CALCUL DES MATRICES DES RESEAUX ELECTRIQUES

1. Introduction

La formulation mathématique ou modélisation est la première étape dans l'analyse d'un réseau électrique. Le modèle doit décrire les caractéristiques des composants individuels de tout le système d'énergie ainsi que les relations qui régissent l'interconnexion de ces éléments.
Une équation matricielle du réseau électrique fournit un modèle convenable pour des solutions avec un ordinateur. Les éléments d'une matrice de réseau dépendent de la sélection des variables indépendantes qui peuvent être des courants ou des tensions. Les éléments de la matrice sont ainsi soit des impédances soit des admittances.
La forme de la matrice dépend de la structure de référence, c'est-à-dire les nœuds ou les mailles.

2. Théorie des graphes

Le **graphe** est un dessin géométrique qui illustre les connexions graphiquement. Sa représentation est associée à une table qui présente les propriétés de matrices binaires. Les éléments de ces dernières sont égaux à 0 ou 1, avec éventuellement une indication (signe +/-) lorsque le graphique est connu pour avoir une direction (sens), comme dans le cas général des réseaux électriques.
Afin de décrire la structure géométrique d'un réseau, il suffit de remplacer les composants du réseau par de simples segments sans voir leur propre caractéristique. Ces **segments** de ligne sont appelés **éléments** et leurs extrémités **sommets** ou **nœuds**.
Un nœud et un segment sont **incidents** si le nœud est une extrémité du segment. Des nœuds peuvent être incidents avec plus qu'un élément.

Le graphe d'un réseau électrique montre l'interconnexion géométrique des éléments du réseau. Un **sous-graphe** est un sous-ensemble des éléments du graphe.

Un **chemin** est un sous-graphe d'éléments connectés avec pas plus de 2 éléments connectés à un seul nœud.
Un graphe est **connecté** si et seulement s'il y a un chemin entre chaque paire de nœuds. Si à chaque élément du graphe connecté, on assigne une direction, on dit que le graphe est **orienté** (Dans le cas de systèmes électriques, cette direction correspond au sens de circulation du courant dans l'élément que représente le segment en question. Une exception ne respecte pas cette règle : les sources de tension indépendantes, auxquelles on doit assigner la direction contraire à celle du courant).
Un **arbre** est un sous-graphe qui contient tous les nœuds d'un graphe mais pas un chemin fermé (maille). Les segments de cet arbre sont appelés **branches**. Les segments restants sont appelés les **liens**. L'ensemble des liens forme le **co-arbre**.

Si un lien est ajouté à un arbre, le graphe qui en résulte contient un chemin fermé appelé **circuit**. L'addition de chaque lien subséquent forme un ou plusieurs circuits additionnels. Les circuits ne contenant qu'un seul lien sont indépendants et sont appelés **circuits de base** ou **fondamentaux**. L'orientation d'un circuit de base est choisie similaire à celle du lien.
Enfin, un nœud de référence doit être choisi et il est pratique courante d'assigner à ce nœud le numéro zéro (0).

Exemple 1 :
Soit un réseau électrique à 4 nœuds (Jeu de barres) (Fig. 1a) avec son circuit équivalent (Fig. 1b). La Fig. 2 illustre sa représentation par un graphe orienté.

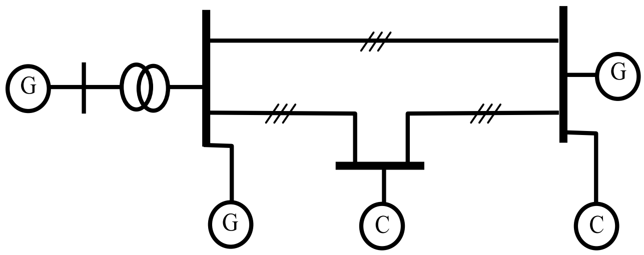


Fig. 1a : Réseau électrique triphasé

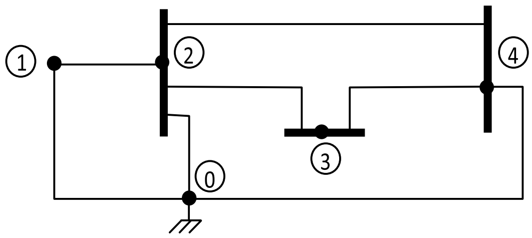


Fig. 1b : Circuit équivalent monophasé

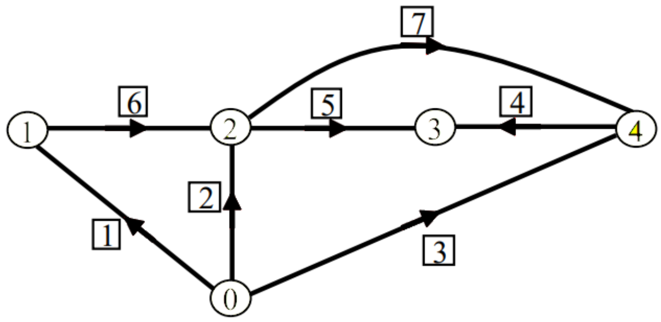


Fig. 2 : Représentation du réseau par un graphe
Branches : 1, 2, 3, 4 Liens : 5, 6, 7

3. Représentation matricielle des réseaux

La formulation des équations du réseau est basée sur la définition d'un modèle mathématique exact et cohérent qui décrit les caractéristiques des composants individuels (machines, lignes, transformateurs et charges) et de l'interconnexion entre ces composants.
L'équation matricielle est un modèle approprié adapté au traitement mathématique et à la transformation sous un aspect systémique. Les éléments de la matrice peuvent être des impédances (les tensions aux nœuds sont écrites en fonction des courants injectés), ou admittances (les courants injectés sont écrites en fonction des tensions aux nœuds).

Le réseau peut être décrit par les trois types de matrices suivantes :

- **Matrices élémentaires** (ou **primitives**) : ces matrices décrivent les composants individuels en tenant compte, le cas échéant, de leur couplage électromagnétique (capacitif et inductif). Elles sont de structure diagonale, le couplage des composants est représenté par des éléments non diagonaux ;
- **Matrices d'incidence** : elles décrivent les interconnexions entre les différents composants du réseau. Les valeurs de ces matrices sont binaires 1, 0, - 1, elles représentent le lien entre les branches et les nœuds du réseau avec leur orientation ;
- **Matrices de transfert** : elles décrivent de façon mathématique le comportement électrique du réseau maillé. Elles sont essentiellement les matrices impédance ou admittance qui correspondent aux nœuds du réseau (matrices nodales).

4. Matrice Incidence

Les matrices incidence caractérisent la relation entre les éléments du réseau (généralement appelées branches) et les nœuds de liaison entre ces éléments.

4.1. Matrice Incidence nodale

La matrice incidence nodale A décrit la topologie du système en faisant abstraction de la nature des éléments qui le composent. Pour un graphe comportant n nœuds et e segments, la matrice A est formée de n colonnes et e rangées.

Ses éléments a_{ij} peuvent prendre les valeurs 0, - 1 ou 1 comme suit :

$a_{ij} = 1$ si l'élément i est incident avec le nœud j et est orienté à partir de ce nœud;

$a_{ij} = -1$ si l'élément i est incident avec le nœud j et est orienté vers ce nœud;

$a_{ij} = 0$ si l'élément i est non-incident avec nœud j.

Pour l'exemple précédent, la matrice A est la suivante :

e / n	0	1	2	3	4
1	1	-1	0	0	0
2	1	0	-1	0	0
3	1	0	0	0	-1
4	0	0	0	-1	1
5	0	0	1	-1	0
6	0	1	-1	0	0
7	0	0	1	0	-1

Pour chaque colonne j :

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_{ij} = 0 \tag{1}$$

En effet sur la même colonne correspondant à la branche visée par j, il y a seulement deux éléments non nuls : Le premier correspond au nœud de départ avec la valeur 1, et le second correspond au nœud d'arrivée avec la valeur - 1.

4.2. Matrice Incidence réduite

A la place de la matrice d'incidence nodale, on utilise plutôt la **matrice incidence nodale réduite**, qui correspond à la matrice incidence nodale, dans laquelle le choix d'un nœud de référence des tensions conduit à la suppression d'une colonne de la matrice A (en général la première).

5. Matrices du réseau primitif

Le réseau primitif représente l'ensemble des composants du réseau, y compris leurs couplages électriques et magnétiques. Chaque composant est défini par son impédance z_{pq} ou admittance $y_{pq} = 1/z_{pq}$ d'indices p (nœud de départ) et q (nœud d'arrivée).
En outre, les générateurs sont modélisés par une force électromotrice (f.é.m.) e_{pq} en série avec une impédance interne (modèle de Thévenin), ou une source de courant J_{pq} avec une admittance interne en parallèle (modèle de Norton).

5.1. Equation en termes d'impédance

La tension aux bornes V_{pq} est reliée au courant I_{pq}, par la f.é.m. e_{pq} et l'impédance z_{pq}comme suit (Fig. 3) :

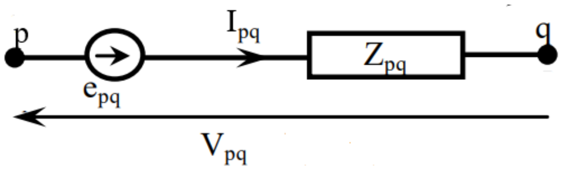


Fig. 3 : Représentation de la source de tension avec son impédance interne

$$V_{pq} + e_{pq} = z_{pq}.I_{pq} \tag{2}$$

5.2. Equation en termes d'admittance

La Fig. 4 montre le circuit équivalent de Norton du générateur (source de courant en parallèle avec l'admittance interne).

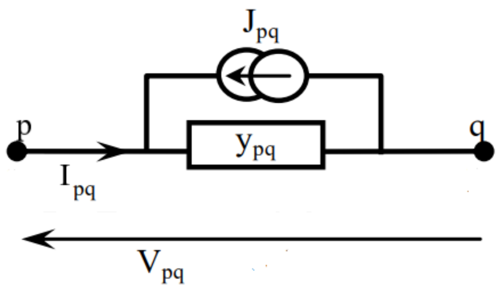


Fig. 4 : Représentation de la source de courant avec son admittance interne

Les courants I_{pq}, J_{pq} et la tension aux bornes du générateur V_{pq} sont liés par l'équation (3) :

$$I_{pq} + J_{pq} = y_{pq}V_{pq} \tag{3}$$

$$J_{pq} = -y_{pq}e_{pq} \tag{4}$$

La matrice du réseau primitif est une matrice à dominance diagonale dont les éléments correspondent aux impédances de chaque liaison du réseau.
Ces impédances sont les impédances propres $z_{pq,pq}$ et les impédances de couplage entre les liens pq et rs, qui représentent les éléments hors diagonale $z_{pq,rs}$ (Fig. 5).

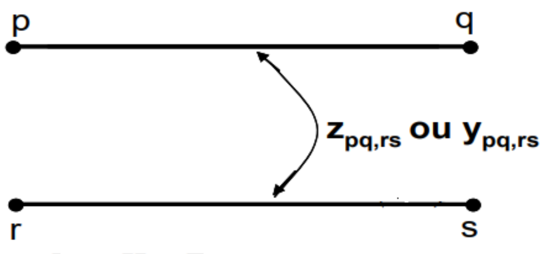


Fig. 5 : Eléments couplés

Les vecteurs courant I *et* tension V ainsi que la matrice impédance z du réseau primitif, avec les éléments de la diagonale et hors diagonale (colonnes rs et lignes pq) sont illustrés par (5) :

$$I = \begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{13} \\ \vdots \\ I_{23} \\ \vdots \\ I_{pq} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{13} \\ \vdots \\ V_{23} \\ \vdots \\ V_{pq} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots & & \vdots & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \\ & & \ddots & & z_{rs,pq} & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & \cdots & z_{pq,rs} & \cdots & z_{pq,pq} & \cdots \\ & & \vdots & & & \end{bmatrix} \tag{5}$$

La représentation vectorielle des sources de courant J et des f.é.m. e, et les équations du réseau élémentaire sont données ci-dessous (6).

$$e = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{13} \\ \vdots \\ e_{23} \\ \vdots \\ e_{pq} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} J_{12} \\ J_{13} \\ \vdots \\ J_{23} \\ \vdots \\ J_{pq} \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad V + e = zI \quad I + J = yV \quad y = z^{-1} \tag{6}$$

Exemple 2 :

Soit le réseau de la Fig. 6 avec 4 nœuds et 5 segments. Les lignes (segments) 1-2 et 1-4 sont couplées mutuellement comme indiqué par les flèches. En vue de les identifier, les lignes 1 et 4 toutes deux connectées en parallèle entre les nœuds 1 et 2 sont désignées par les indices (1) et (2), respectivement.

La présentation de ce réseau est illustrée sous forme d'une table de connexion (Tableau 1) indiquant les valeurs des impédances propres des lignes et des impédances mutuelles de couplage. Les impédances sont données en unités relatives. Si l'on adopte la classification des liens définis dans le tableau 1, on peut construire la matrice impédance z du réseau primaire.

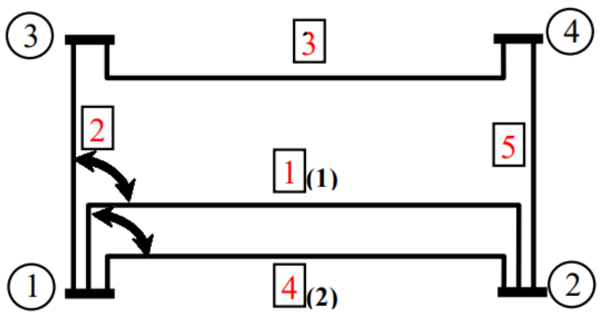


Fig. 6 : Exemple de réseau primaire

Tableau 1

Réseau d'impédances propres et mutuelles

ligne	nœuds	self	nœuds	mutuelle
1	1-2 (1)	0.6		
2	1-3	0.5	1-2 (1)	0.1
3	3-4	0.5		
4	1-2 (2)	0.4	1-2 (1)	0.2
5	2-4	0.2		

Un choix adéquat de la numérotation des lignes (ce qui ne modifie pas le mode de fonctionnement du réseau), permet une meilleure utilisation de la matrice impédance z pour la transformer en sous-matrices diagonales, particulièrement pour la détermination de son inverse. Comme dans l'illustration (Fig. 7a), si les liens 3 et 4 sont permutés, la matrice résultante est représentée sur la Fig. 7b.

$z =$

lignes	1	2	3	4	5
1	0,6	0,1		0,2	
2	0,1	0,5			
3			0,5		
4	0,2			0,4	
5					0,2

Fig. 7a : Matrice impédance primitive

$z =$

lignes	1	2	3	4	5
1	0,6	0,1	0,2		
2	0,1	0,5			
3	0,2		0,4		
4				0,5	
5					0,2

Fig. 7b : Matrice impédance primitive avec permutation des liens 3 et 4

On obtient l'inverse de la matrice de la Fig. 7b, en inversant séparément une matrice 3 x 3 et une matrice diagonale 2 x 2. Le résultat est montré sur la Fig. 7c.

$y = z^{-1} =$

lignes	1	2	3	4	5
1	2,08	-0,42	-1,04		
2	0,1	0,5	0,21		
3	-1,04	0,21	0,4		
4				0,5	
5					0,2

Fig. 7c : Matrice inverse de z de la Fig. 7b

5.3. Matrices de transfert

Considérons un réseau à $(n+1)$ nœuds, numérotées $0, 1, 2, \dots, n$. Soit le nœud 0 le nœud de référence auquel toutes les tensions aux nœuds notées $(V_1, V_2, \dots, V_n)$ sont indexées et $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ les courants injectés en ces nœuds (Fig. 8).

Cette notation permet de ramener l'analyse du réseau par ses composants individuels en une analyse qui ne tient pas compte de la structure interne qui sera représentée par des matrices de transfert.

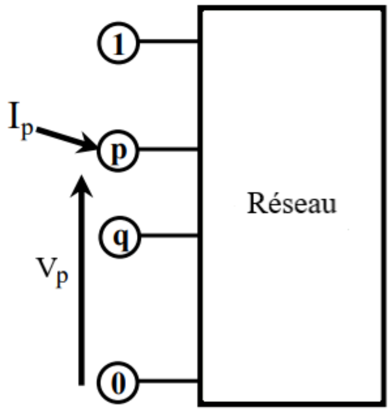


Fig. 8 : Réseau avec tensions de nœuds et courants injectés

Exemple 3 :

Le réseau de la Fig. 9a ci-dessous peut être modifié et représenté par un schéma comme le montre la Fig. 9b.

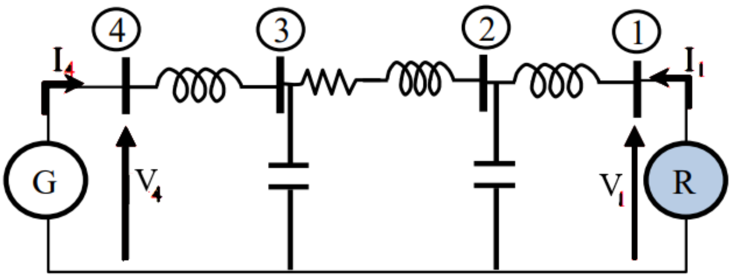


Fig. 9a : Exemple de réseau de 4 nœuds

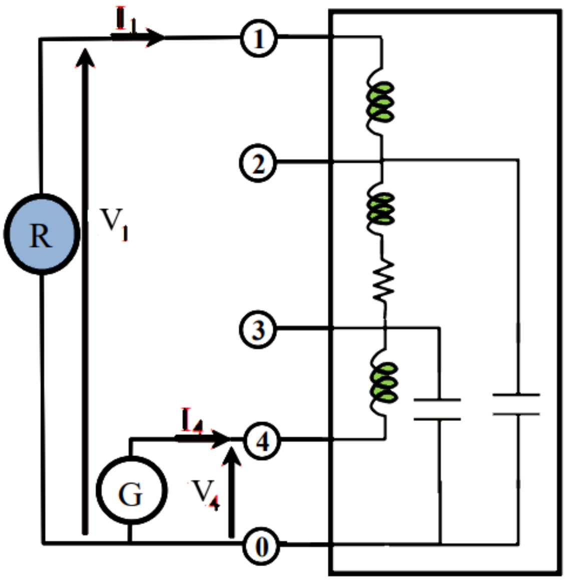


Fig. 9b : Modification schématique du système de la Fig. 9a

Nous définissons alors les vecteurs V_{bus} et I_{bus} dont les éléments représentent respectivement les tensions aux nœuds et les courants injectés aux nœuds:

$$V_{bus} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad et \quad I_{bus} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_i \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

Le fonctionnement du réseau est alors modélisé à travers la matrice d'impédance nodale Z_{bus}, ou la matrice d'admittance nodale Y_{bus} par les équations (7) et (8) comme suit:

$$I_{bus} = Y_{bus}.V_{bus} \tag{7}$$

$$V_{bus} = Z_{bus}.I_{bus} \tag{8}$$

6. Formation de la matrice admittance nodale

Les matrices d'intérêt particulier dans l'analyse d'un réseau électrique sont les matrices impédance et admittance nodales. La matrice admittance est la plus facile à calculer, sa modification dans le cas de changement de topologie étant également simple.
Il existe deux méthodes connues pour déterminer la matrice admittance Y_{bus} d'un réseau électrique. L'une utilise la matrice incidente de nœuds A (donc les notions de graphes appliquées aux réseaux électriques), l'autre se basant sur une formulation simple liée à une modélisation adaptée des différents composants du réseau.

6.1. A partir des admittances des éléments du réseau et de la matrice d'incidence

Considérons l'équation matricielle du réseau primitif :

$$I + J = yV \tag{9}$$

En multipliant par la matrice incidence transposée A^t, on obtient:

$$A^t.(I + J) = A^t.y.V \quad \Rightarrow \quad A^t.I + A^t.J = A^t.y.V \tag{10}$$

Le premier terme $A^t.I$ est la somme des courants qui arrivent à chaque nœud du réseau, qui est égal à zéro (loi de Kirchhoff). Le terme $A^t.J$ est la somme des courants injectés dans chaque nœud, il est égal à I_{bus}. Ainsi. L'équation ci-dessus se réduit à :

$$I_{bus} = A^t.y.V \tag{11}$$

La puissance complexe totale injectée dans le réseau est la même que celle du réseau représenté sous la forme de tensions et de courants nodaux ou sous sa forme primitive. Il en résulte :

$$S = (I_{bus})^{*t}.V_{bus} = J^{*t}.V \tag{12}$$

Mais puisque

$$I_{bus} = A^t.J \tag{13}$$

Alors,

$$(I_{bus})^{*t} = (A^t.J)^{*t} \tag{14}$$

Etant donné que la matrice A est composée de nombres réels, alors $A = A^*$ et par conséquent :

$$(I_{bus})^{*t} = J^{*t}.A \tag{15}$$

Donc l'équation (12) devient :

$$J^{*t}.A.V_{bus} = J^{*t}V \tag{16}$$

On a alors

$$V = A.V_{bus} \tag{17}$$

En considérant (11), alors

$$A^t yAV_{bus} = Y_{bus}.V_{bus} \tag{18}$$

Donc, en conclusion :

$$Y_{bus} = A^t yA \tag{19}$$

6.2. A partir des admittances des éléments du réseau

Cette méthode est la plus simple et la plus commode car elle nécessite moins d'opérations surtout dans le cas où le réseau ne présente pas de couplage mutuel entre ses éléments. Par la suite et pour alléger, nous notons la matrice admittance nodale simplement par Y.

Soit un réseau à n nœuds indépendants et un nœud de référence (0). Pour un nœud i parmi les n nœuds différents de celui de référence on a :

$$I_i = \sum_{j=1}^{n} I_{ij} \tag{20}$$

Avec :

I_i : Le courant injecté au nœud i par une source extérieure (générateur ou charge).

I_{ij} : Le courant qui circule entre le nœud i et le nœud j à travers la branche $(i-j)$ (Les branches représentent les lignes de transport et les transformateurs)

On a aussi :

$$I_{ij} = (V_i - V_j)y_{ij} \tag{21}$$

Tel que :

V_i et V_j : sont respectivement les tensions aux nœuds i et j.

y_{ij}: admittance propre de la branche $(i-j)$.

On aura alors :

$$I_i = \sum_{i=1}^{n} y_{ij}(V_i - V_j) = y_{i0}(V_i - V_0) + y_{i1}(V_i - V_1) + y_{i2}(V_i - V_2) + \cdots + y_{in}(V_i - V_n) \tag{22}$$

tel que : $V_0 = 0 \quad et \quad i = 1 \dots n$

y_{i0} : somme des admittances transversales des lignes reliées au nœud i

$$I_i = V_i\left[y_{i0} + \sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right] - y_{i1}V_1 - y_{i2}V_2 - \cdots - y_{in}V_n \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{23}$$

Si on écrit l'équation précédente sous la forme matricielle pour les n nœuds on aura :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_i \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1i} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2i} & \cdots & Y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \ddots & \cdots \\ Y_{i1} & Y_{i2} & \cdots & Y_{ii} & \cdots & Y_{in} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \ddots & \cdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{ni} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \tag{24}$$

Tel que :

$$\begin{cases} Y_{ii} = y_{i0} + \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \\ Y_{ij} = -y_{ij} \end{cases} \tag{25}$$

Y est La matrice nodale des admittances, carrée d'ordre $(n \times n)$.

Algorithme de calcul de Y

Lecture des données des branches et nœuds.

Convertir toutes les impédances du réseau en admittances : $y_{ij} = -\dfrac{1}{z_{ij}}$

Calcul des éléments diagonaux : $Y_{ii} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \qquad j \neq i$

Calcul des éléments non-diagonaux : $Y_{ij} = -y_{ij}$

La matrice admittance est symétrique : $Y_{ij} = Y_{ji}$

Exemple 4 :

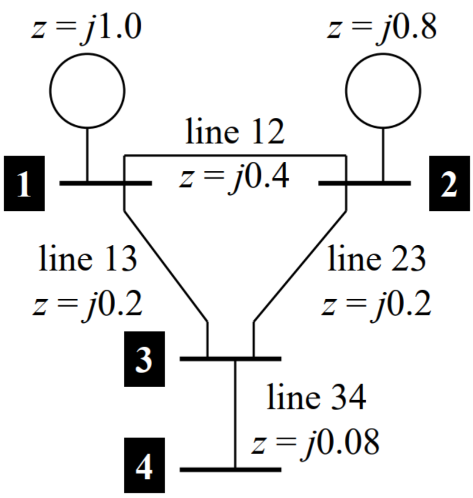


Fig. 10a : Réseau à 4 nœuds

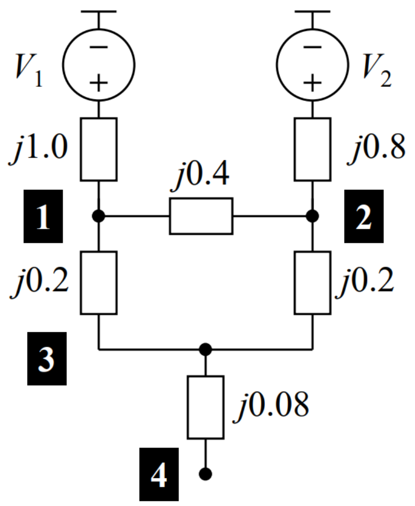


Fig. 10b : Représentation par des impédances

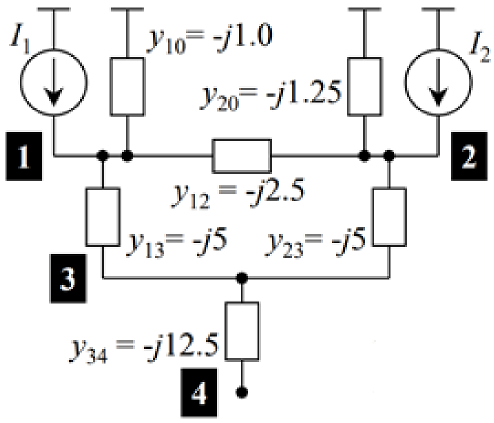


Fig. 10c : Représentation par des admittances

Les équations de Kirchhoff s'écrivent :

$$I_1 = y_{10}V_1 + y_{12}(V_1 - V_2) + y_{13}(V_1 - V_3)$$

$$I_2 = y_{20}V_2 + y_{21}(V_2 - V_1) + y_{23}(V_2 - V_3)$$

$$0 = y_{31}(V_3 - V_1) + y_{32}(V_3 - V_2) + y_{34}(V_3 - V_4)$$

$$0 = y_{43}(V_4 - V_3)$$

En réarrangeant ces équations :

$$I_1 = (y_{10} + y_{12} + y_{13})V_1 - y_{12}V_2 - y_{13}V_3$$

$$I_2 = -y_{21}V_1 + (y_{20} + y_{21} + y_{23})V_2 - y_{23}V_3$$

$$0 = -y_{31}V_1 - y_{32}V_2 + (y_{31} + y_{32} + y_{34})V_3 - y_{34}V_4$$

$$0 = -y_{43}V_3 + y_{43}V_4$$

La formulation matricielle de ces équations :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_{10} + y_{12} + y_{13}) & -y_{12} & -y_{13} & 0 \\ -y_{21} & (y_{20} + y_{21} + y_{23}) & -y_{23} & 0 \\ -y_{31} & -y_{32} & (y_{31} + y_{32} + y_{34}) & -y_{34} \\ 0 & 0 & -y_{43} & y_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

Avec l'évaluation des entrées de la matrice :

$Y_{11} = (y_{10} + y_{12} + y_{13}) = -j8{,}50$ $Y_{12} = Y_{21} = -y_{12} = j2{,}50$

$Y_{13} = Y_{31} = -y_{13} = j5{,}00$ $Y_{22} = (y_{20} + y_{21} + y_{23}) = -j8{,}75$

$Y_{23} = Y_{32} = -y_{23} = j5{,}00$ $Y_{33} = (y_{31} + y_{32} + y_{34}) = -j22{,}50$

$Y_{34} = Y_{43} = -y_{34} = j12{,}50$ $Y_{44} = y_{34} = -j12{,}50$

On obtient :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j8{,}50 & j2{,}50 & j5{,}00 & 0 \\ j2{,}50 & -j8{,}75 & j5{,}00 & 0 \\ j5{,}00 & j5{,}00 & -j22{,}50 & j12{,}50 \\ 0 & 0 & j12{,}50 & -j12{,}50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$Y = \begin{bmatrix} -j8{,}50 & j2{,}50 & j5{,}00 & 0 \\ j2{,}50 & -j8{,}75 & j5{,}00 & 0 \\ j5{,}00 & j5{,}00 & -j22{,}50 & j12{,}50 \\ 0 & 0 & j12{,}50 & -j12{,}50 \end{bmatrix}$$

7. Formation de la matrice impédance nodale

La matrice impédance Z_{bus} est la matrice dont les éléments sont les impédances de points de conduite de circuits ouverts (éléments diagonaux) et d'impédances de transfert (éléments non diagonaux) entre les nœuds et la référence. Elle peut être obtenue par :

$$Z_{bus} = (Y_{bus})^{-1} \tag{26}$$

La formation directe de Z_{bus} n'est pas aussi simple que celle de Y_{bus}. La construction de Z_{bus} se fait en partant d'une matrice Z_{bus} initiale (correspondant à un réseau partiel d'au moins un élément) pour former une deuxième matrice par l'addition d'un autre élément, puis une troisième matrice en ajoutant encore un autre élément et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les éléments soient inclus.
Donc, la technique de formation de Z_{bus} est de suivre le réseau dans son évolution, dont on a le libre choix. Un réseau initial est choisi de telle sorte que sa matrice peut être formée sans ambiguïté. A la limite, ce réseau est formé d'un seul élément joignant le nœud de référence à un autre nœud. La matrice correspondante se réduit alors à un seul terme égal à l'impédance de cet élément.

Soit un élément $p - q$ qu'on ajoute au réseau partiel de m nœuds ; cet élément peut être soit une branche (Fig. 11), soit une boucle (Fig. 12).
Si l'élément $p - q$ est une branche, le nouveau nœud q est ajouté au réseau partiel et la matrice aura $(m + 1) \times (m + 1)$ pour dimension. Les nouveaux vecteurs tensions et courants auront $(m + 1) \times 1$ pour dimension. La détermination de la nouvelle matrice impédance exige seulement le calcul des éléments de la colonne et de la ligne ajoutée.
Si l'élément $p - q$ est une boucle, il n'y a pas de nouveau nœud ajouté au réseau partiel, ainsi les dimensions de la matrice restent inchangées, mais tous les éléments de matrice doivent être recalculés pour inclure l'effet de cette boucle ; Et on obtient ainsi une nouvelle matrice d'impédance de transfert.

7.1. Ajout d'une branche

Dans ce cas l'élément $p - q$ ajouté au réseau partiel est une branche car le nœud q est un nouveau nœud.

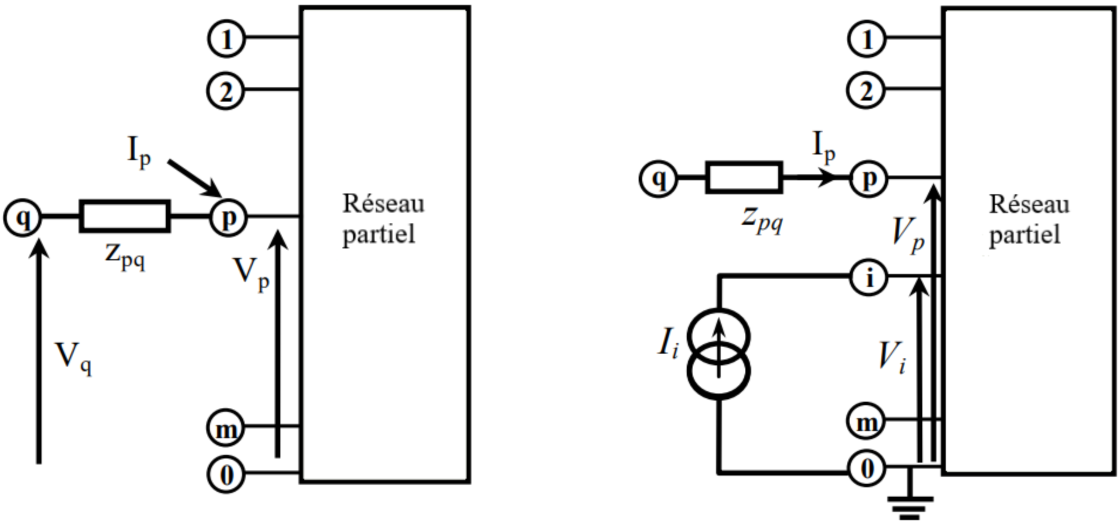


Fig. 11 : Ajout d'une branche

Le système d'équations d'un réseau partiel avec l'ajout d'une branche $p-q$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_p \\ \vdots \\ V_m \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1p} & \cdots & Z_{1m} & Z_{1q} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2p} & \cdots & Z_{2m} & Z_{2q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ Z_{p1} & Z_{p2} & \cdots & Z_{pp} & \cdots & Z_{pm} & Z_{pq} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \cdots & Z_{mp} & \cdots & Z_{mm} & Z_{mq} \\ Z_{q1} & Z_{q2} & \cdots & Z_{qp} & \cdots & Z_{qm} & Z_{qq} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_p \\ \vdots \\ I_m \\ I_q \end{bmatrix} \tag{27}$$

Les éléments du réseau sont passifs et linéaires, il en résulte que :

$$Z_{qi} = Z_{iq} \tag{28}$$

où $i = 1,2,\ldots,m$ représente les nœud du réseau partiel sans introduction du nouveau nœud q.
La branche ajoutée $p-q$ peut être couplée avec un ou plusieurs éléments du réseau de départ.
Les éléments Z_{qi} sont déterminés en injectant un courant de $1pu$ au nœud i et en mesurant la tension au nœud q.
Puisque on a injecté le courant uniquement au nœud i et que les courants des autres nœuds sont nuls, l'équation (27) devient :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{1i} I_i \\ V_2 = Z_{2i} I_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ V_p = Z_{pi} I_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ V_m = Z_{mi} I_i \\ V_q = Z_{qi} I_i \end{cases} \tag{29}$$

La tension du nouveau nœud peut être évaluée en fonction de la tension V_p et la tension de la branche V_{pq}.

$$V_{pq} = V_p - V_q \tag{30}$$

ou encore

$$V_q = V_p - V_{pq} \tag{31}$$

Les courants dans les éléments du réseau de la Fig. 11 sont exprimés à l'aide des admittances primitives et tensions entre ces éléments.

$$\begin{bmatrix} I_{pq} \\ [I_{\alpha\beta}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{pq,pq} & [y_{pq,\alpha\beta}] \\ [y_{\alpha\beta,pq}] & [y_{\alpha\beta,\alpha\beta}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{pq} \\ [V_{\alpha\beta}] \end{bmatrix} \tag{32}$$

pq : indice fixe de l'élément à ajouter ;

$\alpha\beta$: indice variable et se réfère à tous les éléments du réseau partiel ;

$[I_{\alpha\beta}]$ et $[V_{\alpha\beta}]$ sont les valeurs courant et tension des éléments du réseau partiel ;

$y_{pq,pq}$: admittance propre de l'élément ajouté ;

$[y_{pq,\alpha\beta}]$: vecteur des mutuelles admittances entre l'élément ajouté $(p - q)$ et les éléments $(\alpha - \beta)$ du réseau partiel ;

$[y_{\alpha\beta,\alpha\beta}]$: matrice des admittances primitives du réseau partiel.

Le courant dans la branche ajoutée est nul, ainsi on a :

$$I_{pq} = 0 \tag{33}$$

Cependant, V_{pq} la tension de cette branche n'est pas nulle parce qu'elle est couplée mutuellement avec un ou plusieurs des éléments du réseau partiel.

La tension entre deux nœuds d'indices α et β est donnée comme suit :

$$V_{\alpha\beta} = V_\alpha - V_\beta \tag{34}$$

Des équations (32), (33) et (34) résulte :

$$I_{pq} = y_{pq,pq} \cdot V_{pq} + [y_{pq,\alpha\beta}] \cdot [V_{\alpha\beta}] = 0 \tag{35}$$

On obtient alors

$$V_{pq} = -\frac{[y_{pq,\alpha\beta}] \cdot [V_\alpha - V_\beta]}{y_{pq,pq}} \tag{36}$$

Ou encore :

$$V_q = V_p + \frac{[y_{pq,\alpha\beta}] \cdot [V_\alpha - V_\beta]}{y_{pq,pq}} \tag{37}$$

De plus on pose pour V_p , V_q , V_α et V_β du système (29) que le courant I_i *est* égal à l'unité, on obtient finalement le terme de la matrice d'impédance nouvelle après ajout de la branche comme suit :

$$Z_{qi} = Z_{pi} + \frac{[y_{pq,\alpha\beta}] \cdot [Z_{\alpha i} - Z_{\beta i}]}{y_{pq,pq}} \quad i = 1,2, \dots, m\,;\ \ i \neq q \tag{38}$$

L'élément Z_{qq} peut être calculé en injectant cette fois, un courant de $1pu$ au nœud q et on mesure la tension de ce même nœud, il résulte du système (29) que :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{1q} I_q \\ V_2 = Z_{2q} I_q \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ V_p = Z_{pq} I_q \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ V_m = Z_{mq} I_q \\ V_q = Z_{qq} I_q \end{cases} \tag{39}$$

On pose $I_q = 1pu$, donc Z_{qq} est connue en mesurant la tension V_q. Et le courant dans la branche ajoutée vaudra :

$$I_{pq} = -I_q = -1 \tag{40}$$

De l'équation (32) on obtient :

$$I_{pq} = y_{pq,pq} \cdot V_{pq} + \left[y_{pq,\alpha\beta}\right] \cdot \left[V_{\alpha\beta}\right] = -1 \tag{41}$$

D'où :

$$V_q = V_p + \frac{1 + \left[y_{pq,\alpha\beta}\right] \cdot \left[V_\alpha - V_\beta\right]}{y_{pq,pq}} \tag{42}$$

Ainsi en remplaçant V_p , V_q , V_α et V_β de (39) avec $I_q = 1pu$, on obtient :

$$Z_{qq} = Z_{pq} + \frac{1 + \left[y_{pq,\alpha\beta}\right] \cdot \left[Z_{\alpha q} - Z_{\beta q}\right]}{y_{pq,pq}} \tag{43}$$

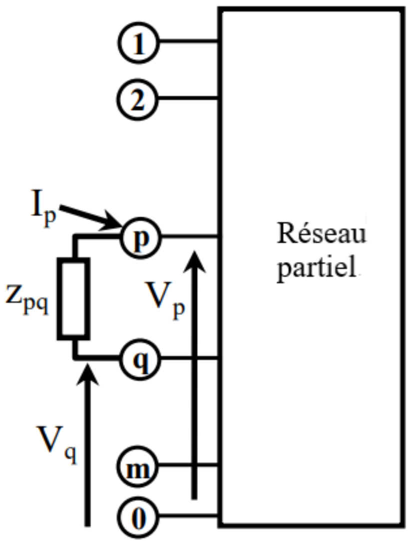
7.2. Ajout d'une boucle

Si l'élément ajouté $p - q$ est une boucle, la technique pour recalculer les éléments de la nouvelle matrice impédance consiste à connecter avec l'élément additionné une source de tension fictive comme le montre la Fig. 12.

Cependant cette technique crée un nœud fictif l qui sera éliminé par la suite. La source de tension e_l est choisie de telle sorte que le courant circulant dans la boucle sera nul.

Le système d'équations représentant le réseau partiel, la boucle $(p - l)$ ajoutée et la source de tension e_l sera donné par :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_p \\ \vdots \\ V_m \\ e_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1p} & \cdots & Z_{1m} & Z_{1l} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2p} & \cdots & Z_{2m} & Z_{2l} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ Z_{p1} & Z_{p2} & \cdots & Z_{pp} & \cdots & Z_{pm} & Z_{pl} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \cdots & Z_{mp} & \cdots & Z_{mm} & Z_{ml} \\ Z_{l1} & Z_{l2} & \cdots & Z_{lp} & \cdots & Z_{lm} & Z_{ll} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_p \\ \vdots \\ I_m \\ I_l \end{bmatrix} \tag{44}$$



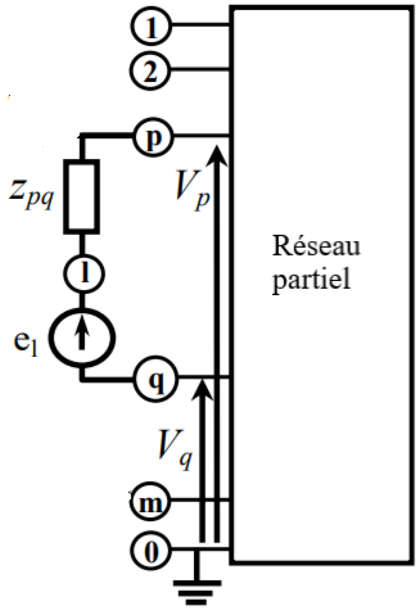


Fig. 12 : Ajout d'une boucle

Comme la tension de la source e_l est égale à (V_l – V_q), alors l'élément Z_{li} peut être déterminé en injectant un courant de $1pu$ au nœud i et en mesurant les tensions en tenant compte du nœud l. Puisque tous les autres courants sont nuls, il vient de l'équation (44) que :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{1i}I_i \\ V_2 = Z_{2i}I_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ V_p = Z_{pi}I_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ V_m = Z_{mi}I_i \\ e_l = Z_{li}I_i \end{cases} \tag{45}$$

C'est-à-dire :

$$V_k = Z_{ki} \cdot I_i \quad i = 1,2, \dots, m \tag{46}$$

$$e_l = Z_{li} \cdot I_i \tag{47}$$

En plus, la source de tension est donnée par :

$$e_l = V_l - V_q = V_p - V_q - V_{pl} \tag{48}$$

Et puisque le courant dans la boucle ajoutée est nul $I_{pq} = 0$, l'élément $p - l$ peut être donc traité comme une branche.

Le courant dans cet élément sera obtenu à partir de (32) :

$$I_{pl} = y_{pl,pl}V_{pl} + \left[y_{pl,\alpha\beta}\right]\left[\mathrm{V}_{\alpha\beta}\right] = \mathrm{I_{pq}} = 0 \tag{49}$$

Donc :

$$V_{pl} = -\frac{\left[y_{pl,\alpha\beta}\right] \cdot \left[V_\alpha - V_\beta\right]}{y_{pl,pl}} \tag{50}$$

et comme $y_{pl,pl} = y_{pq,pq}$

et que $[y_{pl,\alpha\beta}] = [y_{pq,\alpha\beta}]$

$$V_{pl} = -\frac{[y_{pq,\alpha\beta}] \cdot [V_\alpha - V_\beta]}{y_{pq,pq}} \tag{51}$$

En posant $I_i = 1pu$ dans l'équation (45) et en combinant (48) et (51), on obtient :

$$Z_{li} = Z_{pi} - Z_{qi} + \frac{[y_{pq,\alpha\beta}] \cdot [Z_{\alpha i} - Z_{\beta i}]}{y_{pq,pq}} \quad i = 1,2,..,m \; ; \; i \neq q \tag{52}$$

L'élément Z_{ll} peut être calculé en injectant un courant au nœud l avec le nœud q comme référence et en mesurant la tension au nœud l par rapport au nœud q.

Puisque tous les courants aux autres nœuds sont nuls, il vient de l'équation (44) que :

$$V_k = Z_{kl} \cdot I_l \quad k = 1,2, \dots, m \tag{53}$$

$$e_l = Z_{ll} \cdot I_l \tag{54}$$

En posant toujours $I_l = 1pu$, le courant dans l'élément $(p - l)$ est $I_{pl} = -I_l = -1$

$$I_{pl} = y_{pq,pq} V_{pl} + [y_{pq,\alpha\beta}][\mathrm{V}_{\alpha\beta}] = -1 \tag{55}$$

On aura ainsi :

$$V_{pl} = \frac{1 + [y_{pq,\alpha\beta}] \cdot [V_\alpha - V_\beta]}{y_{pq,pq}} \tag{56}$$

Et après substitution dans (48) comme précédemment, on trouve l'élément d'impédance Z_{ll} :

$$Z_{ll} = Z_{pl} - Z_{ql} + \frac{1 + [y_{pq,\alpha\beta}] \cdot [Z_{\alpha l} - Z_{\beta l}]}{y_{pq,pq}} \tag{57}$$

Les éléments de l'axe l (ligne et colonne l) de la matrice du réseau partiel augmenté, sont donnés par les équations (52) et (57).

Il reste à calculer la matrice d'impédances incluant l'effet de la boucle. Ceci peut être accompli en modifiant les éléments Z_{ij} $(i, j = 1,2, \dots . m)$ en éliminant l'axe l correspondant au nœud fictif (réduction de Kron), ce dernier est éliminé en court-circuitant la source de tension e_l.

De l'équation (44) :

$$[V] = [Z] \cdot [I] + [Z_{il}] \cdot I_l \qquad i = 1{:}\, m \tag{58}$$

D'autre part :

$$e_l = [Z_{lj}] \cdot [I] + Z_{ll} \cdot I_l = 0 \qquad j = 1{:}\, m \tag{59}$$

A partir des équations (58) et (59), on obtient :

$$[V] = \left([Z] - \frac{[Z_{1:m,l}] \cdot [Z_{l,1:m}]}{Z_{ll}} \right) \cdot [I] \tag{60}$$

Il vient donc :

$$Z^{new} = Z^{old} - \frac{[Z_{1:m,l}] \cdot [Z_{l,1:m}]}{Z_{ll}} \tag{61}$$

Ou encore :

$$Z_{ij}{}^{new} = Z_{ij}{}^{old} - \frac{Z_{il} \cdot Z_{lj}}{Z_{ll}} \tag{62}$$

7.3. Algorithme de formation de Z_{bus}

Lire les données des éléments du réseau (nœuds de départ et d'arrivée, impédances primitives et mutuelles)

Pour k allant de 1 au dernier élément de la liste faire

Si k est un élément radial alors

Lire les nœuds p et q

Lire z_{pq}

Si z_{pq} est déjà couplée mutuellement avec un ou plusieurs éléments alors $mut = 1$

Pour i allant de 1 à m faire

Si $mut = 1$ alors

Calculer : $pr = \frac{\{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{Z_{\alpha i} - Z_{\beta i}\}}{y_{pq,pq}}$

Sinon $pr = 0$

Fin si

$Z_{qi} = Z_{pi} + pr$

Fin pour

Si $mut = 1$ alors

Calculer : $ps = \{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{Z_{\alpha q} - Z_{\beta q}\}$

Sinon $ps = 0$

Fin si

$Z_{qq} = Z_{pq} + \frac{1 + ps}{y_{pq,pq}}$

Si k est un élément de boucle alors

Lire les nœuds p et q

Lire z_{pq}

Si z_{pq} est déjà couplée mutuellement avec un ou plusieurs éléments alors $mut = 1$

Pour i allant de 1 à m faire

Si $mut = 1$ alors

Calculer : $pr = \frac{\{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{Z_{\alpha i} - Z_{\beta i}\}}{y_{pq,pq}}$

Sinon $pr = 0$

Fin si

$Z_{li} = Z_{pi} - Z_{qi} + pr$

Fin pour

Si $mut = 1$ alors

Calculer : $ps = \{y_{pq,\alpha\beta}\} \cdot \{Z_{\alpha l} - Z_{\beta l}\}$

Sinon $ps = 0$

Fin si

$Z_{ll} = Z_{pl} - Z_{ql} + \frac{1 + ps}{y_{pq,pq}}$

Pour i allant de 1 à m faire

Pour j allant de 1 à m faire

$$Z_{ij}{}^{new} = Z_{ij}{}^{old} - \frac{Z_{il} \cdot Z_{lj}}{Z_{ll}}$$

Fin pour

Fin pour

Afficher les résultats

Exemple 5 :

Déterminer l'impédance Z_{bus} du réseau de l'exemple 4.

Les étapes de formation de la matrice de Z_{bus} se fait dans l'ordre des éléments suivant : 1-0, 2-0, 1-3, 1-2, 2-3 et 3-4.

1. Elément 1-0 : $Z = [j1]$

   Pas de mutuelles.

2. Elément 2-0 : branche

$$Z = \begin{bmatrix} j1 & 0 \\ 0 & j0{,}8 \end{bmatrix}$$

3. Elément 1-3 : branche

   $Z_{31} = Z_{11} = j1$ $\quad Z_{32} = Z_{12} = 0$ $\quad Z_{33} = Z_{13} + z_{13} = j1 + j0{,}2 = j1{,}2$

$$Z = \begin{bmatrix} j1 & 0 & j1 \\ 0 & j0{,}8 & 0 \\ j1 & 0 & j1{,}2 \end{bmatrix}$$

4. Elément 1-2 : boucle

$Z_{l1} = Z_{11} - Z_{21} = j1 \quad Z_{l2} = Z_{12} - Z_{22} = 0 - j0{,}8 \quad Z_{l3} = Z_{13} - Z_{23} = j1 - 0$

$$Z_{ll} = Z_{1l} - Z_{2l} + z_{12} = j1 + j0{,}8 + j0{,}4$$

$$Z = \begin{bmatrix} j1 & 0 & j1 & j1 \\ 0 & j0{,}8 & 0 & -j0{,}8 \\ j1 & 0 & j1{,}2 & j1 \\ j1 & -j0{,}8 & j1 & j2{,}2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Elimination axe 4}} Z = \begin{bmatrix} j0{,}54 & j0{,}36 & j0{,}54 \\ j0{,}36 & j0{,}509 & j0{,}36 \\ j0{,}54 & j0{,}36 & j0{,}745 \end{bmatrix}$$

5. Elément 2-3 : boucle

$Z_{l1} = Z_{21} - Z_{31} = j0{,}36 - j0.54 \quad Z_{l2} = Z_{22} - Z_{32} = j0.509 - j0{,}36$

$Z_{l3} = Z_{23} - Z_{33} = j0{,}36 - j0.745 \quad Z_{ll} = Z_{2l} - Z_{3l} + z_{23} = j0{,}149 + j0{,}385 + j0{,}2$

$$Z = \begin{bmatrix} j0{,}54 & j0{,}36 & j0{,}54 & -j0{,}18 \\ j0{,}36 & j0{,}509 & j0{,}36 & j0{,}149 \\ j0{,}54 & j0{,}36 & j0{,}745 & -j0{,}385 \\ -j0{,}18 & j0{,}149 & -j0{,}385 & j0{,}734 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Elimination axe 4}} Z = \begin{bmatrix} j0{,}496 & j0{,}396 & j0{,}446 \\ j0{,}396 & j0{,}479 & j0{,}438 \\ j0{,}446 & j0{,}438 & j0{,}543 \end{bmatrix}$$

6. Elément 3-4 : branche

$Z_{41} = Z_{31} = j0{,}446 \quad Z_{42} = Z_{32} = j0.438 \quad Z_{43} = Z_{33} = j0{,}543$

$Z_{44} = Z_{34} + z_{34} = j0{,}543 + j0{,}08 = j0{,}623$

$$Z = \begin{bmatrix} j0{,}496 & j0{,}396 & j0{,}446 & j0{,}446 \\ j0{,}396 & j0{,}479 & j0{,}438 & j0{,}438 \\ j0{,}446 & j0{,}438 & j0{,}543 & j0{,}543 \\ j0{,}446 & j0{,}438 & j0{,}543 & j0{,}623 \end{bmatrix}$$