Université de 20 Août 1955, Skikda
Département de Génie Electrique
M2 Automatique et systèmes
Commande adaptative et prédictive

TD n° 4
Commande prédictive : MPC

Exercice 4.1

Considérons le système du premier ordre décrit par l'équation d'état suivante :

$$x_m(k+1) = ax_m(k) + bu(k)$$
$$y(k) = x_m(k)$$

a et b sont des scalaires dont leurs valeurs sont 0.8 et 0.1 respectivement.

1- Trouver la représentation d'état augmentée en suppose que l'horizon de prédiction sur la sortie $N_p = 10$ et l'horizon de prédiction sur la commande $N_c = 4$.

2- Calculer les termes de l'expression de sorties prédites Y et les quantités $\Phi^T\Phi, \Phi^T F\ et\ \Phi^T\overline{R_s}$.

3- En supposant que à l'instant k_i $(k_i = 10)$, $r(k_i)$=1, et le vecteur d'état $x(k_i) = [0.1\ 0.2]^T$, trouver la solution optimale ΔU lorsque $r_w = 0$ puis $r_w = 10$, comparer les résultats trouvés.

Exercice 4.2

Considérons le système du premier ordre représenté par l'espace d'état suivant:

$$\mathrm{x_m(k+1) = 0.8x_m(k) + 0.1u(k)}$$

Sachant que : $\mathrm{r_w} = 0$ et les conditions initiales sont : $\mathrm{x}(10) = [0.1\ 0.2]^{\mathrm{T}}$et $\mathrm{u}(9) = 0$.

Appliquer la commande prédictive à horizon glissant MPC à ce système.

Exercice 4.3

On désire utiliser la commande prédictive pour corriger le système suivant :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k)$$

de telle sorte à minimiser le critère de performances définie comme suit :

$$J = \sum_{i=1}^{N_P} y^2(k+j/k)$$

Pour réaliser cet objectif, on considère un *horizon de prédiction* $N_P = 4$ et un *horizon de commande* $N_u = 2$.

1- Montrer que les prédictions peuvent s'écrire sous la forme :

$$Y = Gx(k) + FU$$

Avec $Y = [y(k+1/k) \quad y(k+2/k) \quad y(k+3/k) \quad y(k+4/k)]^T$

Et $U = \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \end{bmatrix}$

et préciser les expressions des matrices G et F.

2- Le critère à optimiser peut s'écrire sous la forme $J = Y^T Y$. Donner l'expression de la *séquence* de commande U en fonction de G, de F et de $x(k)$.
3- On partitionne la matrice $(F^T F)^{-1} F^T G$ comme suit :

$$(F^T F)^{-1} F^T G = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

4- Donner les dimensions de la matrice k_1,
5- Déduire l'expression de la commande $u(k)$.

Exercice 4.4

Le fonctionnement d'un moteur à courant continu est décrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = Ki, & \dot{\theta}(0) = 0 \\ L\dfrac{di}{dt} + Ri = V - K\dot{\theta} & \end{cases}$$

$\dot{\theta}$ est la vitesse de rotation du rotor, i le courant circulant dans l'armature et V la tension d'alimentation du moteur. Les paramètres du moteur sont regroupés dans le tableau 1. Sachant qu'on mesure $\dot{\theta}$ (la vitesse de rotation du rotor), on souhaite proposer un correcteur MPC permettant de commander la vitesse de rotation.

1- Donnez la représentation d'état discrète du système pour un pas d'échantillonnage $t_s = 0{:}01s$.
2- Le système est-il commandable et observable ?
3- Le système est-il de réalisation minimale ? que pouvez-vous en conclure sur la commandabilité et l'observabilité du système augmenté ?
4- Donnez l'algorithme permettant d'implanter la commande MPC pour ce système.

Valeurs des paramètres	Définition
$R = 1\,\Omega$	Résistance électrique
$L = 0.5\,H$	Inductance électrique
$b = 0.1\,N.m.s$	Coefficient de frottement du moteur
$J = 0.01\ \ Kg.m^2$	Moment d’inertie du moteur
$K = 0.01\,N.m/A$	Constante du coupe du moteur