Université de 20 Août 1955, Skikda
Département de Génie Electrique
M2 Automatique et systèmes
Commande adaptative et prédictive

TD n^0 2
Commande adaptative par modèle de référence

Exercice 2.1

Soit le système à régler est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$W_0(p) = \frac{1}{p + a(t)}$$

Pour la compensation des variations du paramètre a(t), il est prévu dans la boucle de retour (figure 2.1) un élément de gain variable b(t).

Dont : $W_R = b(t)$.

La fonction de transfert de modèle de référence est donnée par :

$$W_m(p) = \frac{1}{p + a_0 + b_0}$$

Soit le critère de performance est donné sous la forme :

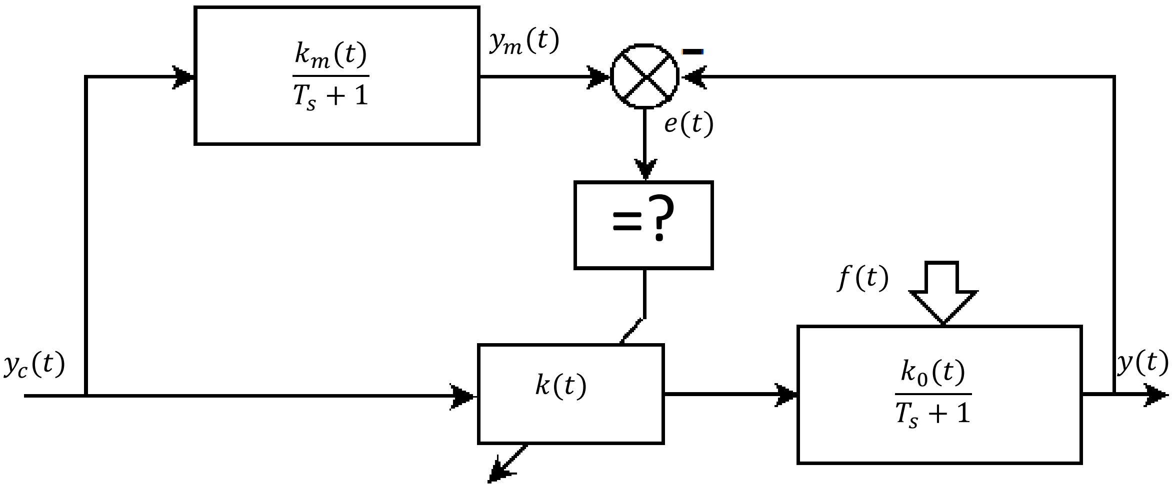
$$J(e) = \frac{1}{2} e^2(t)$$

1- Tracer le schéma bloc du système adaptatif.
2- Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $W_f(p)$.
3- Déterminer l'algorithme du mécanisme d'ajustement en utilisant la méthode de gradient.

Exercice 2.2

Considérons un simple système adaptatif par modèle de référence, représenté à la figure ci-après. Dans ce système, il s'agit d'ajuster le gain k(t) de façon à ce qu'il soit égal au gain k_0(t). Le critère de performance est de la forme J(e) = 1/2 e^2(t).

1- Calculer l'algorithme du mécanisme d'ajustement à l'aide de la méthode du gradient.
2- Compléter la figure.



Exercice 2.3

Soit le système à régler et le régulateur à actions proportionnelles et intégrale (PI) présenté par la figure ci-après. Les fonctions de transfert du système et celle de régulateur sont les suivantes :

1) Fonction de transfert à régler

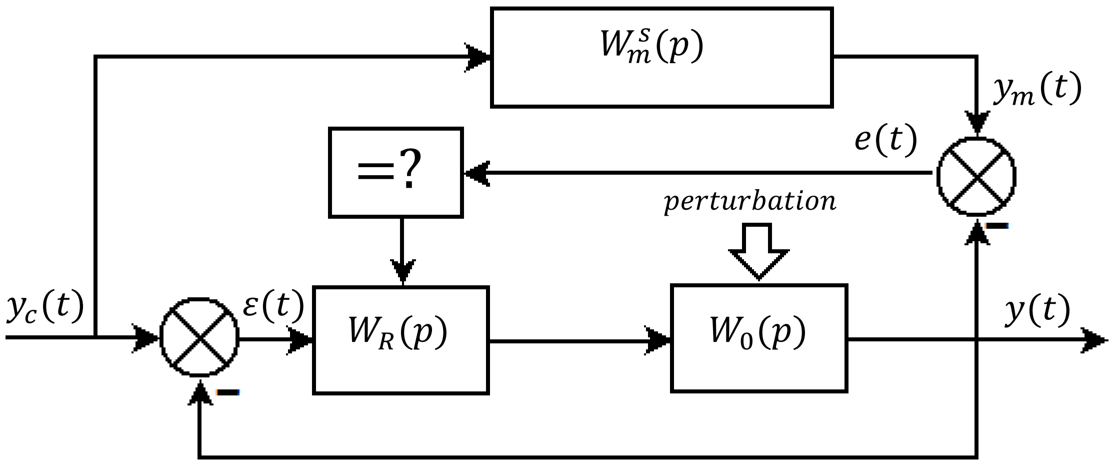
$$W_0\,(p) = \frac{k_0}{P.T_0 + 1}$$

2) Fonction de transfert du régulateur à actions P

$$W_R\,(p) = \frac{k_r(P.T_i + 1)}{P.T_i}$$

Soit le critère d'optimalité **J** de la boucle d'ajustement est exprimé par l'intégrale quadratique :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t e(\tau)^2 d\tau$$



On souhaite avoir un comportement en boucle fermée similaire au modèle de référence Suivant :

$$\frac{c_1}{p + c_1}$$

1- Déduire la valeur de c_1 qui permet de réaliser une poursuite parfaite du modèle de Référence.

2- Déterminer de l'algorithme d'ajustement du régulateur PI placé dans la chaine directe du système de commande adaptative par modèle de référence.

3- Donner le schéma bloc décrivant le système de commande adaptative par modèle de référence ajusté par le régulateur PI.

Exercice 2.4

Soit le système décrit par la fonction de transfert suivante

$$G(s) = \frac{b}{s(s+1)}$$

où b est un paramètre variable dans le temps. Le système est commandé par un correcteur proportionnel

$$u(t) = k(y_c(t) - y(t))$$

On souhaite avoir un comportement en boucle fermée similaire au modèle de référence suivant :

$$G_m(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

1. Calculer la fonction de transfert du système commandé en boucle fermée.
2. Déduire la valeur de k qui permet de réaliser une poursuite parfaite du modèle de référence.
3. Calculer une loi de commande adaptative avec le paramètre b en utilisant la règle du MIT.

Exercice 2.5

Soit le système du control adaptative suivant :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}[\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\theta w}(\boldsymbol{t})]$$

Etant donné que $\boldsymbol{a} > \mathbf{0}$, $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{\mathcal{L}}_\infty$ est une distribution bornée et $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{b}$ sont des paramètres constants inconnus.
On souhaite avoir un comportement similaire au modèle de référence suivant :

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{m}} = -\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{m}}$$

1) Déduire la loin de commande adaptative $\boldsymbol{u}$ qui permet de réaliser une poursuite parfaite du modèle de Référence.
2) Soit $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{\theta}$; avec $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{t})$: le paramètre adaptative estimé et $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$: l'erreur d'estimation. En utilisant la fonction candidate de Lyaponuv $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{e}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{b}\widetilde{\boldsymbol{\theta}}^{\mathbf{2}}$; montrer que le l'erreur $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{x} \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque **t→∞.**

Exercice 2.6

On désire concevoir une commande adaptative directe, à base d'un retour d'état, pour imposer la trajectoire $y_m(t)$ définie par le modèle de référence suivant :

$$\dot{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{t}) \quad , \quad \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{m}}, \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{m}} > \mathbf{0}$$

pour le système dynamique, à deux paramètres a et b *incertains*, suivant :

$$\dot{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{ay}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{bu}(\boldsymbol{t})$$

où $y_m(t)$, $y^d(t)$, $y(t)$ et $u(t)$ sont respectivement la sortie du modèle de référence, la consigne désirée, la sortie et la commande du système à corriger.

1. Donner *l'expression* de la commande $u(t)$ en fonction de $y(t)$ et $y^d(t)$.
2. On suppose que a et b sont *connus*, déterminer les paramètres de la commande $u(t)$.
3. donner l'équation différentielle caractérisant la dynamique de l'erreur de poursuite :
$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{t})$$
lorsque les paramètres a et b sont *inconnus.*
4. en considérant une fonction de **Lyapunov** quadratique, déterminer les adaptions qui garantissent la convergence de l'erreur de poursuite *e(t).*

Exercice 2.7

Soit le système dynamique suivant :

$$\dot{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{bu}(\boldsymbol{t})$$

dont le paramètre b est *incertain*. Les variables $y(t)$ et $u(t)$ représentent respectivement la sortie et la commande du système.
On désire concevoir une commande adaptative directe, en utilisant la méthode du gradient (MIT rule), pour imposer en boucle fermée la dynamique suivante :

$$\dot{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{t})$$

avec $y_m(t)$ et $y^d(t)$ sont respectivement la sortie et l'entrée (consigne désirée) du modèle de référence. Le paramètre b_m est *connu* et supposé positif.
Pour réaliser cet objectif, on propose d'utiliser une loi de commande de la forme

$$\boldsymbol{u(t) = k(t)y^d(t)}$$

où $k(t)$ est un gain *variable*.

1. on suppose que le paramètre b est *connu*, déterminer le gain k^* de la loi de commande.
2. donner *l'expression générale* de la loi d'adaptation du gain $k(t)$ (règle **MIT**).
3. montrer que la *fonction de sensibilité* est donnée comme suit :

$$\boldsymbol{\frac{\partial y(t)}{\partial k(t)} = \frac{b_m}{k^*(s+1)} y^d(t)}$$

4. déduire l'expression de la loi d'adaptation du gain $k(t)$.
5. donner le schéma de simulation.

Exercice 2.8

Partie 01 : *backstepping*

Soit le système du second ordre décrit par l'équation d'état suivante

$$\dot{x}_1 = x_2 + \theta\varphi^T(x_1), \qquad \varphi(0) = 0$$
$$\dot{x}_2 = u$$

où θ est le vecteurs des paramètres du système, on considère dans cet exercice que θ est connu.

1. En considérant x_2 comme une commande virtuelle, calculer l'expression $x_{2c}(x_1, \theta)$ qui permet d'imposer une dynamique linéaire asymptotiquement du premier ordre stable à x_1.
2. On définit les variables d'erreur

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 0 \\ z_2 = x_2 - x_{2c}(x_1, \theta) \end{cases}$$

Calculer la dynamique de z_1 et z_2

3. En considérant la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V(z_1,\, z_2) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2$$

Proposer une loi de commande u qui permet d'avoir un point d'équilibre $z_c = (0,0)$ globalement asymptotiquement stable pour les variable d'erreur.

4. Que peut-on conclure concernant $x_e = (0,0)$.

Partie 02 : (MRAS)

Dans cette partie, on considère que le vecteur des paramètres du système θ est incertain Où . On note $\hat{\theta}$ son estimé et $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ l'erreur d'estimation.

4. Pour tenir compte de l'erreur sur la valeur θ, ob rempalce θ par $\hat{\theta}$ dans la commande obtenue dans la question 3 et rajoute un terme supplémentaire $\mu(x_1, x_2, \hat{\theta})$. Ecrire la nouvelle forme de la commande u.

5. On définit la commande virtuelle $x_{2c}(x_1, \hat{\theta})$, en remplaçant toujours θ par $\hat{\theta}$ dans l'expression de x_{2c} obtenue dans la question 1. Ecrire les dynamiques des erreurs $z_1 = x_1$ et $z_2 = x_1 - x_{2c}(x_1, \hat{\theta})$ en fonction de θ $\tilde{\theta}$ et $\dot{\hat{\theta}}$

6. Déterminer l'expression de $\mu(x_1, x_2, \hat{\theta})$ qui permet d'écrire la dynamique des erreurs sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{z_1} \\ \dot{z_1} \end{bmatrix} = A_z \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + B_z \tilde{\theta}$$

Donner les valeurs de $A_z$et B_z.

7. On considère la fonction candidate suivante :

$$V_2(z_1,\ z_2) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}$$

En utilisant la valeur de $\mu(x_1, x_2, \hat{\theta})$ obtenue précédemment, déterminer l'expression de $\dot{\hat{\theta}}$ pour avoir V_2 (.) semi -définie négative.

8. En utilisant le Lemma de Barbalat. Montrer que l'erreur est stabilisante.

Exercice 2.9

Soit l'intégrateur $\mathrm{G_p}$:

$$G_p(s) = \frac{b}{s}$$

Il est contrôlé par le contrôleur zéro-ordre continue $\mathrm{u(t)}$ suivant :

$$u(t) = s_0 y(t) + t_0 u_c(t)$$

Le modèle à réponse désirée est donné par :

$$G_m(s) = \frac{b_m}{s + a_m}$$

Trouver les lois d'ajustement des paramètres de contrôleur ($\mathrm{s_0}$ et $\mathrm{t_0}$) qui assurent une erreur nulle entre la sortie du système et celle de modèle de référence, en utilisant la théorie de Lyapunov. Essayez avec la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{1}{2}(e^2 + \frac{1}{b}(bs_0 - a_m)^2 + \frac{1}{b}(bt_0 - b_m)^2)$$

Avec

$$e = y(t) - y_m(t)$$

Exercice 2.10

On désire concevoir une commande adaptative indirecte basée sur une correction du type PI de la forme

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_c(1 + \frac{1}{T_i s})$$

pour le système dynamique suivant :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ke^{-\tau}}{Ts+1}$$

Les param`etres K_c et T_i représentent respectivement le gain et la constante de temps intégrale du correcteur PI. Les paramètres variables dans le temps K, T et τ représentent respectivement le gain statique, la constante de temps et le retard du système. Les variables Y (s), U(s) et E(s) sont respectivement la sortie, la commande et l'erreur de poursuite définie comme suit E(s) = Y^d(s) − Y (s) avec Y^d(s) est la consigne désirée

Les paramètres du correcteur PI sont calculés en utilisant la méthode de **Cohen-Coon** comme suit :

$$K_c = \frac{T}{K\tau}\left(\frac{10.8T+\tau}{12T}\right), \quad T_i = \frac{9T+20\tau}{\tau(30T+3\tau)}$$

Pour déterminer l'équivalent discret $\mathrm{C_d}(\mathrm{z})$ du correcteur continu C(s), on utilise l'approximation suivante :

$$s = \frac{z-1}{\mathrm{T_e}}$$

Où $\mathrm{T_e}$ est la période d'échantillonnage.

1- Quelle type d'approximation utilisée pour l'opérateur dérivée s,
2- Donner la fonction de transfert du correcteur $\mathrm{C_d}(\mathrm{z})$ et déduire l'expression de u(k),
3- Pour k < 0, on a y(k) = u(k) = 0 et la consigne désirée est définie comme suit :

$$Y^d(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases}$$

Les estimés des paramètres du système à k = 0 sont $\widehat{K}_0$= 2, $\hat{T}_0$= 1 et $\hat{\tau}_0$ = 1, 2. La période d'échantillonnage $\mathrm{T_e}$ = 1. Déterminer la valeur de la commande u(0).

Exercice 2.11

Soit le système dynamique de seconde ordre, à deux paramètres a et b variables dans le temps, suivant :

$$\boldsymbol{\ddot{y}(t) = -a\dot{y}(t) - by(t) + u(t)}$$

Où $y(t)$et $u(t)$ sont respectivement la sortie et la commande du système.

On désire concevoir une commande adaptative *directe, à* base d'un retour d'état, pour impose à la sortie $y(t)$ une trajectoire $y_m(t)$ définie par le modèle de référence suivant :

$$\boldsymbol{\ddot{y}_m(t) = -2\dot{y}_m(t) - y(t) + r(t)}$$

Où $y_m(t)$et $r(t)$ sont respectivement la sortie de référence et la consigne désirée.

Pour concevoir la stratégie de la commande adaptative *directe*, on propose d'utiliser les deux méthodes suivantes ;

- Méthode de la fonction de **Lyapunov**
- Méthode gradient (règle **MIT**)

1- Donner l'expression de la loi de commande $u(t)$.

2- On suppose que les paramètres a et b sont constants, déterminer l'estimés $\hat{a}$ et $\hat{b}$ des paramètres a et b en fonction des paramètres θ_m du modèle de référence et les paramètres θ_c de la loi de commande $u(t)$.