adaptation effectuée par cette méthode permet d'affiner au cours du temps le réglage initiale du système de commande, et de tenir compte de variations des paramètres du système à commander [3].

L'objectif de cette commande et de rendre le comportement du système commandé coïncident avec celui du modèle de référence estimé en boucle fermée. Donc, on cherche à assurer leurs convergences quelques soit les perturbations internes ou externes [3].

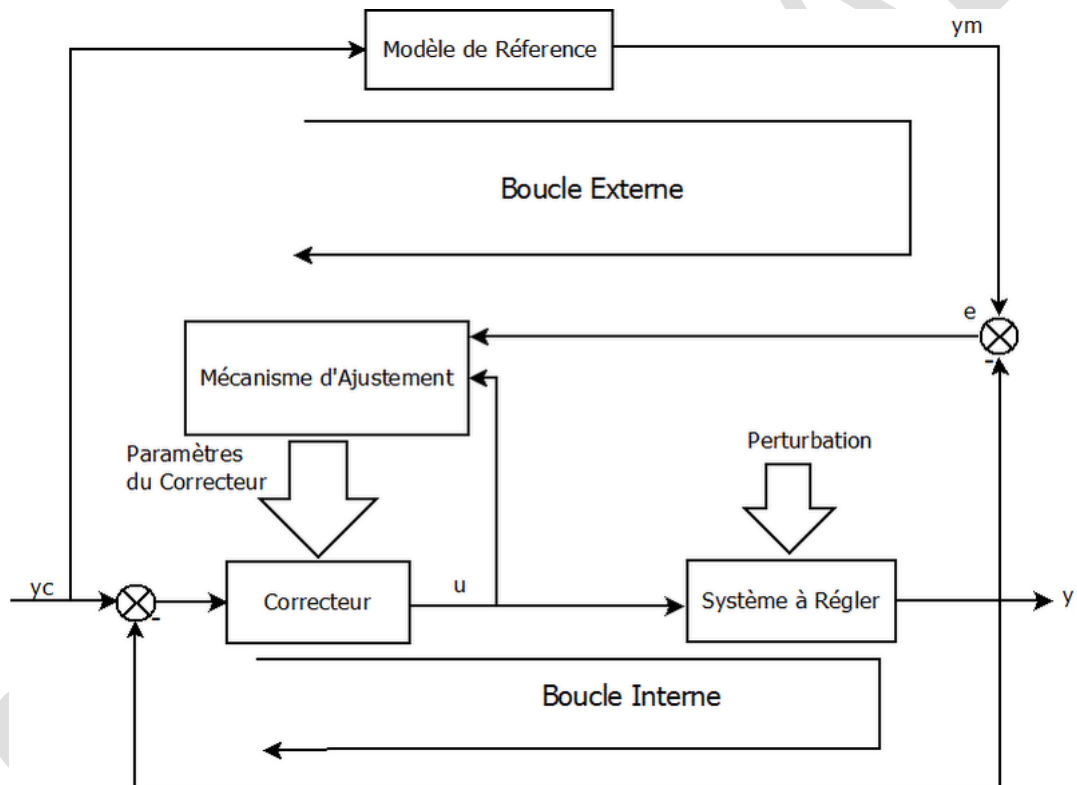


Figure 0.5 Schéma de commande adaptative par modèle de référence.

Selon la figure 1.5, la commande adaptative comporte deux boucles, une boucle interne de régulation qui contient le système à commander et le correcteur, et une boucle externe d'ajustement qui un algorithme d'adaptation. Les paramètres du correcteur sont établis au niveau de la boucle externe de façon que la différence entre la sortie du modèle de référence et celle du système soit minimale [2] [3]. On peut distinguer deux méthodes d'ajustement des paramètres du correcteur :

- 1- Les méthodes du gradient.
- 2- Les méthodes basées sur la théorie de Lyapunov (ex : méthode directe de Lyapunov).

1.5. Mise en œuvre de la commande adaptative

1.5.1. Notion de l'indice de performance

Le mécanisme d'adaptation se base partialement sur la minimisation de l'écart $e(t) = y_m(t) - y(t)$, ce dernier doit modifier les paramètres de correcteur de telle façon que cette erreur tend vers zéro. La détermination du mécanisme d'ajustement est l'étape la plus importante dans la synthèse de la commande adaptative par modèle de référence et l'algorithme d'ajustement est calculé en fonction de l'indice de performance sélectionné.

La qualité d'auto-ajustement dépend de l'indice (critère) de performances J adopté, qui est généralement dépend de l'erreur $e(t)$ entre les signaux de sortie du modèle de référence et celle du système à commander (ou le système en boucle fermée).

$$J(e) = J[y_m(t) - y(t)] \quad 2.1$$

Il existe plusieurs forme du critère de performances, on en distingue ceux les plus utilisés suivants :

- 1- Critère linéaire (IAE) :

$$J1 = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad 2.2$$

- 2- Critère quadratique (ISE) :

$$J2 = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt \quad 2.3$$

- 3- Critère linéaire avec pondération de t (ITSE) :

$$J3 = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \quad 2.4$$

Appelé aussi critère de Craham et Latrhop

- 4- Critère quadratique avec pondération de t au carré (ITSE) :

$$J4 = \int_0^{\infty} t \cdot e(t)^2 dt \quad 2.5$$

- 5- Critère linéaire avec pondération de t^2 (ISTAE) :

$$J5 = \int_0^{\infty} t^2 |e(t)| dt \quad 2.6$$

- 6- Critère quadratique avec pondération de t au carré (ITSE) :

$$J4 = \int_0^{\infty} t^2 \cdot e(t)^2 dt \quad 2.7$$

Remarque : Le critère linéaire est le plus commode à utiliser.

1.5.2. Principe d'ajustement des paramètres

La conception d'une commande adaptative à modèle de référence ne réussit que si quelques hypothèses soient vérifiées. Deux cas sont considérés :

1- Cas idéale :

- Le modèle de référence doit être linéaire invariant dans le temps.
- L'ordre de modèle de référence doit être le même que celui du système.
- Les paramètres du système ajustable dépendent seulement de mécanisme d'adaptation.
- l'état de sortie du système est mesurable.

2- Cas réel :

- Le modèle de référence est généralement est non linéaire.
- Le système ajustable est généralement non linéaire variant avec le temps.
- Les dimensions du système et le modèle de référence ne sont pas les mêmes.
- Le système ajustable subit aussi à des perturbations interne et externe.
- Les bruits additifs affectent aussi la mesure d'erreur.

1.5.3. Méthode de gradient (règle MIT)

1.5.3.1. Principe de la méthode

Le système de commande adaptative par modèle de référence utilise la règle du gradient (règle MIT) pour la synthèse du mécanisme d'ajustement. Cette règle MIT est basé sur le calcul de gradient de l'indice de performances par rapport au paramètres du correcteur. Le calcul du gradient est dans le but de varier les paramètres ajustables du correcteur de telle façon que leurs vitesses de changement soient proportionnelles aux éléments du gradient correspondants. Cette opération n'assure pas la stabilité globale au système, mais elle permet de trouver un compromis entre la stabilité et la vitesse de réponse lors de la simulation [3].

On considère la figure 1.6, qui montre le schéma bloc du système du commande adaptative par modèle de référence.

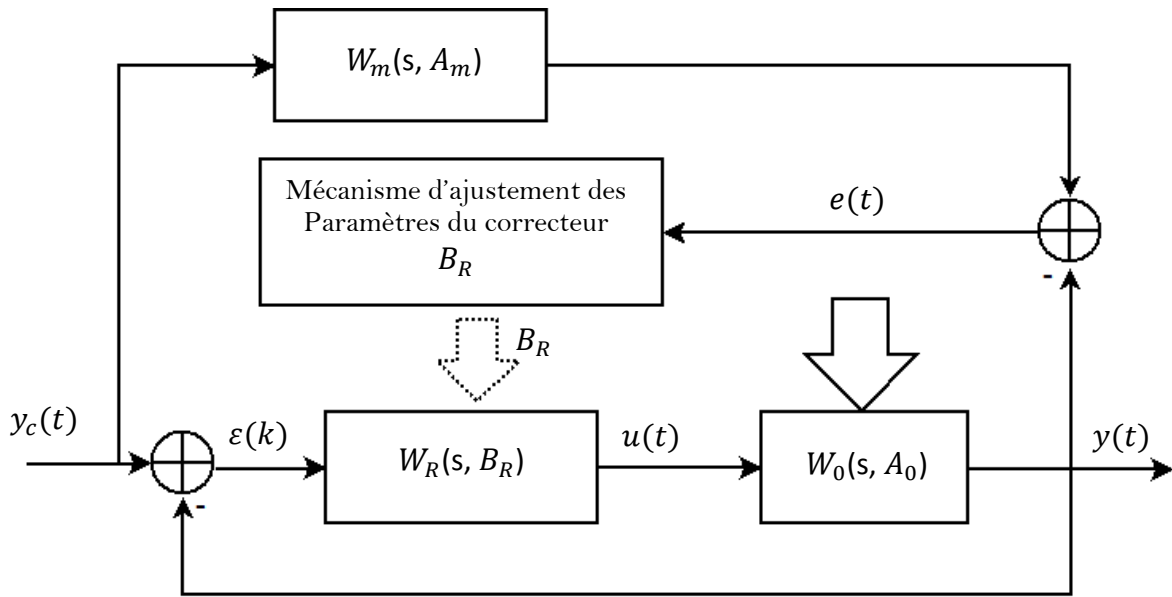


Figure 0.6 Schéma bloc général d'un système de commande adaptative par modèle de référence.

Selon le schéma, on peut écrire la dépendance entre la sortie et l'entrée du système de commande par la relation suivante :

$$Y(s) = W_f(s, B_R, A_0) Y_c(s) \quad 1.1$$

Où, $W_f(.)$ représente la fonction de transfert du système en boucle fermée donnée par la relation suivante :

$$W_f(s, B_R, A_0) = \frac{W_R(s, B_R) W_0(s, A_0)}{1 + W_R(s, B_R) W_0(s, A_0)} \quad 1.2$$

$S = d/dt$: est l'opérateur de Laplace.

$B_R(t) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$: vecteur des paramètres ajustables du régulateur.

$A_0(t) = \{a_{01}, a_{02}, \dots, a_{0n}\}$: vecteur des paramètres non contrôlables du système.

De la boucle externe, le modèle de référence est décrit par l'équation :

$$Y_m(s) = W_m(s, A_m) Y_c(s) \quad 1.3$$

W_m représente la fonction de transfert de modèle de référence.

L'indice de performance $J(e)$ (ou critère de qualité) introduit par la relation suivant :

$$\text{grad}J(e) = \left[\frac{\partial J}{\partial b_1}, \frac{\partial J}{\partial b_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial b_n} \right] \quad 1.4$$

Cet ensemble des éléments est appelé gradient du critère J , les éléments de ce vecteur sont les dérivées partielles du critère par rapport aux paramètres ajustables b_1, b_2, \dots, b_n .

Il est mentionné auparavant que la méthode MIT permet de varier les paramètres ajustables dont leurs vitesses de changement sont proportionnelles aux éléments correspondant au vecteur de paramètres de régulateur.

$$\frac{db_i}{dt} = -\gamma_i \frac{\partial J}{\partial b_i} \quad 1.5$$

Avec γ_i coefficients de dosage de l'algorithme d'ajustement et le signe moins dans (1.5) signifie que la fonctionnelle $J(\mathbf{e})$ est à minimiser.

On a $J(\mathbf{e}) = J(y_m - y) = J[e(A_0, B_R)]$, étant donné que $J(\mathbf{e})$ dépend des paramètres du système qui changent de façon imprévisible. Donc, le calcul direct des paramètres du gradient (1.5) est difficile, pour cela, il est possible d'introduire la méthode des opérations auxiliaires pour faciliter le calcul. La relation (1.5) devient :

$$\frac{db_i}{dt} = -\gamma_i \frac{\partial J[e(A_0, B_R)]}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial b_i} \quad 1.6$$

On a $E(s) = [W_m(s) - W_f(s, B_R, A_0)] \cdot Y_c(s)$, le terme $W_m(s)$ ne dépend pas des paramètres ajustables, donc la dérivée partielle d'erreur est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\partial e}{\partial b_i} = -\frac{\partial y}{\partial b_i} = -[y_c(t) \cdot \frac{\partial W_f(s)}{\partial b_i}] \quad 1.7$$

On remplace le résultat de (1.7) dans (1.6) on aura:

$$L\left\{\frac{db_i}{dt}\right\} = sb_i = \gamma_i \frac{\partial J(\mathbf{e})}{\partial e} \cdot \frac{\partial W_f(s, B_R, A_0)}{\partial b_i} \cdot Y_c(s) \quad 1.8$$

On remarque que le terme $W_f(\cdot)$ est difficile à calculer car il contient les paramètres non mesurables a_i , pour surmonter cette difficulté, on utilise l'opérateur auxiliaire $\left[\frac{\partial W_f^i}{\partial b_i} = W^i(s)\right]$. Ces opérateurs auxiliaires sont des fonctions sensibles de la fonction de transfert principale $W_f(s, B_R, A_0)$ par rapport aux variations des paramètres b_i du régulateur. Donc, selon l'expression (1.8) les valeurs de la dérivée partielle d'erreur correspondant à la réaction d'un système dont sa fonction de transfert est $W^i(s)$ est excité par un signal $y_c(t)$. Les valeurs calculées de la fonction de transfert $W^i(s)$ contenant les paramètres b_i et les paramètres a_i non mesurables. Pour surmonter cette difficulté on remplace les coefficients a_i par leurs valeurs calculées a_0^i (cette opération est réalisable car le but de la commande est

rendre le comportement du système similaire à celui du modèle de référence). Ainsi, les fonctions de sensibilité recherchées correspondent aux valeurs réelles désirées lorsque $W_m(s) = W_f(s)$, et $W_m^i(s) = W_f^i(s)$. La relation (1.8) devient :

$$L\left\{\frac{db_i}{dt}\right\} = \gamma_i \frac{\partial J}{\partial e} \cdot W_m^i(s) \cdot Y_c(s) \quad 1.9$$

Après intégration on aura le gain du correcteur :

$$b_i(t) = b_i(0) + \gamma_i \cdot \int_0^t \frac{\partial J}{\partial e} W_m^i(\tau) \cdot y_c(\tau) \quad 1.10$$

Le gain du correcteur (1.9) peut être présenté dans la figure 1.7.

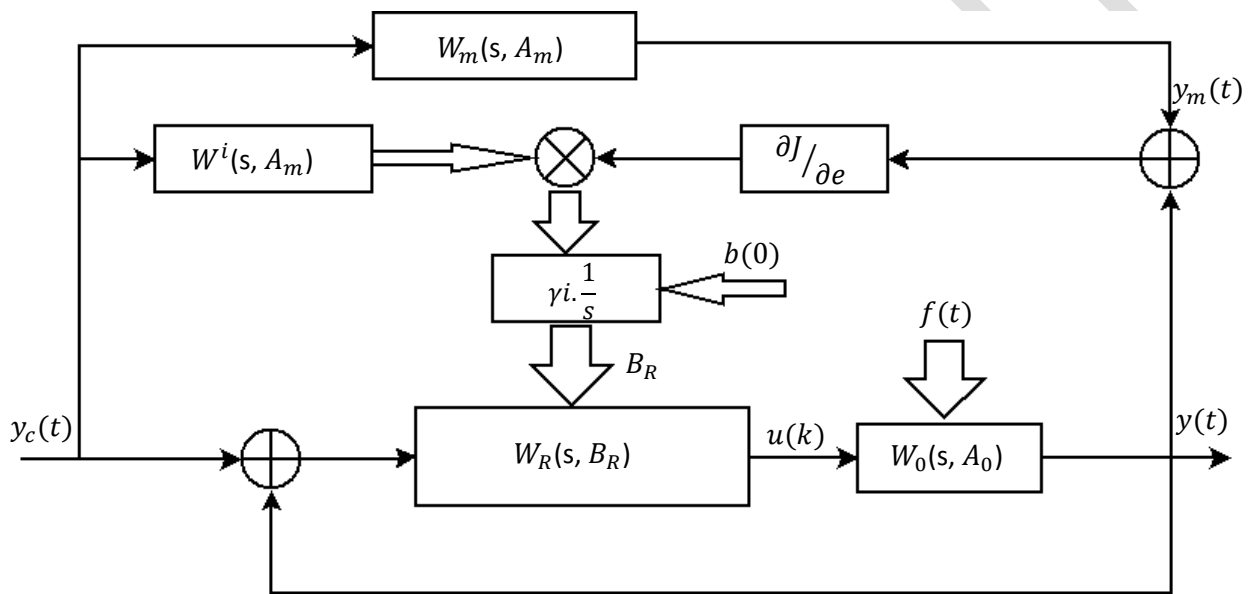


Figure 0.7 Schéma de l'algorithme d'ajustement (1.9).

En dérivant l'expression (1.2) par rapport à i -ème élément $\{b_i\}$ du vecteur B_R , on trouve :

$$\frac{\partial W_f(s, B_R, A_0)}{\partial b_i} = \frac{\partial W_R(s, B_R)}{\partial b_i} \cdot \frac{W_f^2(s, B_R, A_0)}{W_0(s, A_0) W_R^2(s, B_R)} \quad 1.11$$

D'après l'expression (1.2) on peut extraire la valeur de W_0

$$W_0(s, A_0) = \frac{W_f(s, B_R, A_0)}{W_R(s, B_R) [1 - W_f(s, B_R, A_0)]} \quad 1.12$$

En remplaçant l'expression (1.12) dans (1.11), on obtient :

$$\frac{\partial W_f(\cdot)}{\partial b_i} = \frac{\partial W_R(\cdot)}{\partial b_i} \cdot \frac{W_f(\cdot) [1 - W_f(\cdot)]}{W_R(s, B_R)} \quad 1.13$$

On a $Y(s) = W_f(\cdot) \cdot Y_c(s)$, donc :

$$\frac{\partial Y(s, B_R, A_0)}{\partial b_i} = \frac{\partial W_R(s)}{\partial b_i} \cdot \frac{W_f(s)[1-W_f(s)]}{W_R(s, B_R)} \cdot Y_C(s) \quad 1.14$$

Compte tenu de (1.6) et (1.7), on obtient l'expression suivante :

$$\frac{db_i}{dt} = \gamma_i \frac{\partial J(e)}{\partial e} \frac{\partial W_R(s)}{\partial b_i} \cdot \frac{[1-W_f(s)]}{W_R(s)} \cdot Y_C(s) \quad 1.15$$

Le but d'algorithme d'ajustement est de trouver les valeurs des paramètres $\{b_i\}$ du dispositif de commande en rapprochant les opérateurs $W_f(s)$ du système à régler et du régulateur $W_R(s)$ Avec celui de modèle de référence $W_m(s)$. Pour cela, il est nécessaire que la partie droite de l'expression (1.15) soit complètement déterminée. Par conséquent, il est autorisé de remplacer le terme $W_f(s)$ par celui de modèle de référence $W_m(s)$ Dans l'expression (1.15). dans ce cas, l'expression (1.15) ne contient plus les paramètres non contrôlables A_0 . L'algorithme d'ajustement s'écrit sous la forme suivante :

$$sb_i = L \left\{ \frac{db_i}{dt} \right\} = \gamma_i \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial J(e)}{\partial e} \frac{\partial W_R(s)}{\partial b_i} \cdot \frac{[1-W_m(s)]}{W_R(s)} \cdot Y_C(s) \quad 1.16$$

La figure 1.8, représente le schéma bloc de l'algorithme d'ajustement décrit par l'expression (1.16).

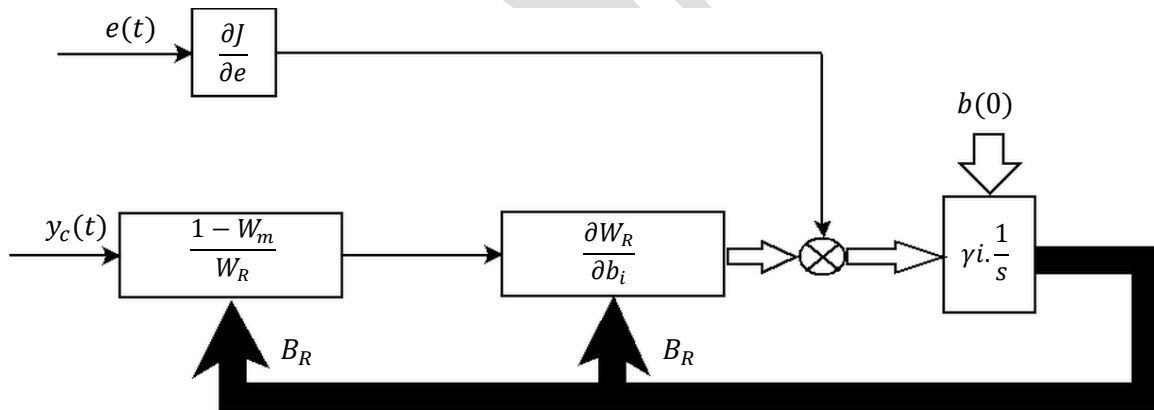


Figure 0.8 Schéma bloc de l'algorithme (1.16).

Maintenant on va ajuster les paramètres du correcteur situés dans la chaîne de contre réaction comme montre la figure 1.9. En utilisant le mécanisme d'ajustement situé dans la boucle de retour, on peut écrire

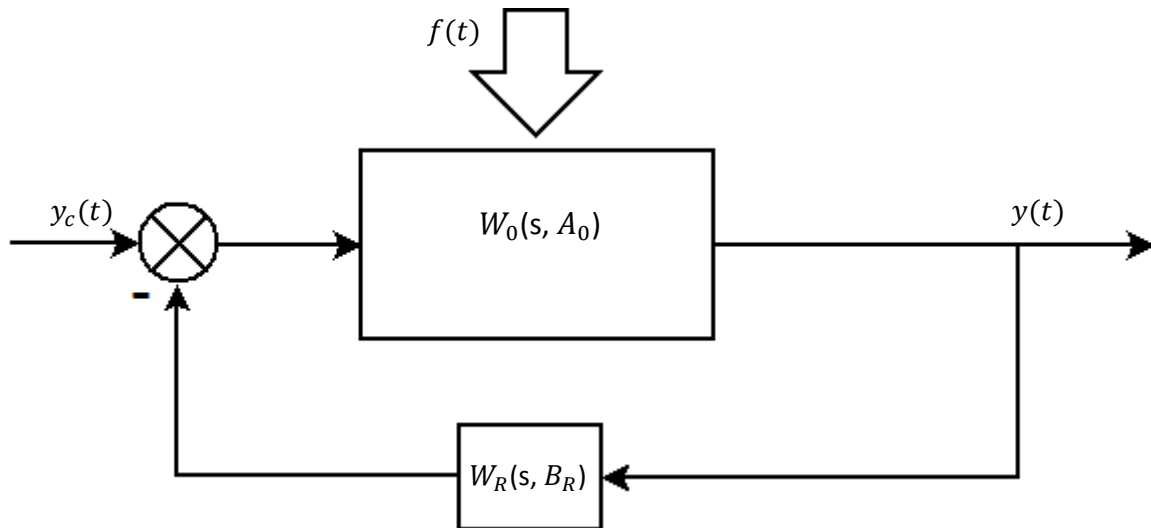


Figure 0.9 Schéma de correcteur sur la chaîne de contre réaction.

$$W_f(.) = \frac{W_0(.)}{1+W_R(.)W_0.} \quad 1.17$$

et

$$W_0(.) = \frac{W_f(.)}{1-W_f(.)W_R(.)} \quad 1.18$$

Si on remplace $W_0(.)$ Par sa valeur dans la dérivée de $W_f(.)$, on obtient

$$\frac{\partial W_f}{\partial b_i} = \frac{W_0^2}{(1+W_R W_0)^2} \cdot \frac{\partial W_R}{\partial b_i} = \frac{\left[\frac{W_f}{1-W_f W_R}\right]^2}{[1+W_R(\frac{W_f}{1-W_f W_R})]^2} \cdot \frac{\partial W_R}{\partial b_i} = -W_f^2 \frac{\partial W_R}{\partial b_i} \quad 1.19$$

On remplace (1.19) dans (1.8), on obtient

$$L\left\{\frac{db_i}{dt}\right\} = \gamma_i \frac{\partial J(e)}{\partial e} \cdot \left(-\frac{\partial W_R}{\partial b_i} \cdot W_f^2\right) Y_c(s) \quad 1.20$$

On a d'après la figure 1.6

$$Y(s) = W_f(.)Y_c(s) \quad 1.21$$

Et en remplaçant $W_f(.)$ par $W_m(.)$ dans l'expression (1.20), on obtient

$$L\left\{\frac{db_i}{dt}\right\} = sb_i = -\gamma_i \frac{\partial J(e)}{\partial e} \cdot \frac{\partial W_R(.)}{\partial b_i} \cdot W_m(.)Y(s) \quad 1.22$$

L'indice de performances est de la forme :

$$J(e) = \frac{1}{2} e^2(t)$$

L'algorithme d'ajustement (1.5) s'écrit :

$$L \left\{ \frac{db_i}{dt} \right\} = sb_i = -\gamma_i \frac{\partial J(e)}{\partial e} = \gamma_i \frac{\partial Y(\cdot)}{\partial b_i} \cdot E(s) \quad 1.23$$

Avec $E(s) = Y_m(s) - Y(s)$

Donc :

$$\frac{\partial e}{\partial b_i} = \frac{\partial (y_m - y)}{\partial b_i} = -\frac{\partial y}{\partial b_i} \quad 1.24$$

On remplaçant (1.24) and (1.23) on aura l'algorithme d'ajustement final :

$$\frac{db_i}{dt} = -\gamma_i \frac{\partial e(t)}{\partial b_i} \cdot e(t) \quad 1.24$$

Exemple 1.1 : (Commande adaptative en boucle ouverte).

Soit le système linéaire monovariabile représenté sur la figure 1.10 [2].

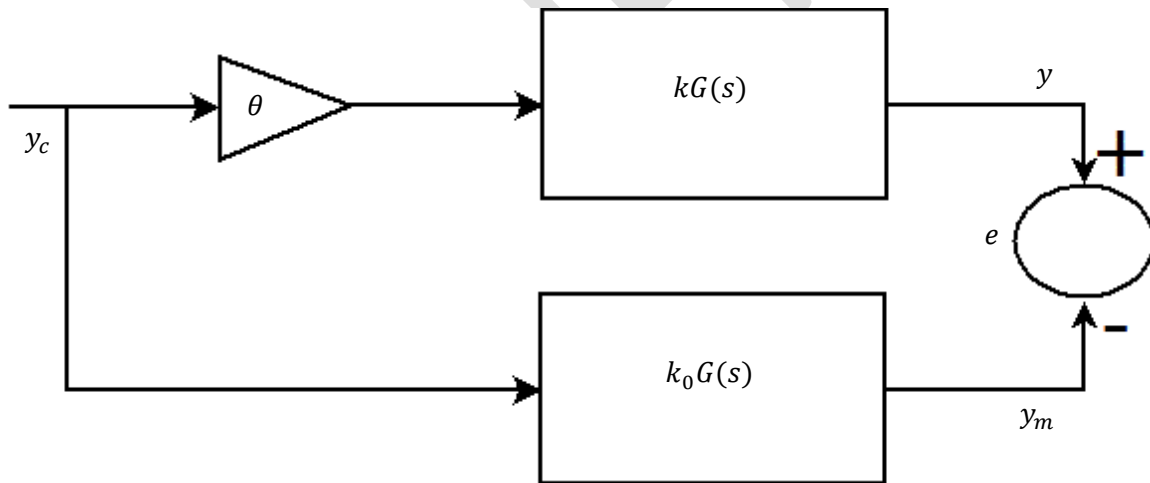


Figure 0.10 Commande adaptative en boucle ouverte.

La fonction de transfert du système $G(s)$ est connue mais le gain k est inconnu. L'objectif est de trouver un correcteur en boucle ouverte pour que système corrigé possède la fonction de transfert $G_m(s)$ du modèle de référence :

$$G_m(s) = k_0 G(s) \quad 1.25$$

On utilise pour cela un correcteur proportionnel. La commande est alors donnée par

$$u = \theta y_c \quad 1.26$$

avec θ le paramètre ajustable du correcteur et y_c la consigne.

Si le gain k était connu, la poursuite parfaite du modèle de référence est réalisée si (voir la figure 1.10)

$$\theta kG(s) = G_m(s) = k_0 G(s)$$

Ce qui implique la valeur suivante pour le gain θ

$$\theta = \frac{k_0}{k} \quad 1.27$$

Mais le gain k est inconnu. On utilise alors la règle MIT pour la mise à jour du paramètre θ :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial e}{\partial \theta} e$$

Or

$$e = y - y_m = [\theta kG(s) - k_0 G(s)]. y_c$$

En dérivant par rapport à θ , et en tenant compte du fait que $y_m = k_0 G(s) y_c$:

$$\frac{\partial e}{\partial \theta} = kG(s) y_c = \frac{k}{k_0} y_m$$

D'où

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{k}{k_0} y_m e = -\dot{\gamma} y_m e$$

On tire finalement

$$\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\gamma} y_m e \quad 1.28$$

Le schéma de la commande est donné par la figure 1.11.

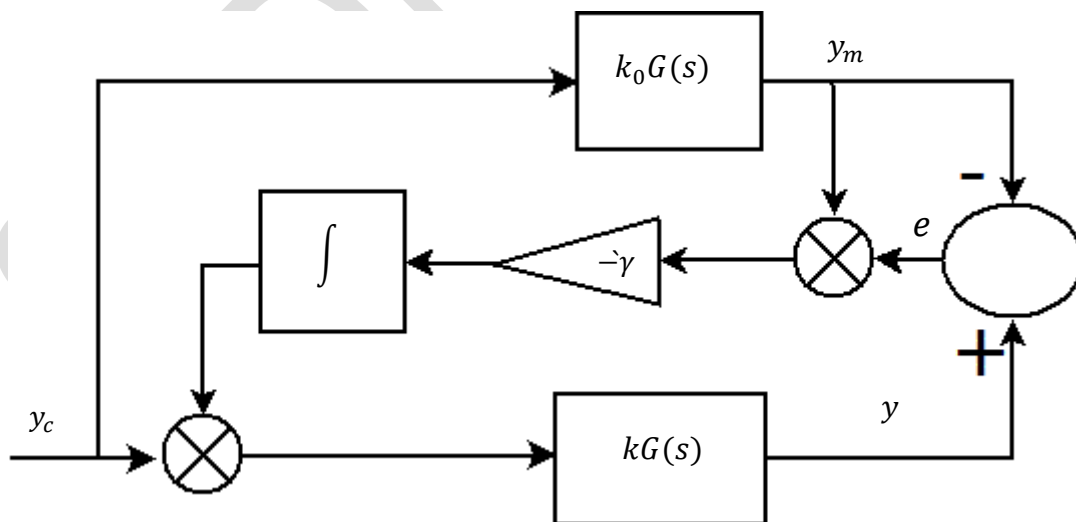


Figure 0.11 Commande adaptative proportionnelle en boucle ouverte.

Exemple 1.2: (Commande adaptative d'un système du premier ordre).

Soit un système linéaire décrit par un modèle du premier ordre [2] :

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu \quad 1.29$$

avec a et b deux paramètres inconnus.

On souhaite avoir un comportement en boucle fermée similaire au modèle de référence du premier ordre également

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m y_c$$

On utilise la commande suivante

$$u(t) = \theta_1 y_c - \theta_2 y$$

en remplaçant $u(t)$ dans 1.29 on obtient :

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b\theta_1 y_c - b\theta_2 y = -(a + b\theta_2)y + b\theta_1 y_c \quad 1.30$$

qui représente le système en boucle fermée. On aura un comportement similaire au modèle de référence si :

$$a + b\theta_2 = a_m \quad b\theta_1 = b_m$$

Soit

$$\theta_1 = \frac{b_m}{b}$$

$$\theta_2 = \frac{a_m - a}{b}$$

a et b sont inconnus, alors on peut pas calculer θ_1 et θ_2 .

Il existe $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ (sont les approximations de θ_1 et θ_2 respectivement) sachant que

$$\begin{cases} a + b\theta_2 = a_m \\ b\theta_1 = b_m \end{cases}$$

L'ordre du système et du modèle de référence étant le même, il est possible de faire une poursuite parfaite du modèle de référence.

En introduisant l'opérateur de différentiation de Laplace $s = \frac{d}{dt}$, l'équation 1.30 elle devient :

$$y = \frac{b\theta_1}{s + a + b\theta_2} y_c$$

on calcule alors $\frac{\partial e}{\partial \theta} = \left[\frac{\partial e}{\partial \theta_1} \quad \frac{\partial e}{\partial \theta_2} \right]^T$:

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_1} = \frac{b}{s + a + b\theta_2} y_c$$

$$\frac{\partial e}{\partial \theta_2} = -\frac{b^2\theta_1}{(s + a + b\theta_2)^2} y_c = -\frac{b}{s + a + b\theta_2} y$$

Ces relations ne peuvent pas être utilisées directement car a et b sont inconnus. On utilise alors une approximation en remarquant que si les paramètres sont proches des paramètres exacts ($\theta = \hat{\theta}$) on a :

$$s + a + b\hat{\theta}_2 = s + a_m$$

On peut écrire alors :

$$s + a + b\theta_2 \approx s + a_m$$

On a alors d'après l'algorithme du gradient :

$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta_1}{dt} \\ \frac{d\theta_2}{dt} \end{bmatrix} = -\gamma \begin{bmatrix} \frac{\partial e}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial e}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \cdot e$$

Soit

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma \left(\frac{b}{s + a_m} y_c \right) e$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \gamma \left(\frac{b}{s + a_m} y \right) e$$

Si on combine les paramètres a et b avec le paramètre d'adaptation γ : $\dot{\gamma} = \gamma \frac{b}{a_m}$ on obtient la règle d'adaptation :

$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta_1}{dt} = -\dot{\gamma} \left(\frac{a_m}{s + a_m} y_c \right) e \\ \frac{d\theta_2}{dt} = \dot{\gamma} \left(\frac{a_m}{s + a_m} y \right) e \end{bmatrix}$$

Le signe de b doit être connu pour avoir un gain γ de signe correct.

Même si l'erreur $e = y - y_m \rightarrow 0$, cela n'implique pas forcément que $\theta \rightarrow \theta_0$ qui est la vraie valeur des paramètres.

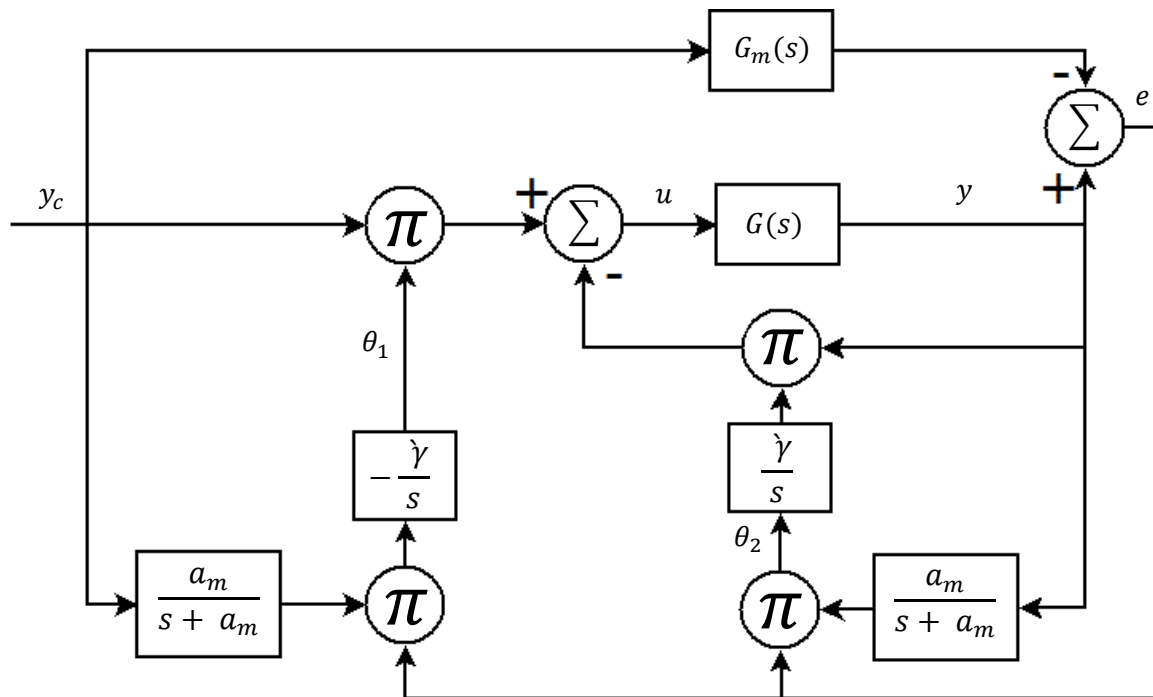


Figure 0.12 Schéma bloc de commande adaptative par modèle de référence d'un système du premier ordre.

1.5.4. Stabilité des systèmes non linéaires à temps variant

1.5.4.1. Théorème de Lyapunov pour les systèmes à temps variant

Théorème 1.1 (Stabilité d'un système à temps variant). Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre de $\dot{x} = f(x, t)$. Soit $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ la boule de rayon r , alors si il existe une fonction V continument différentiable tel que :

- 1) $\alpha_2 (\|x\|) < V(x, t) < \alpha_1 (\|x\|)$, pour $t \geq 0$.
- 2) $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial t} \leq -\alpha_3 (\|x\|)$, pour $t \geq 0$.
- 3) Les fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont de classe K.

alors $x_e = 0$ est **uniformément asymptotiquement stable**.

Remarque En pratique, il faut borner supérieurement $V(x, t)$ par une fonction indépendante de t [4].

1.5.4.2. Lemme de Barbalat

Lemme (Lemme de Barbalat). Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et uniformément continue pour $t \geq 0$. Si $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(\tau) d\tau$ existe et qu'elle est finie, alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$$

Théorème 1.2. (Bornitude et ensemble de convergence).

Soit $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$.

Supposons que $f(x, t)$ est Lipschitzienne sur $D \times [0, \infty)$. Soit $V(x, t)$ une fonction continûment différentiable tel que

$$\alpha_2(\|x\|) < V(x, t) < \alpha_1(\|x\|)$$

et

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -W(x) \leq 0.$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -W(x) \leq \forall t \geq 0, \forall x \in D$$

avec α_1 et α_2 des fonction de classe K définies sur $[0, r)$ et $W(x)$ continue sur D . De plus, on suppose que dV/dt est uniformément continue en t , alors les solutions de $\dot{x} = f(x, t)$ avec $\|x(t_0)\| \leq \alpha_2^{-1} \leq \alpha_1(r)$ sont **bornées** et vérifient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x) \rightarrow 0$$

De plus, si toutes les hypothèses sont vérifiées globalement et que $\alpha_1 \in k_\infty$, alors le résultat est vrai $\forall x(t_0) \in \mathbb{R}^n$.

Remarque : Il suffit d'avoir $\frac{d^2V}{dt^2}$ bornée pour avoir $\frac{dV}{dt}$ uniformément continue.

Pour avoir un mécanisme d'ajustement selon la théorie de Lyapounov des systèmes non stationnaires de commande par modèle de référence, on suit les étapes suivantes :

Algorithme :

1- Formuler l'expression d'erreur entre le système à commander et celui de référence

$$e^{(i)} = y_m^{(i)} - y^{(i)}$$

2- Trouver une fonction candidate de Lyapounov V et un mécanisme d'ajustement pour assurer

$$\lim_{i \rightarrow \infty} e \rightarrow 0$$

3- Généralement dV/dt est seulement semi-définie négative. Il est alors possible d'utiliser le deuxième théorème pour démontrer la convergence de l'erreur vers zéro.

1.5.5. Commande adaptative directe par la théorie de Lyapunov

1.5.5.1. Synthèse direct de MRAC par la théorie de Lyapunov

1) Systèmes SISO du premier ordre

Soit le système non linéaire SISO suivant :

$$\dot{x} = ax + b[u + f(x)] \quad 1.31$$

Etant donné que $x(0)=x_0$, $f(t)$ est une fonction incertaine qui peut être paramétrée linéairement par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^p \theta_i^* \phi_i(x) = \theta^{*T} \Phi(x) \quad 1.32$$

Où $\theta^* = [\theta_1 \theta_2 \dots \dots \theta_p]^T \in R^p$ est un vecteur constant inconnu, et $\Phi(x) = [\Phi(x)_1 \Phi(x)_2 \dots \dots \Phi(x)_p]^T \in R^p$ vecteur contient des fonctions usuelles bornées et constantes.

a) CAS I : a et b sont inconnus mais le signe de b est connu

Le modèle de référence est donnée par :

$$\dot{x}_m = a_m x_m + b_m r \quad 1.33$$

Etant donné que $x_m(0)=x_{m0}$, $a_m < 0$ et $r(t) \in \mathcal{L}_\infty$ est la consigne de référence continue et bornée, donc $x_m(t)$ est signal de sortie de modèle de référence uniformément borné.

Dans un premier temps, on définit un contrôleur idéal qui élimine parfaitement les termes incertains et permet à $x(t)$ de suivre $x_m(t)$.

$$u^* = k_x^* x + k_r^* r(t) + \hat{\theta}^{*T} \Phi(x) \quad 1.34$$

Où * représente les valeurs idéales des constantes inconnues.

En substituant la commande u^* dans le système $x(t)$, on obtient le modèle du système idéal en boucle fermée:

$$\dot{x} = (a + k_x^* b)x + b k_r^* r \quad 1.35$$

Comparons le système idéal en boucle fermée avec le modèle de référence, on peut déterminer les gains idéals k_x^* et k_r^* par les conditions de correspondances suivantes :

$$\begin{cases} a + k_x^* b = a_m \\ b k_r^* = b_m \end{cases} \quad 1.36$$

Il est clair que les valeurs de deux gains k_x^* et k_r^* sont toujours existées tant qu'il y a deux équations indépendantes avec deux paramètres inconnus.

Les gains de contrôleur adaptatif actuel (\hat{k}_x, \hat{k}_r) sont estimés à partir des gains idéals (k_x^*, k_r^*) de manière que le contrôleur adaptatif se rapproche du contrôleur idéal lorsque t tend vers l'infinie.

Soit le contrôleur adaptatif qui est donné par :

$$u = \hat{k}_x(t)x + \hat{k}_r(t)r - \hat{\theta}^T(t)\Phi(x) \quad 1.37$$

Où $\hat{k}_x(t)$, $\hat{k}_r(t)$ et $\hat{\theta}^T$ sont les estimations de k_x^* , k_r^* et θ^{*T} , respectivement.

Dans ce cas, le contrôleur adaptatif est un contrôleur adaptatif direct, parce que \hat{k}_x, \hat{k}_r et $\hat{\theta}(t)$ sont estimés directement sans connaître les paramètres inconnus a, b et θ^* du système.

Les erreurs d'estimation dans ce cas sont définies par :

$$\begin{aligned} \tilde{k}_x(t) &= \hat{k}_x(t) - k_x^* \\ \tilde{k}_r(t) &= \hat{k}_r(t) - k_r^* \\ \tilde{\theta} &= \hat{\theta}(t) - \theta^* \end{aligned} \quad 1.38$$

En substituant ces équations dans le modèle du système on obtient:

$$\dot{x} = (a + k_x^*b + b\tilde{k}_x)x + (bk_r^* + b\tilde{k}_r)r - b\tilde{\theta}^T \Phi(x) \quad 1.39$$

Sachant que, l'erreur de poursuite est donnée par $e(t) = x_m - x(t)$, et l'équation d'erreur en boucle fermée est constituée par :

$$\dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x} = a_m e - b\tilde{k}_x x - b\tilde{k}_r r + b\tilde{\theta}^T \Phi(x) \quad 1.40$$

Il est à noter que l'erreur de poursuite est une équation non autonome à cause de $r(t)$.

La définition des lois d'ajustement des gains \hat{k}_x, \hat{k}_r et $\hat{\theta}(t)$ se fait en utilisant les théorèmes de stabilité de Lyapunov comme suit :

- **Preuve : proposer la fonction candidat de Lyapunov**

$$V(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) = e^2 + |b| \left(\frac{\tilde{k}_x^2}{\gamma_x} + \frac{\tilde{k}_r^2}{\gamma_r} + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \right) > 0 \quad 1.41$$

Où $\Gamma = \Gamma^T > 0 \in R^p \times R^p$ est une matrice taux d'adaptation définie positive pour $\tilde{\theta}(t)$.

- **Evaluation de $\dot{V}(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta})$:**

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) &= 2e\dot{e} + |b| \left(\frac{2\tilde{k}_x \dot{\tilde{k}}_x}{\gamma_x} + \frac{2\tilde{k}_r \dot{\tilde{k}}_r}{\gamma_r} + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \right) \\ &= 2a_m e^2 + 2\tilde{k}_x \left(-ebx + |b| \frac{\dot{\tilde{k}}_x}{\gamma_x} \right) + 2\tilde{k}_r \left(-ebr + |b| \frac{\dot{\tilde{k}}_r}{\gamma_r} \right) + 2\tilde{\theta}^T [eb \Phi(x) + |b| \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}] \end{aligned}$$

Puisque $b = |b| \text{sgn} b$, donc $\dot{V}(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) \leq 0$ si

$$-exsgnb + \frac{\dot{\tilde{k}}_x}{\gamma_x} = 0$$

$$-ersgnb + \frac{\dot{\tilde{k}}_r}{\gamma_r} = 0$$

$$e\Phi(x)sgnb + \Gamma^{-1}\dot{\tilde{\theta}} = 0$$

Parce que k_x^*, k_r^* et θ^* sont constants, donc on peut écrire $\tilde{k}_x = \hat{k}_x$, $\tilde{k}_r(t) = \hat{k}_r$ et $\tilde{\theta} = \hat{\theta}$

Par conséquent, les lois adaptatives sont obtenues :

$$\dot{\hat{k}}_x = \gamma_x xesgnb$$

$$\dot{\hat{k}}_r = \gamma_r resgnb$$

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma\Phi(x)esgnb$$

1.42

Alors,

$$\dot{V}(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) = 2a_m e^2 \leq 0$$

Puisque $\dot{V}(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) \leq 0$, donc $e(t)$, \hat{k}_x , \hat{k}_r et $\hat{\theta}$ sont bornées, donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) = V(e_0, \tilde{k}_{x0}, \tilde{k}_{r0}, \tilde{\theta}_0) + 2a_m \|e\|_2^2$$

Où $e(0) = e_0$, $\tilde{k}_x(0) = \tilde{k}_{x0}$, $\tilde{k}_r(0) = \tilde{k}_{r0}$, $\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}_0$

Donc, $V(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta})$ possède une limite finie lorsque $t \rightarrow \infty$, et puisque $\|e\|_2$ existe, alors $e(t) \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$, mais $\|\dot{e}\| \in \mathcal{L}_\infty$.

$\dot{V}(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta})$ peut être uniformément continue si on prouve que sa dérivée est bornée. La deuxième dérivée $\ddot{V}(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta})$ est égale à :

$$\ddot{V}(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) = 4a_m e \dot{e} = 4a_m e [a_m e - b\tilde{k}_x x - b\tilde{k}_r r + b\tilde{\theta}^T \Phi(x)] \quad 1.43$$

Puisque $e(t)$, \hat{k}_x , \hat{k}_r et $\hat{\theta}$ sont bornées en vertu que $\dot{V}(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) \leq 0$, $x(t)$ est borné parce que $e(t)$ et $x_m(t)$ sont bornés, $r(t)$ est borné (signal de commande de modèle de référence), $\Phi(x)$ est bornée parce que $x(t)$ est borné ; donc, $\ddot{V}(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta})$ est bornée. Par conséquent, $\dot{V}(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta})$ est uniformément continue, selon Barbalat's lemma $\dot{V}(e, \tilde{k}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) \rightarrow 0$, donc $e(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. L'erreur de poursuite est asymptotiquement stable, mais le contrôle adaptatif n'est pas asymptotiquement stable, puisque $\hat{k}_x(t)$, $\hat{k}_r(t)$ et $\hat{\theta}(t)$ puisse seulement être montré comme étant borné [1].

b) CAS II : a et b sont connus

Si a et b sont connus, alors les gains $\hat{k}_x(t)$, $\hat{k}_r(t)$ ne doivent pas être estimés, et peuvent être calculés à partir des conditions de correspondances.

$$\begin{aligned}\hat{k}_x &= \frac{a_m - a}{b} \\ \hat{k}_r &= \frac{b_m}{b}\end{aligned}\quad 1.43$$

Dans ce cas le contrôleur adaptatif est donné par :

$$u = \hat{k}_x x + \hat{k}_r r - \hat{\theta}^T(t) \Phi(x) \quad 1.44$$

Dont le seul terme qui doit être ajusté est $\hat{\theta}^T$

L'équation de l'erreur de poursuite est alors devient :

$$\dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x} = a_m e + b \tilde{\theta}^T \Phi(x) \quad 1.45$$

La loi adaptative déterminée est de la forme :

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \Phi(x) e b \quad 1.46$$

- **Preuve : pour démontrer que la loi adaptative est stable, on choisit la fonction candidat de Lyapunov suivante :**

$$V(e, \tilde{\theta}) = e^2 + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} > 0 \quad 1.47$$

Alors,

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}) = 2e\dot{e} + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} = 2a_m e^2 + e[2\tilde{\theta}^T \Phi(x) - 2\tilde{\theta}^T e b \Phi(x)] = 2a_m e^2 \leq 0$$

On peut utiliser Barbalat's lemma pour prouver que l'erreur de poursuite est asymptotiquement stable c-à-d ; $e(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Exemple 1.3 : soit $a = 1$, $b = 1$, $a_m = -1$, $b_m = 1$, $r(t) = \sin t$, et $f(x) = \theta^* x(x)$, où θ^* est un constant inconnu, mais on peut le fixer à 0.1 pour simulation. Alors, les gains de contrôle sont calculés comme suit :

$$\begin{aligned}\hat{k}_x &= \frac{a_m - a}{b} = -2 \\ \hat{k}_r &= \frac{b_m}{b} = 1\end{aligned}$$

Soit le contrôleur adaptatif donné par :

$$\begin{aligned}u &= -2x + r - \hat{\theta} x \\ \dot{\hat{\theta}} &= \gamma x e b\end{aligned}$$

Où $\gamma = 1$ est choisi comme une pondération d'adaptation pour $\hat{\theta}$

Il est à noter que le contrôleur est non linéaire quoique le système à contrôler soit linéaire.

La figure 1.13, illustre le schéma block de contrôleur adaptatif.

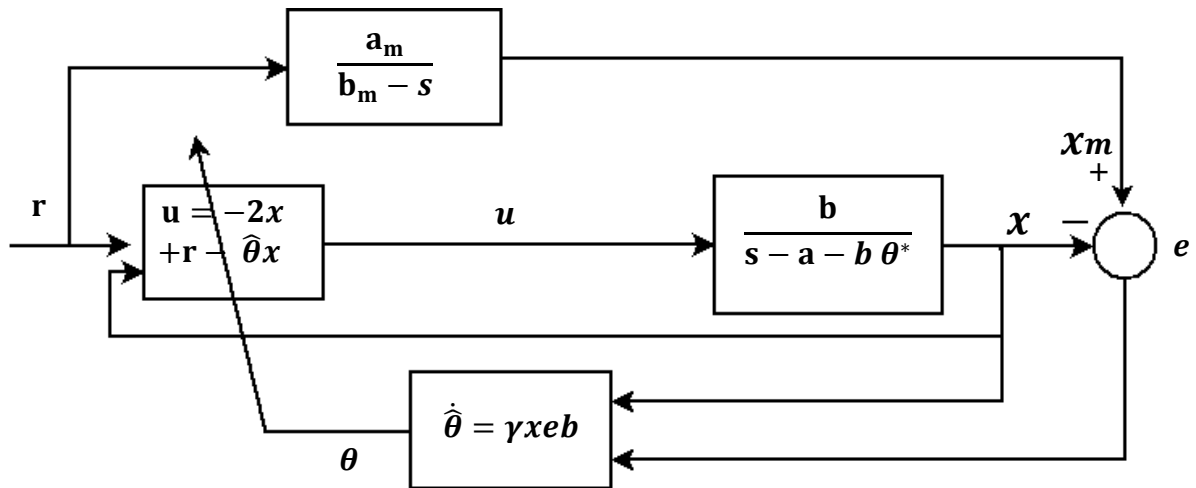


Figure 0.13 Schéma block de control adaptatif [1].

1.5.5.2. Synthèse indirect de MRAC par la théorie de Lyapunov

1) Système du premier ordre SISO

Considérons le même système de la partie MRAC direct, avec a et b inconnus, mais le signe de b est connu. Suivant les conditions de correspondance (*matching conditions*), si a et b sont estimables, alors les gains de loi de commande adaptative \hat{k}_x et \hat{k}_r peuvent être déterminés. Ainsi, l'objectif de la commande adaptative indirecte est l'estimation des paramètres du système qui seront utilisés à l'ajustement des gains de loi de commande [1].

Soit,

$$\hat{k}_x = \frac{a_m - \hat{a}(t)}{b(t)}$$

$$\hat{k}_r = \frac{b_m}{\hat{b}(t)} \quad 1.48$$

Avec $\tilde{a}(t) = \hat{a}(t) - a$ et $\tilde{b}(t) = \hat{b}(t) - b$ sont les erreurs d'estimations. Dans ce cas, l'expression du système devient :

$$\dot{x} = ax + (\hat{b} - b)[u + \theta^{*T} \Phi(x)] \quad 1.49$$

En substituant u , \hat{k}_x , \hat{k}_r par ses valeurs ($u = \hat{k}_x(t)x + \hat{k}_r(t)r - \hat{\theta}^T(t)\Phi(x)$, ($\hat{k}_x = \frac{a_m - \hat{a}(t)}{b(t)}$)

et ($\hat{k}_r = \frac{b_m}{\hat{b}(t)}$)) dans (1.49) on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + \hat{b} \left[\frac{a_m - \hat{a}}{\hat{b}} x + \frac{b_m}{\hat{b}} r - \theta^T \Phi(x) + \theta^{*T} \Phi(x) \right] - \tilde{b} \left[\frac{a_m - \hat{a}}{\tilde{b}} x + \frac{b_m}{\tilde{b}} r - \theta^T \Phi(x) \right. \\ &\quad \left. + \theta^{*T} \Phi(x) \right] \\ \dot{x} &= (a_m - \tilde{a})x + b_m r - b \tilde{\theta}^T \Phi(x) - \tilde{b} \left(\frac{a_m - \hat{a}}{\tilde{b}} x + \frac{b_m}{\tilde{b}} r \right)\end{aligned}\quad 1.50$$

Soit

$$\bar{u} = \hat{k}_x(t)x + \hat{k}_r(t)r \quad 1.51$$

L'erreur de poursuite est donnée par :

$$\dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x} = a_m e + \tilde{a}x + \tilde{b}\bar{u} + b \tilde{\theta}^T \Phi(x) \quad 1.52$$

Pour trouver les lois de commande adaptatives, on utilise la méthode directe de Lyapunov :

- **Preuve : proposer une fonction candidat de Lyapunov**

$$V(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta}) = e^2 + \frac{\tilde{a}^2}{\gamma_a} + \frac{\tilde{b}^2}{\gamma_b} + |b| \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} > 0 \quad 1.53$$

Où $\gamma_a > 0$ $\gamma_b > 0$ sont les paramètres de pondération de $\tilde{a}(t)$ et $\tilde{b}(t)$ respectivement.

Soit $\dot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta})$ la première dérivée de V tel que :

$$\begin{aligned}\dot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta}) &= 2e\dot{e} + \frac{2\tilde{a}\dot{\tilde{a}}}{\gamma_a} + \frac{2\tilde{b}\dot{\tilde{b}}}{\gamma_b} + 2|b|\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{V} &= 2a_m e^2 + 2\tilde{a} \left(xe + \frac{\dot{\tilde{a}}}{\gamma_a} \right) + 2\tilde{b} \left(\bar{u}e + \frac{\dot{\tilde{b}}}{\gamma_b} \right) + 2|b|\tilde{\theta}^T [\Phi(x)esgnb + \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}]\end{aligned}\quad 1.54$$

Puisque a et b sont constants, alors $\dot{\tilde{a}} = \hat{a}$ et $\dot{\tilde{b}} = \hat{b}$, les lois d'ajustement adaptative sont obtenues par :

$$\begin{aligned}\hat{a} &= -\gamma_a x e \\ \hat{b} &= -\gamma_b \bar{u} e \\ \hat{\theta} &= -\Gamma \Phi(x) esgnb\end{aligned}\quad 1.55$$

Alors,

$$\dot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta}) = 2a_m e^2 \leq 0 \quad 1.56$$

Puisque $\dot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta}) \leq 0$, donc $e(t)$, $\hat{a}(t)$, $\hat{b}(t)$ et $\hat{\theta}(t)$ sont bornées, donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta}) = V(e_0, \tilde{a}_0, \tilde{b}_0, \tilde{\theta}_0) + 2a_m \|e\|_2^2 \quad 1.57$$

Où $e(0) = 0_0$, $\tilde{a}(0) = \tilde{a}_0$, $\tilde{b}(0) = \tilde{b}_0$, $\tilde{\theta}(0) = \tilde{\theta}_0$

Donc, $V(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta})$ possède une limite finie lorsque $t \rightarrow \infty$, puisque $\|e\|_2$ existe, alors $e(t) \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$, mais $\|\dot{e}\| \in \mathcal{L}_\infty$.

$\dot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta})$ est uniformément continue si sa dérivée est bornée. La deuxième dérivée $\ddot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta})$ est égale à :

$$\ddot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta}) = 4a_m e \dot{e} = 4a_m e [a_m e + \tilde{a}x + \tilde{b}\bar{u} + b\tilde{\theta}^T \Phi(x)] \quad 1.58$$

Puisque $e(t)$, \hat{k}_x , \hat{k}_r et $\hat{\theta}$ sont bornées en vertu que $\dot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta}) \leq 0$, $x(t)$ est borné parce que $e(t)$ et $x_m(t)$ sont bornés, $\bar{u}(t)$ est borné (signal de commande) puisque $x(t)$ et $r(t)$ sont bornés, $\Phi(x)$ est bornée parce que $x(t)$ est borné ; donc, $\ddot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta})$ est bornée. Par conséquent, $\dot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta})$ est uniformément continue, selon Barbalat's lemma $\dot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta}) \rightarrow 0$, donc $e(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. L'erreur de poursuite est asymptotiquement stable.

Il est à noter que la possibilité que $\hat{b}(t) = 0$ est toujours existée. Dans ce cas la commande $u(t) \rightarrow \infty$. Afin d'éviter un tel cas, la loi d'ajustement de $\hat{b}(t)$ doit être modifiée de manière que le nouvel ajustement de $\hat{b}(t)$ soit appartenue à un espace dans \mathbb{R} qui ne contient pas $\hat{b}(t) = 0$.

On suppose que $\underline{b} \leq |\hat{b}|$



- 1- On commence par choisir $\hat{b}(0)$ sachant que : $|\hat{b}(0)| \geq \underline{b}$.
- 2- Tant que $\hat{b}(t)$ se situe dehors la zone interdite $|\hat{b}| \geq \underline{b}$, on utilise la loi d'ajustement $\dot{\hat{b}} = -\gamma_a \bar{u} e$.
- 3- Si $|\hat{b}| = \underline{b}$ et sa dérivée est positive ($\frac{d|\hat{b}|}{dt} = \dot{\hat{b}} \text{sgn}(\hat{b}) \geq 0$), on continue à utiliser la loi d'ajustement $\dot{\hat{b}} = -\gamma_a \bar{u} e$.
- 4- Si $|\hat{b}| = \underline{b}$ et sa dérivée est négative ($\frac{d|\hat{b}|}{dt} = \dot{\hat{b}} \text{sgn}(\hat{b}) < 0$), $\dot{\hat{b}} = 0$

Les modifications de loi d'ajustement de \hat{b} est donné par :

$$\begin{cases} -\gamma_a \bar{u} e & \text{si } |\hat{b}| \geq \underline{b} \\ -\gamma_a \bar{u} e & \text{si } |\hat{b}| = \underline{b} \text{ et } \frac{d|\hat{b}|}{dt} = \dot{\hat{b}} \text{sgn}(\hat{b}) \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad 1.59$$

- **Preuve :** à cause des nouvelles modifications de $\dot{\hat{b}}$, $\dot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta})$ elle n'a plus la même valeur et elle dépend des conditions : $|\hat{b}| = \underline{b}$ et $\frac{d|\hat{b}|}{dt}$;

$$\dot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta}) = 2a_m e^2 + 2\tilde{b} \left(\bar{u} e + \frac{\dot{\hat{b}}}{\gamma_b} \right) \quad 1.60$$

$$\begin{cases} 2a_m e^2 \leq 0 \text{ si } |\hat{b}| \geq \underline{b} \text{ ou } |\hat{b}| = \underline{b} \text{ et } \frac{d|\hat{b}|}{dt} = \hat{b} \operatorname{sgn}(b) \geq 0 \\ 2a_m e^2 + 2\tilde{b}\bar{u}e \text{ si } |\hat{b}| = \underline{b} \text{ et } \frac{d|\hat{b}|}{dt} = \hat{b} \operatorname{sgn}(b) < 0 \end{cases} \quad 1.61$$

On considère le second cas lorsque $|\hat{b}| = \underline{b}$ et $\frac{d|\hat{b}|}{dt} = \hat{b} \operatorname{sgn}(b) < 0$, où le signe de $\dot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta})$ est indéfini. Soit :

$$\frac{d|\hat{b}|}{dt} = \hat{b} \operatorname{sgn} b = -\gamma_b \bar{u} e \operatorname{sgn} b < 0 \Rightarrow \bar{u} e \operatorname{sgn} b > 0$$

On a $|\hat{b}| = \underline{b}$ alors

$$2\tilde{b}\bar{u}e = 2(\hat{b} - b)\bar{u}e = 2[|\hat{b}| \operatorname{sgn} b - |b| \operatorname{sgn} b] \bar{u}e = 2[\underline{b} - |b|] \bar{u} e \operatorname{sgn} b$$

$|b| \geq \underline{b}$ implique que $|b| = \underline{b} + \delta > 0$, où $\delta \geq 0$, alors $\bar{u} e \operatorname{sgn} b > 0$

Donc ;

$$2\tilde{b}\bar{u}e = 2(\underline{b} - \underline{b} - \delta) \bar{u} e \operatorname{sgn} b = -2\delta \bar{u} e \operatorname{sgn} b \leq 0$$

Par conséquent,

$$\dot{V}(e, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\theta}) = 2a_m e^2 + 2\tilde{b}\bar{u}e = 2a_m e^2 - 2\delta \bar{u} e \operatorname{sgn} b \leq 2a_m e^2 \leq 0$$

En utilisant le Barbalat's lemma on peut conclure que $e(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$

1.5.5.3. Synthèse direct de MRAC par la théorie de Lyapunov

1) Système de deuxième ordre SISO

Soit le système non linéaire de deuxième ordre SISO suivant :

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = b[u + f(y, \dot{y})] \quad 1.62$$

Où ζ et ω_n sont inconnus et $f(y, \dot{y}) = \theta^{*T} \Phi((y, \dot{y}))$

Soit $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = \dot{y}(t)$; et $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$, alors, la représentation d'état du système est la suivante :

$$\dot{x} = Ax + B[u + \theta^{*T} \Phi(x)] \quad 1.63$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad 1.64$$

Soit $x_{m1}(t) = y_m(t)$, $x_{m2} = \dot{y}_m$ et $x_m(t) = [x_{m1}(t) \ x_{m2}(t)]^T \in \mathbb{R}^2$. Le modèle de référence est donné par

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m r$$

Avec $r(t) \in R$ est un signal de commande borné, $A_m \in R^2 \times R^2$ est Hurwitz et connue, $B_m \in R^2$ est aussi connue.

a) CAS I : A et B inconnus mais le signe de b est connu

Le contrôleur idéal est donné par

$$u^* = K_x^* x + k_r^* r - \theta^{*T} \Phi(x) \quad 1.65$$

Avec

$k_x^* \in R^2$ et $k_r^* \in R$ sont des gains idéals constants et inconnus.

Les conditions de correspondances sont obtenues en comparant le système en boucle fermée avec le modèle de référence.

$$A + BK_x^* = A_m$$

$$Bk_r^* = B_m \quad 1.66$$

Il est à noter que les solutions de k_x^* et k_r^* ne sont pas toujours existées, puisque A, A_m et B, B_m peuvent avoir des structure différentes. Souvent, A et B sont des matrices définies, dans ce cas K_x^* et k_r^* peuvent être construits avec des techniques de contrôle non adaptative pour stabiliser le système en boucle fermée. Alors, les matrices A_m et B_m sont calculées à partir des matrices A, B, K_x^* et k_r^* .

Exemple 1.4 : soient le système du deuxième ordre SISO et le modèle de référence suivants [1]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -2 \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En utilisant le pseudo inverse, K_x^* et k_r^* sont obtenus par :

$$K_x^* = (B^T B)^{-1} B^T (A_m - A) = [0 \ 1] \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) = [-15 \ -1]$$

$$k_r^* = (B^T B)^{-1} B^T B_m = 2$$

Maintenant, on suppose que : $A_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -16 & -2 \end{bmatrix}$

Alors, la solution de K_x^* est le même (vérifié !), mais les conditions de correspondance ne sont pas remplies.

$$A + BK_x^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -2 \end{bmatrix} \neq A_m$$

Il est important de supposer qu'il existe des constants K_x^* et k_r^* mais inconnus, satisfont les conditions de correspondances.

Le contrôleur global en boucle fermée est conçu comme suit :

$$u = \hat{K}_x x + \hat{k}_r r - \hat{\theta}^T \Phi(x) \quad 1.67$$

Avec $\hat{K}_x \in R^2$ et $\hat{k}_r \in R$

Soit

$$\begin{aligned} \tilde{K}_x(t) &= \hat{K}_x(t) - K_x^* \\ \tilde{k}_r(t) &= \hat{k}_r(t) - k_r^* \\ \tilde{\theta} &= \hat{\theta}(t) - \theta^* \end{aligned} \quad 1.68$$

Le système en boucle fermée en fonction des erreurs d'estimation, devient :

$$\dot{x} = (A + BK_x^* + B\tilde{K}_x)x + (Bk_r^* + B\tilde{k}_r)r - B\tilde{\theta}^T \Phi(x) \quad 1.69$$

L'erreur de poursuite est donnée par $e(t) = x_m - x(t) \in R^2$, et la dynamique d'erreur en boucle fermée est donnée par :

$$\dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x} = A_m e - B\tilde{K}_x x - B\tilde{k}_r r + B\tilde{\theta}^T \Phi(x) \quad 1.70$$

- **Preuve : pour trouver les lois d'ajustement, on choisit la fonction candidat de Lyapunov suivante :**

$$V(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) = e^T P e + |b|(\tilde{K}_x \Gamma_x^{-1} \tilde{K}_x^T + \frac{\tilde{k}_r^2}{\gamma_r} + \tilde{\theta}^T \Gamma_\theta^{-1} \tilde{\theta}) > 0 \quad 1.71$$

Avec $\Gamma_x = \Gamma_x^T > 0 \in R^2 \times R^2$ est une matrice de pondération définie positive pour \tilde{K}_x et $P = P^T > 0 \in R^2 \times R^2$ la solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$P A_m + A_m^T P = -Q \quad 1.72$$

Avec $Q = Q^T > 0 \in R^2 \times R^2$

La dérivée $\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta})$ est donnée par :

$$\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + |b|(2\tilde{K}_x \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x^T + \frac{2\tilde{k}_r \dot{\tilde{k}}_r}{\gamma_r} + 2\tilde{\theta}^T \Gamma_\theta^{-1} \dot{\tilde{\theta}}) \quad 1.73$$

En substituant l'équation d'erreur de poursuite dans l'équation (1.73) on aura :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) = & e^T (PA_m + A_m^T P)e + e^T PB[-\tilde{K}_x x - \tilde{k}_r r + \tilde{\theta}^T \Phi(x)] + |b|(2\tilde{K}_x \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x^T \\ & + \frac{2\tilde{k}_r \dot{\tilde{k}}_r}{\gamma_r} + 2\tilde{\theta}^T \Gamma_\theta^{-1} \dot{\tilde{\theta}}) \end{aligned}$$

Soit $P_{ij}, i = 1, 2, j = 1, 2$ les éléments de P dont :

$$2e^T PB = 2e^T \bar{P}b \in R \quad 1.74$$

$$\text{Où } \bar{P} = [P_{12} \ P_{22}]^T$$

Alors, $\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta})$ peut être exprimée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) = & -e^T Qe + 2|b|\text{sgn}(b)[- \tilde{K}_x x - \tilde{k}_r r + \tilde{\theta}^T \Phi(x)]e^T \bar{P} + |b|(2\tilde{K}_x \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x^T \\ & + \frac{2\tilde{k}_r \dot{\tilde{k}}_r}{\gamma_r} + 2\tilde{\theta}^T \Gamma_\theta^{-1} \dot{\tilde{\theta}}) \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) = & -e^T Qe + 2|b|\tilde{K}_x \left(-xe^T \bar{P} \text{sgn}b + \Gamma_x^{-1} \dot{\tilde{K}}_x^T \right) + 2|b|\tilde{k}_r \left(-re^T \bar{P} \text{sgn}b + \right. \\ & \left. \frac{2\dot{\tilde{k}}_r}{\gamma_r} \right) + 2|b|\tilde{\theta}^T [\Phi(x)e^T \bar{P} \text{sgn}b + \Gamma_\theta^{-1} \dot{\tilde{\theta}}] \end{aligned} \quad 1.75$$

Par conséquent, les lois d'adaptation sont obtenues :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{K}}_x^T &= \Gamma_x x e^T \bar{P} \text{sgn}b \\ \dot{\tilde{k}}_r &= \gamma_r r e^T \bar{P} \text{sgn}b \\ \dot{\tilde{\theta}} &= -\Gamma_\theta \Phi(x) e^T \bar{P} \text{sgn}b \end{aligned} \quad 1.76$$

Alors

$$\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) = -e^T Qe \leq -\lambda_m(Q) \|e\|_2^2 \leq 0 \quad 1.77$$

Puisque $\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) \leq 0$, alors, $e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r$ et $\tilde{\theta}$ sont bornés.

Alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) = V(e_0, \tilde{K}_{x0}, \tilde{k}_{r0}, \tilde{\theta}_0) - \lambda_m(Q) \|e\|_2^2 \quad 1.78$$

$V(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta})$ ayant une limite finie lorsque $t \rightarrow \infty$. Puisque $\|e\|_2$ existe, alors $e(t) \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_\infty$, mais $\|\dot{e}\| \in \mathcal{L}_\infty$.

$\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta})$ est uniformément continue si sa dérivée est bornée. La deuxième dérivée

$\ddot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta})$ est égale à :

$$\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) = -\dot{e}^T Q e - e^T Q \dot{e} = -e^T (QA + A^T Q) e - 2e^T Q [A_m e - B \tilde{K}_x x - B \tilde{k}_r r + B \tilde{\theta}^T \Phi(x)] \quad 1.79$$

Puisque $e(t)$, \tilde{K}_x , \tilde{k}_r et $\tilde{\theta}$ sont bornées en vertu que $\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) \leq 0$, $x(t)$ est borné parce que $e(t)$ et $x_m(t)$ sont bornés, $r(t)$ est borné (signal de commande), $\Phi(x)$ est bornée parce que $x(t)$ est borné ; donc, $\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta})$ est bornée. Par conséquent, $\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta})$ est uniformément continue, selon Barbalat's lemma $\dot{V}(e, \tilde{K}_x, \tilde{k}_r, \tilde{\theta}) \rightarrow 0$, donc $e(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. L'erreur de poursuite est asymptotiquement stable.

b) CAS II : A et B sont connues

Si A et B sont connus, alors il est supposé que les gains $\hat{k}_x(t)$, $\hat{k}_r(t)$ satisfont les conditions de correspondances :

$$\begin{aligned} A + BK_x &= A_m \\ Bk_r &= B_m \end{aligned} \quad 1.80$$

Dans le cas de système de deuxième ordre, si A_m et B_m possèdent la même structure que celle de A et B respectivement, alors K_x et k_r peuvent être déterminés en utilisant la méthode de pseudo-inverse.

Soit la commande adaptative suivante :

$$u = K_x x + k_r r - \theta^T \Phi(x) \quad 1.81$$

Le système en boucle fermée est exprimé par l'équation suivante :

$$\dot{x} = (A + BK_x)x + k_r r - B \tilde{\theta}^T \Phi(x) \quad 1.82$$

L'équation de l'erreur de poursuite est donnée par

$$\dot{e} = \dot{x}_m - \dot{x} = A_m e + B \tilde{\theta}^T \Phi(x) \quad 1.83$$

- **Preuve : on choisit la fonction candidat de Lyapunov suivante :**

$$V(e, \tilde{\theta}) = e^T P e + \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad 1.84$$

Alors, $\dot{V}(e, \tilde{\theta})$ est évaluée comme suit :

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}) = -e^T Q e + 2e^T P B \tilde{\theta}^T \Phi(x) + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}$$

Puisque $e^T P B \in R$ est un scalaire, alors

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{\theta}) &= -e^T Q e + 2\tilde{\theta}^T \Phi(x) e^T P B + 2\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \\ &= -e^T Q e + 2\tilde{\theta}^T [\Phi(x) e^T P B + \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}] \end{aligned} \quad 1.85$$

Par conséquent, on obtient la loi de commande adaptative :

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma^{-1} \Phi(x) e^T P B \quad 1.86$$

Alors,

$$\dot{V}(e, \tilde{\theta}) = -e^T Q e \leq -\lambda_m(Q) \|e\|^2 \leq 0$$

Puisque $e(t)$ et $\tilde{\theta}(t)$ sont bornées en vertu que $\dot{V}(e, \tilde{\theta}) \leq 0$. En utilisant le même argument de Barbalat's lemma comme dans les sections précédentes, on peut constater que $\dot{V}(e, \tilde{\theta})$ est uniformément continue, alors $\dot{V}(e, \tilde{\theta}) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. L'erreur de poursuite est asymptotiquement stable, et $e(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

1.5.5.4. Synthèse indirect de MRAC par la théorie de Lyapunov

1) Système de deuxième ordre SISO

La méthode MRAC indirecte pour les systèmes de deuxième ordre est pratiquement similaire à celle des systèmes de premier ordre. Considérons le système de deuxième ordre défini auparavant (1.62), avec A et B inconnues, mais le signe de B est connu. En parallèle, on suppose qu'il existe K_x et k_r satisfont le modèle des conditions de correspondance, et que A_m et B_m possèdent la même structure que A et B, respectivement, pour l'avoir estimées ces dernières:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_m^2 & -2\zeta_m\omega_m \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ b_m \end{bmatrix}$$

Le modèle des conditions de correspondance est donné par :

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) + \hat{B}(t)\hat{K}_x(t) &= A_m \\ \hat{B}(t)k_r(t) &= B_m \end{aligned} \quad 1.87$$

Duquel $\hat{K}_x(t)$ et $k_r(t)$ sont déterminés par :

$$\hat{K}_x = (\hat{B}^T \hat{B})^{-1} \hat{B}^T (A_m - \hat{A}) = \frac{1}{\hat{b}^2} [0 \ \hat{b}] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_m^2 + \hat{\omega}_n^2 & -2\zeta_m\omega_m + 2\hat{\zeta}\hat{\omega}_n \end{bmatrix}$$

$$\hat{K}_x = \frac{1}{\hat{b}} [-\omega_m^2 + \hat{\omega}_n^2 - 2\zeta_m\omega_m + 2\hat{\zeta}\hat{\omega}_n] \quad 1.88$$

$$k_r = (\hat{B}^T \hat{B})^{-1} \hat{B}^T B_m = \frac{1}{\hat{b}^2} [0 \ \hat{b}] \begin{bmatrix} 0 \\ b_m \end{bmatrix} = \frac{b_m}{\hat{b}} \quad 1.89$$

Où $\hat{A}(t)$, $\hat{B}(t)$, $\hat{\omega}_n(t)$ et $\hat{\zeta}(t)$ sont les estimation de A , B , ω_n et ζ , respectivement. Soit $\tilde{A}(t) = \hat{A}(t) - A$ et $\tilde{B}(t) = \hat{B}(t) - B$ les erreurs d'estimation. Ainsi, le modèle du système devient :

$$\dot{x} = (\hat{A} - A)x + (\hat{B} - B)[u + \theta^{*T} \Phi(x)] \quad 1.90$$

En substituant les précédentes équations on aura :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\hat{A} - \tilde{A})x + \hat{B}[\hat{K}_x x + \hat{k}_r r - \hat{\theta}^T \Phi(x) + \theta^{*T} \Phi(x)] - B[\hat{K}_x x + \hat{k}_r r - \hat{\theta}^T \Phi(x) \\ &\quad + \theta^{*T} \Phi(x)] \\ \dot{x} &= (\hat{A} + \hat{B}\hat{K}_x - \tilde{A})x + \hat{B}\hat{k}_r r - B\tilde{\theta}^T \Phi(x) - \tilde{B}(\hat{K}_x x + \hat{k}_r r) \end{aligned} \quad 1.91$$

Soit

$$\bar{u} = \hat{K}_x(t)x + \hat{k}_r(t)r \quad 1.92$$

Ainsi l'équation d'erreur de poursuite est donnée par :

$$\dot{e} = x_m - \dot{x} = A_m e + \tilde{A}x + \tilde{B}\bar{u} + B\tilde{\theta}^T \Phi(x) \quad 1.93$$

- **Preuve : choisir la fonction candidat de Lyapunov**

$$V(e, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\theta}) = e^T P e + \text{trace}(\tilde{A} \Gamma_A^{-1} \tilde{A}^T) + \frac{\tilde{B}^T \tilde{B}}{\gamma_b} + |b| \tilde{\theta}^T \Gamma_\theta^{-1} \quad 1.94$$

Avec $\Gamma_A = \Gamma_A^T > 0 \in R^2 X R^2$ est une matrice de pondération définie positive pour $\hat{A}(t)$. Il est noté que la matrice *trace* est utilisée dans la fonction candidat de Lyapunov pour rendre le produit matriciel à une quantité scalaire.

La dérivée de la fonction candidat de Lyapunov $\dot{V}(e, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\theta})$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\theta}) &= -e^T Q e + 2e^T P [\tilde{A}x + \tilde{B}\bar{u} + B\tilde{\theta}^T \Phi(x)] + \text{trace} \left(2\tilde{A} \Gamma_A^{-1} \dot{\tilde{A}}^T \right) \\ &\quad + \frac{2\tilde{B}^T \dot{\tilde{B}}}{\gamma_b} + 2|b| \tilde{\theta}^T \Gamma_\theta^{-1} \dot{\tilde{\theta}} \end{aligned} \quad 1.95$$

On considère que l'opérateur *trace* est un produit de deux vecteurs $C = [c_1 \ c_1 \ \dots \ c_n]^T \in R^n$ et $D = [d_1 \ d_1 \ \dots \ d_n]^T \in R^n$. Il est à noter que $C^T D = D^T C \in R$ et $CD^T \in R^n X R^n$. Alors, l'un des identités de l'opérateur *trace* est donné par :

$$\text{trace}(CD^T) = C^T D = D^T C \quad 1.96$$

Cela peut être montré en évaluant les deux côtés de l'identité :

$$\begin{aligned} C^T D &= D^T C = \sum_{i=1}^n c_i d_i \\ CD^T &= \{c_i d_{ij}\}, i, j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad 1.97$$

L'opérateur *trace* est la somme de tous les éléments de diagonale, par conséquent :

$$\text{trace}(CD^T) = \sum_{i=1}^n c_i d_i = C^T D = D^T C \quad 1.98$$

En utilisant cet opérateur pour exprimer le terme $2e^T P \tilde{A}x$:

$$2(e^T P)(\tilde{A}x) = \text{trace}(2\tilde{A}x e^T P) \quad 1.99$$

Aussi

$$2(e^T P)(\tilde{B}) = 2\tilde{B}^T P e \quad 1.100$$

Et

$$2(e^T P B)[\tilde{\theta}^T \Phi(x)] = 2[2\tilde{\theta}^T \Phi(x) e^T P B] = 2\tilde{\theta}^T \Phi(x) e^T \bar{P} |b| \text{sgn}(b) \quad 1.101$$

Avec $\bar{P} = [P_{12} \ P_{22}]^T$ et les termes $e^T P B$ et $e^T P \tilde{B}$ sont des scalaires, par conséquent :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\theta}) = & -e^T Q e + \text{trace} \left[2\tilde{A} \left(x e^T P + \Gamma_A^{-1} \dot{\hat{A}}^T \right) \right] \\ & + 2\tilde{B}^T \left(P e \bar{u} + \frac{\dot{\hat{B}}}{\gamma_b} \right) + 2|b| \tilde{\theta}^T [\Phi(x) e^T \bar{P} \text{sgn} b + \Gamma_\theta^{-1} \dot{\hat{\theta}}] \end{aligned} \quad 1.102$$

Ainsi, on obtient les lois d'adaptation à partir de $\dot{V}(e, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\theta})$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{A}}^T &= -\Gamma_A^{-1} x e^T P \\ \dot{\hat{B}} &= -\gamma_b P e \bar{u} \\ \dot{\hat{\theta}} &= -\Gamma_\theta^{-1} \Phi(x) e^T \bar{P} \text{sgn} b \end{aligned} \quad 1.103$$

Alors

$$\dot{V}(e, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\theta}) = -e^T Q e \leq -\lambda_m(Q) \|e\|^2$$

Puisque $\dot{V}(e, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\theta}) \leq -\lambda_m(Q) \|e\|^2$, alors, $e, \tilde{A}(t), \tilde{B}(t)$ et $\tilde{\theta}(t)$ sont bornés.

$V(e, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\theta})$ possède une limite finie lorsque $t \rightarrow \infty$ puisque :

$$V(t \rightarrow \infty) = V(t_0) - \int_{t_0}^{\infty} \lambda_m(Q) \|e\|^2 dt < \infty$$

On peut montrer que $\dot{V}(e, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{\theta})$ est uniformément continue si on prouve que sa dérivée est bornée. Dans ce cas, en appliquant Barbalat's lemma, on peut conclure que l'erreur de poursuite est asymptotiquement stable avec $e(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Les expressions de paramètres estimés sont calculées comme suit :

Soit

$$\hat{A} = [0 \ 1] \hat{A} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\hat{\omega}_n^2 & -2\hat{\zeta}\hat{\omega}_n \end{bmatrix} = [-\hat{\omega}_n^2 \quad -2\hat{\zeta}\hat{\omega}_n]$$

Et

$$\hat{b} = [0 \ 1] \hat{B} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{b} \end{bmatrix}$$

Alors, les lois d'ajustement peuvent être exprimées en termes des paramètres estimés ω_n et ζ

$$\begin{aligned}\dot{\hat{A}} &= -\Gamma_A^{-1} x e^T P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\Gamma_A^{-1} x e^T \bar{P} \\ \dot{\hat{b}} &= -\gamma_b [0 \ 1] P e \bar{u} = -\gamma_b P^T e \bar{u}\end{aligned}\quad 1.104$$

Soit

$$\Gamma_A = \begin{bmatrix} \gamma_\omega & 0 \\ 0 & -\gamma_\zeta \end{bmatrix}$$

Alors,

$$\frac{d}{dt}(-\hat{\omega}_n^2) = -\gamma_\omega x_1 e^T \bar{P}$$

$$\dot{\hat{\omega}}_n = \frac{\gamma_\omega x_1 e^T \bar{P}}{2\hat{\omega}_n}$$

Et

$$\frac{d}{dt}(-2\hat{\zeta}\hat{\omega}_n) = -2\hat{\omega}_n\dot{\hat{\zeta}} - 2\hat{\zeta}\dot{\hat{\omega}}_n = -\gamma_\zeta x_2 e^T \bar{P}$$

ou

$$\dot{\hat{\zeta}} = \frac{(\gamma_\zeta x_2 \hat{\omega}_n - \gamma_\omega x_1 \hat{\zeta}) e^T \bar{P}}{2\hat{\omega}_n^2}\quad 1.105$$

Pour prévenir la possibilité de $\hat{\omega}_n(t) = 0$ ou $\hat{b}(t) = 0$, les deux lois d'ajustement pour l'estimation de $\hat{\omega}_n(t)$ et $\hat{b}(t)$ doivent être modifiées par la méthode de projection selon les conditions suivantes :

$$\dot{\hat{\omega}}_n = \begin{cases} \frac{\gamma_\omega x_1 e^T \bar{P}}{2\hat{\omega}_n} & \text{si } \hat{\omega}_n > \omega_0 > 0 \text{ ou si } \hat{\omega}_n = \omega_0 \text{ et } \dot{\hat{\omega}}_n \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}\quad 1.106$$

$$\dot{\hat{b}} = \begin{cases} -\gamma_b P^T e \bar{u} & \text{if } |\hat{b}| > b_0 \text{ ou si } |\hat{b}| = b_0 \text{ et } \frac{d|\hat{b}|}{dt} \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}\quad 1.107$$

Dans les lois d'ajustement modifiées de $\hat{\omega}_n(t)$, il est supposé que $\hat{\omega}_n(t)$ soit toujours une quantité positive pour un système physiquement réalisable [1].

1.5.6. La différence entre MRAC directe et indirecte

Dans les deux approches, nous avons considéré que les paramètres du système peuvent être inconnus (incertains). L'objectif était de construire un contrôleur permet au système de suivre un modèle de référence.

Généralement, l'utilisation de l'une de ces méthodes dépend principalement de l'application elle-même, dans certains cas l'approche directe peut être la plus pratique. Pour l'approche indirecte, elle dispose d'une étape supplémentaire pour calculer les paramètres de contrôleur en utilisant les relations d'algèbre. Concrètement, cette étape est plus dispendieuse, dans ce cas la méthode directe est la plus bénéfique. En revanche, dans certains cas, on bénéficie de l'estimation des paramètres du système (\hat{a}, \hat{b}) .

1.5.7. Comparaison entre les méthodes de Lyapunov et MIT

Soit le modèle de référence linéaire à temps invariant du premier ordre [2]:

$$\frac{dy_m}{dt} = -a_m y_m + b_m y_c$$

On souhaite imposer son comportement à un système qui est aussi de premier ordre

$$\frac{dy}{dt} = -ay + bu$$

par une commande proportionnelle sur la mesure et la consigne

$$u = \theta_1 y_c - \theta_2 y$$

On rappelle que l'erreur de poursuite est donnée par

$$e = y - y_m$$

On obtient la dérivée temporelle de de l'erreur en remplaçant les expressions de $\frac{dy_m}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \frac{dy}{dt} - \frac{dy_m}{dt} = -ay + bu + a_m y_m - b_m y_c \\ &= -ay + b(\theta_1 y_c - \theta_2 y) + a_m y_m - b_m y_c \\ &= -ay + b\theta_1 y_c - b\theta_2 y + a_m y - a_m y + a_m y_m - b_m y_c \end{aligned}$$

ce qui conduit après simplification à l'équation différentielle suivante de l'erreur de poursuite

$$\frac{de}{dt} = -a_m e - (b\theta_2 + a - a_m)y + (b\theta_1 - b_m)y_c$$

Si les paramètres du système à commander étaient connus, alors en posant

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_1^0 = \frac{b_m}{b} \\ \theta_2 &= \theta_2^0 = \frac{a_m - a}{b} \end{aligned}$$

Selon Lemme de Barbalat, alors :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Comme les paramètres a et b sont inconnus, on construira le mécanisme d'ajustement des paramètres qui va faire converger θ_1 vers θ_1^0 et θ_2 vers θ_2^0

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_1 = \theta_1^0 \quad ; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_2 = \theta_2^0$$

On introduit la fonction quadratique suivante :

$$V(e, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \left[e^2 + \frac{1}{\gamma b} (\theta_1 - \theta_1^0)^2 + \frac{1}{\gamma b} (\theta_2 - \theta_2^0)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[e^2 + \frac{1}{\gamma b} (b\theta_1 - b_m)^2 + \frac{1}{\gamma b} (b\theta_2 + a - a_m)^2 \right]$$

avec $\gamma > 0$ une constante strictement positive. On remarque que $V = 0$ si $e = 0$, $\theta_1 = \theta_1^0$ et $\theta_2 = \theta_2^0$. La dérivée temporelle de la fonction V est donnée par

$$\frac{dv}{dt} = e \frac{de}{dt} + \frac{1}{\gamma} (b\theta_1 - b_m) \frac{d\theta_1}{dt} + \frac{1}{\gamma} (b\theta_2 + a - a_m) \frac{d\theta_2}{dt}$$

$$- a_m e^2 + \frac{1}{\gamma} (b\theta_1 - b_m) \left(\frac{d\theta_1}{dt} + \gamma y_c e \right) + \frac{1}{\gamma} (b\theta_2 + a - a_m) \left(\frac{d\theta_2}{dt} - \gamma y e \right)$$

Si la mise à jours des paramètres de réglage θ_1 et θ_2 est la suivante :

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma y_c e$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \gamma y e$$

Cette mise à jour conduit à l'expression suivante de dV/dt

$$\frac{dv}{dt} = -a_m e^2$$

On remarque la dérivée de la fonction V est demi-définie négative (elle n'est pas définie négative). Donc, $V(t) \leq V(0)$, par conséquent, e , θ_1 et θ_2 sont obligatoirement bornés, donc, $y = e + y_c$ et aussi bornée.

En utilisant le théorème de Lyapounov on aura :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = -2a_m e \frac{de}{dt} = -2a_m e (-a_m e - (b\theta_2 + a - a_m)y + (b\theta_1 - b_m)y_c)$$

On supposant que en supposant que le modèle de référence $G_m(s)$ est stable et la consigne y_c bornée. Alors $\frac{d^2 v}{dt^2}$ est aussi bornée, donc $\frac{dv}{dt}$ est uniformément continue. Le théorème de Lyapounov permet de conclure que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

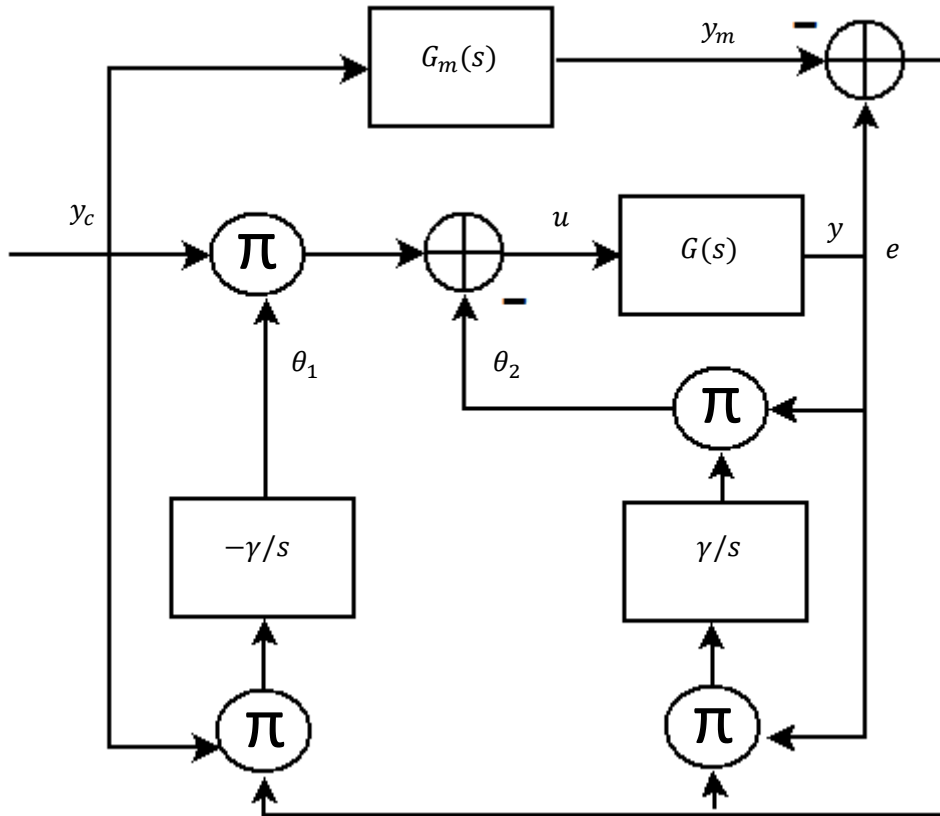


Figure 0.14 Schéma bloc du mécanisme d'ajustement selon la théorie de Lyapunov pour un système du premier ordre.

Le tableau suivant compare les méthodes de synthèse d'un MRAC sur l'exemple du système du premier ordre pour la poursuite d'un modèle de référence du premier ordre avec une commande proportionnelle sur la consigne et la sortie.

Tableau 1.1 comparaison entre les méthodes de Lyapunov et MIT.

Lyapounov	MIT
$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma y_c e$ $\frac{d\theta_2}{dt} = \gamma y_c e$	$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma \left(\frac{a_m}{s + a_m} y_c \right) e$ $\frac{d\theta_2}{dt} = \gamma \left(\frac{a_m}{s + a_m} y \right) e$

La règle de mise à jours utilisant la méthode MIT peut être obtenue de la règle la méthode de Lyapunov en remplaçant les signaux y_c et y par leur valeur filtrée $\left(\frac{a_m}{s+a_m} y_c \right)$ et $\left(\frac{a_m}{s+a_m} y \right)$.

Dans les deux cas, la règle d'adaptation peut être écrite comme suit :

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi e$$

Avec

θ : vecteur des paramètres,

$\varphi = [-y_c \ y]^T$: Règle de Lyapounov

$\varphi = \frac{a_m}{s+a_m} [-y_c \ y]^T$: Règle de MIT

La règle de Lyapounov est plus simple et elle ne nécessite pas de filtrage.

1.5.8. Synthèse de MRAC dans l'espace d'état : Cas des systèmes MIMO

Soit le Linéaire décrit par sa représentation d'état [2]:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B \quad 1.108$$

On souhaite poursuivre un modèle de référence donné également par sa représentation d'état.

$$\frac{dx_m}{dt} = A_m x_m + B_m y_c \quad 1.109$$

On utilise une commande qui combine un retour d'état linéaire et une action proportionnelle sur la consigne.

$$u = My_c + Lx \quad 1.110$$

Le système en boucle fermée devient :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (A - BL)x + BMy_c \\ &= A_c(\theta)x + B_c(\theta) \end{aligned} \quad 1.111$$

La paramétrisation de la loi de commande peut se faire de différentes manières. Ceci revient à choisir les paramètres des matrices M et L.

1.5.8.1. Condition de compatibilité

Elle exprime le fait qu'il existe des valeurs de paramètres de commande tel que le système en boucle fermée soit identique au modèle de référence.

$$\exists \theta^0 : \begin{cases} A_c(\theta^0) = A_m \\ B_c(\theta^0) = B_m \end{cases} \quad 1.112$$

Dans ce cas, on réalise une poursuite parfaite du modèle de référence. On a alors

$$\begin{aligned} A - A_m &= BL \\ B_m &= BM \end{aligned} \quad 1.113$$

On peut conclure de la dernière équation que les colonnes de la matrice $(A - A_m)$ sont une combinaison linéaire des colonnes de B et que les colonnes de B_m sont aussi une combinaison linéaire des colonnes de B. Si B et B_m sont linéairement indépendantes, on peut écrire

$$\begin{aligned} L &= (B^T B)^{-1} B^T (A - A_m) \\ M &= (B^T B)^{-1} B^T B_m \end{aligned} \quad 1.114$$

1.5.8.2. Equation différentielle de l'erreur

L'erreur de poursuite du vecteur d'état est définie par

$$e = x - x_m$$

sa dérivée temporelle est alors

$$\frac{de}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_m}{dt} = Ax + Bu - A_m x_m - B_m y_c \quad 1.115$$

en rajoutant en soustrayant $A_m x$ au second terme de l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= A_m e + (A - A_m - BL)x + (BM - B_m)y_c \\ &= A_m e + (A_c(\theta) - A_m)x + (B_c(\theta) - B_m)y_c \end{aligned}$$

En posant

$$A_c(\theta^0) = A_m$$

$$B_c(\theta^0) = B_m$$

On obtient

$$\begin{aligned} \frac{de}{dt} &= A_m e + (A_c(\theta) - A_c(\theta^0))x + (B_c(\theta) - B_c(\theta^0))y_c \\ \frac{de}{dt} &= A_m e + \psi(\theta - \theta^0) \end{aligned} \quad 1.116$$

On choisit la fonction quadratique candidate suivante :

$$V(e, \theta) = \frac{1}{2} [\gamma e^T P e + (\theta - \theta^0)^T (\theta - \theta^0)] \quad 1.117$$

avec $P > 0$ une matrice définie positive. En supposant que Q est une matrice qui vérifie l'équation suivante

$$A_m^T P + P A_m = -Q \quad 1.118$$

La dérivée temporelle de V , après calcul, est donnée par

$$\frac{dV(e, \theta)}{dt} = -\frac{\gamma}{2} e^T Q e + \gamma (\theta - \theta^0) \psi^T P e + (\theta - \theta^0)^T \frac{d\theta}{dt}$$

$$= -\frac{\gamma}{2} e^T Q e + (\theta - \theta^0)^T \left(\frac{d\theta}{dt} + \gamma \psi^T P e \right) \quad 1.119$$

Afin de rendre dV/dt semi-définie négative, on choisit la règle d'adaptation suivante

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \psi^T P e$$

Ce qui donne

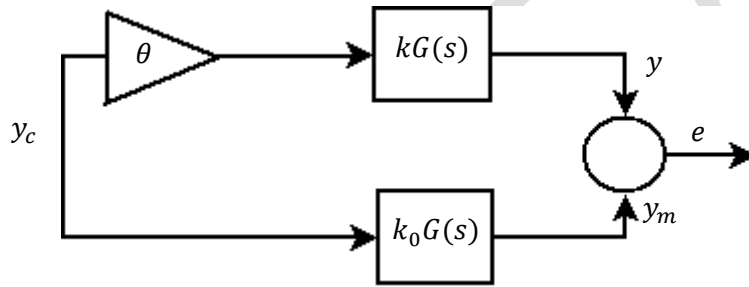
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\gamma}{2} e^T Q e \quad 1.120$$

De même qu'avec l'exemple précédent, en procédant de la même façon et en utilisant le théorème de Lyapounov et le Lemme de Barbalat, on conclut que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Exemple 1.5 (Commande adaptative en boucle ouverte par approche d'état)

Soit le linéaire modélisé par la fonction de transfert $G(s)$ multiplié par le gain inconnu k .



On souhaite poursuivre le modèle de référence décrit par sa fonction de transfert $G_m(s)$ donnée par :

$$G_m = k_0 G(s)$$

On applique une commande proportionnelle en boucle ouverte

$$u = \theta y_c$$

Si le gain k était connu, la poursuite parfaite du modèle de référence est réalisée si

$$\theta k G(s) = G_m = k_0 G(s)$$

Ce qui implique la valeur suivante pour le gain θ^0

$$\theta^0 = \frac{k_0}{k}$$

L'erreur de poursuite e du modèle de référence est donnée par

$$e = y_m - y = (kG(s)\theta - k_0G(s))y_c$$

$$e = kG(s)(\theta - \theta^0)$$

Si (A,B) est une réalisation de la fonction de transfert $G(s)$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(\theta - \theta^0)y_c$$

$$e = Cx$$

Si $dx/dt = Ax$ est asymptotiquement stable, alors il existe des matrices définies positives P et Q , dont

$$A^T P + PA = -Q$$

En choisissant la fonction suivante comme la fonction candidate de Lyapounov :

$$V(e, \theta) = \frac{1}{2}[\gamma x^T P x + (\theta - \theta^0)^2]$$

On obtient

$$\frac{dV(e, \theta)}{dt} = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{dx^T}{dt} P x + x^T P \frac{dx}{dt} \right) + (\theta - \theta^0) \frac{d\theta}{dt}$$

On remplace l'expression de dx/dt donnée par l'équation :

$$\frac{dV(e, \theta)}{dt} = \frac{\gamma}{2} ((Ax + B(\theta - \theta^0))^T P x + x^T P (Ax + B(\theta - \theta^0))) + (\theta - \theta^0) \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dV(e, \theta)}{dt} = -\frac{\gamma}{2} x^T Q x + (\theta - \theta^0) \left(\frac{d\theta}{dt} + \gamma y_c B^T P x \right)$$

Si la loi de paramètre d'ajustement est choisie comme suivant :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma y_c B^T P x$$

Donc, la dérivée de la fonction de Lyapounov est toujours négative tant que $x \neq 0$.

$$\frac{dV(e, \theta)}{dt} = -\frac{\gamma}{2} x^T Q x$$

Le résultat obtenu est restreint, car cet ajustement nécessite néanmoins la connaissance de tous les variables d'état x . Afin d'y remédier on choisit P tel que :

$$B^T P = C$$

Comme C est la matrice de sortie, ceci revient à utiliser un retour de sortie au lieu d'un retour d'état. Il suffit dans ce cas de connaître la valeur de la sortie. On tire ainsi

$$B^T P x = C x = e$$

Soit finalement

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma y_c e$$