TD n° 3
Commande prédictive : GPC

Exercice 3.1

Soit le système échantillonné décrit par l'équation polynomiale suivante :

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) + C(q^{-1})\frac{\xi(k)}{\Delta}$$

Avec $\Delta = 1 - q^{-1}$ est l'operateur de différenciation l'opérateur de différentiation. Les polynômes :

$$A(q^{-1}) = 1 - 0.5q^{-1}$$

$$B(q^{-1}) = 0.4 - 0.1q^{-1}$$

$$C(q^{-1}) = 1$$

On souhaite calculer pour ce système une commande prédictive généralisée (GPC) par approche polynomiale.

1- Ecrire l'équation aux différences du système avec $\Delta u(k)$ et $\xi(k)$comme entrées.

2- En supposant $\xi(k+i) = 0$, calculer les prédictions $\hat{y}(k+1)$, $\hat{y}(k+2)$et $\hat{y}(k+3)$en fonction des données passées. On choisit N1 = 1, N2 = 3 et Nu = 2.

3- Ecrire le prédicteur sous forme matricielle

$$\hat{Y} = G\tilde{U} + \varphi$$

Et déduire G et φ.

4- Calculer $\Delta u(k)$ correspondant au premier élément de la séquence optimale qui minimise J(.)

$$J = (G_N\tilde{u}_N - \varphi)(G_N\tilde{u}_N - \varphi) \qquad \lambda = 0$$

Exercice 3.2

Soit le système discret suivant qui est obtenu par la discrétisation d'un système du premier ordre continu. On souhaite appliquer l'algorithme de GPC au système pour obtenir une loi de commande optimale.

$$(1 + aq^{-1})y(k) = (b_0 + b_1q^{-1})u(k-1) + \frac{\xi(k)}{\Delta\,(q^{-1})}$$

Les résultats numérique de la discrétisation pour les valeurs des paramètres : $a = -0.8$, $b_0 = 0.4$ et $b_1 = 0.6$, soient les horizons $N_1 = 1$ et $N_2 = N_u = 3$.

1- Calculer les polynômes prédicteurs $E_j(q^{-1})$, $F_j(q^{-1})$ par la résolution de l''équation diophantine $1 = E_j(q^{-1})\tilde{A}(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1})$ pour j=1 … 3.
2- Calculer les termes des sorties prédites $\hat{y}$: G, F.
3- Déterminer l'expression de la loin de commande à l'instant $t = k$ $(\Delta u(k)\ et\ u(k))$ en prenant $\lambda = 0.8$.
4- Visualiser dans le même graphe la réponse du système en boucle fermée et le signal de commande, le signale de référence w peut être un constant est égale à 1.

Exercice 3.3

Soit le modèle suivant :

$$y(t) + \alpha_1 y(t-1) + \alpha_2 y(t-2) = \beta_0 u(t-1) + \beta_1 u(t-2)$$

1- Donnez la forme CARIMA de ce modèle.
2- Donnez l'expression du vecteur de sortie de prédiction sur un horizon.
3- Formulez, sur un horizon, une loi de commande prédictive permettant au système de suivre une référence de type échelon d'amplitude ρ

On donne $y(0) = y(1) = 0$; $N_1 = 1$; $N_2 = N_u = 3$; $(GG^T + \lambda I)G^T = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 \\ \sigma_7 & \sigma_8 & \sigma_9 \end{bmatrix}$

Exercice 3.4

Soit le système décrit par l'équation suivante :

$$y(t) = 1.7y(t-1) - 0.7y(t-2) + 0.9\Delta u(t-1) - 0.6\Delta u(t-2) + \xi(t)$$

où y est la sortie du système, u est son entrée et _ est un bruit blanc gaussien.

1- Donnez la forme CARIMA de ce modèle.

2- Donnez l'expression du vecteur de sortie de prédiction sur un horizon.
3- Formulez, sur un horizon, une loi de commande prédictive permettant au système de suivre une référence de type échelon d'amplitude ρ.

Exercice 3.5

Soit le modèle suivant :

$$G(s) = \frac{0.5}{1 + 10s} e^{-2s}$$

Formulez, sur un horizon, une loi de commande prédictive permettant de ramener le système à la position désirée $x_e = 1$.

Exercice 3.6

Le comportement dynamique d'un système est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}$$

1- Montrer que l'évolution de la sortie y(k) du système est décrite par une équation aux différences de la forme

$$y(k) = 0.5y(k-1) + u(k-1)$$

2- Sachant que $y(0) = 0$, calculer les *quatre premières valeurs* de la réponse $y(k)$ (pour k allant de 1 à 4) pour une entrée du type *échelon unité*

$$u(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

3- donner la matrice dynamique pour un horizon de prédiction Np = 4 et un horizon de *commande* Nu = 3.