REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE 20 AOUT 1955 SKIKDA

FACULTE DE SCIENCES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

Cours Analyse de Fourier

Karima Kimouche

Année universitaire : 2020/2021

Table des matières

Chapitre 1

Series de Fourier

1.1 Séries trigonométriques

Dans cette section, nous verrons une classe importante de séries de fonctions, les séries trigonométriques. La propriété essentielle de ces séries est la prise en compte, dans la décomposition d'une fonction périodique en "somme infinie" de fonctions simples, du caractère de périodicité

Définition 1.1 *On appelle série trigonométrique une série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ dont le terme générale $f_n(x)$ est de la forme :*

$$f_0(x) = \frac{a_0}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x). \tag{1.1}$$

avec $x \in \mathbb{R}, \omega > 0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

- On conviendra d'écrire les sommes partielles d'une série trigonométrique (1.1) sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$$

Le problème est de déterminer l'ensemble $\triangle$ tel que la série (1.1) soit convergente pour tout $x \in \triangle$.

Supposons que la série (1.1) converge et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)].$$

Sachant que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \cos(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) &= \cos(n\omega x + n2k\pi) = \cos(n\omega x) \\ \sin(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) &= \sin(n\omega x + n2k\pi) = \sin(n\omega x). \end{aligned}$$

Alors la série (1.1) converge en tout point de la forme $x + \frac{2k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$.

Si la série (1.1) converge dans $\mathbb{R}$, on aura $f(x) = f\left(x + \frac{2k\pi}{\omega}\right)$ et par suite la fonction f est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

En conclusion, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La série trigonométrique (1.1) converge dans $\mathbb{R}$.
2. La série trigonométrique (1.1) converge dans $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$.
3. La série trigonométrique (1.1) converge dans $\left[\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{\omega}\right], \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.1 *Si les séries numériques* $(\sum a_n)$ *et* $(\sum b_n)$ *sont absolument convergentes alors la série trigonométrique* (1.1) *est normalement convergente sur* $\mathbb{R}$; *donc absolument et uniformément sur* $\mathbb{R}$.

Preuve. C'est évident puisque $|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|$.

Proposition 1.2 *Si les suites numériques* (a_n) *et* (b_n) *sont décroissantes et tendent vers* 0*, alors la série trigonométrique* (1.1) *est convergente pour* $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}$ *où* $k \in \mathbb{Z}$.

Preuve. Cest une application direct du théorème d'Abel. Pour cela il suffit tout simplement de montrer que les sommes suivantes sont majorées indépendamment de m et n.

$$S = \sum_{p=m}^{n} \sin px, C = \sum_{p=m}^{n} \cos px.$$

Commençons par calculer les sommes suivantes, On a pour $t \neq 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
C_n + iS_n &= \sum_{p=0}^{n} \cos pt + i \sum_{p=0}^{n} \sin pt = \sum_{p=0}^{n} (\cos pt + i \sin pt) \\
&= \sum_{p=0}^{n} e^{ipt} = 1 + e^{it} + e^{2it} + ... + e^{int} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \\
&= \frac{(1 - \cos(n+1)t) - i \sin(n+1)t}{(1 - \cos t) - i \sin t} = \frac{2\sin^2 \frac{(n+1)}{2} t - 2i \sin \frac{(n+1)}{2} t \cos \frac{(n+1)}{2} t}{2\sin^2(t/2) - 2i \sin(t/2) \cos(t/2)} \\
&= \frac{-2i \sin \frac{(n+1)}{2} t \left(\cos \frac{(n+1)t}{2} + i \sin \frac{(n+1)t}{2}\right)}{-2i \sin(t/2) \left(\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin \frac{(n+1)}{2} t}{\sin(t/2)} \left[\frac{\cos \frac{(n+1)t}{2} + i \sin \frac{(n+1)t}{2}}{\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2}}\right] \\
&= \frac{\sin \frac{(n+1)}{2} t}{\sin(t/2)} \left(\cos \frac{nt}{2} + i \sin \frac{nt}{2}\right)
\end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$\begin{cases} C_n = \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2} \cos \frac{nt}{2}}{\sin(t/2)} \\ S_n = \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2} \sin \frac{nt}{2}}{\sin(t/2)}. \end{cases}$$

Maintenant on peut majorer, on a :

$$\begin{aligned}
|S| &= \left|\sum_{p=m}^{n} \sin p\omega x\right| = |S_n - S_{m-1}| \leq |S_n| + |S_{m-1}| \\
&\leq \left|\frac{\sin\frac{(n+1)\omega x}{2}\sin\frac{n\omega x}{2}}{\sin(\omega x/2)}\right| + \left|\frac{\sin\frac{m\omega x}{2}\sin\frac{(m-1)\omega x}{2}}{\sin(\omega x/2)}\right| \\
&\leq \frac{1}{|\sin(\omega x/2)|} + \frac{1}{|\sin(\omega x/2)|} = \frac{2}{|\sin(\omega x/2)|}.
\end{aligned}$$

On a de même $|C| \leq \frac{2}{|\sin(\omega x/2)|}$. Les deux sommes étant majorées indépendammant de m et n; la série $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$ est donc convergente pour $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$.

1.1.1 Représentation complexe d'une série trigonométrique

D'après les relations d'Euler :

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}$$

et

$$\sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

la série (1.1) devient :

$$\begin{aligned}
&\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}\right] \\
= \;& \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[e^{in\omega x}\frac{a_n - ib_n}{2} + e^{-in\omega x}\frac{a_n + ib_n}{2}\right]
\end{aligned}$$

En posant :

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; c_{-n} = \overline{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2} \text{ et } c_0 = \frac{a_0}{2},$$

la série devient :

$$\begin{aligned}
c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{in\omega x} + c_{-n}e^{-in\omega x}\right) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega x} \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{-in\omega x} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}
\end{aligned}$$

Cette dernière expression est appelée forme complexe d'une série trigonométrique.

1.1.2 Calcul des coefficients de la série trigonométrique : Cas réel

Mettons nous dans les conditions de convergence uniforme de la série trigonométrique (1.1) et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)].$$

Alors

$$f(x)\cos(n\omega x)=\frac{a_0}{2}\cos(n\omega x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(k\omega x)\cos(n\omega x)+b_k\sin(k\omega x)\cos(n\omega x)\right]$$

$$f(x)\sin(n\omega x)=\frac{a_0}{2}\sin(n\omega x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(k\omega x)\sin(n\omega x)+b_k\sin(k\omega x)\sin(n\omega x)\right]$$

La convergence uniforme nous permet d'avoir :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(n\omega x)+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(k\omega x)\cos(n\omega x)\,dx\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(k\omega x)\cos(n\omega x)\,dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(n\omega x)+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(k\omega x)\sin(n\omega x)\,dx\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(k\omega x)\sin(n\omega x)\,dx.\end{aligned}$$

Or on a

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(k\omega x)\cos(n\omega x)\,dx=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq n\\ \frac{\pi}{\omega} \text{ si } k=n\end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin(k\omega x)\sin(n\omega x)\,dx=\begin{cases}0 \text{ si } k\neq n\\ \frac{\pi}{\omega} \text{ si } k=n\end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\cos(n\omega x)\sin(k\omega x)\,dx=0.$$

On déduit alors les coefficients par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)\,dx\\ b_n &= \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)\,dx.\end{aligned}$$

Ces expressions sont valables même pour $n=0$.

Lemme 1.1 *Soit f une fonction périodique de période $T>0$ et intégrable dans l'intervalle $[0,T]$. Alors pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, on a $\int_0^T f(t)\,dt=\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\,dt$.*

Preuve. La relation de chasles nous permet d'écrire :

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\,dt=\int_\alpha^{0} f(t)\,dt+\int_0^{T} f(t)\,dt+\int_T^{\alpha+T} f(t)\,dt$$

Dans l'intégrale $\int_T^{\alpha+T} f(t)\,dt$ on fait le changement de variables $y=t-T$.

Ceci nous donne $\int_T^{\alpha+T} f(t)\,dt = \int_0^\alpha f(y+T)\,dy = \int_0^\alpha f(y)\,dy$. Donc

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\,dt = \int_\alpha^0 f(t)\,dt + \int_0^T f(t)\,dt + \int_0^\alpha f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt.$$

Moyennant ce lemme, les coefficients peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)\,dx = \frac{\omega}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \forall\alpha\in\mathbb{R} \\ b_n &= \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)\,dx = \frac{\omega}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)\,dx, \forall\alpha\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

En particulier si $\omega = 1$, cas des fonctions 2π-périodique ;

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, . \end{aligned}$$

1.1.3 Calcul des coefficients de la série trigonométrique : Cas complexe

On a $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$.

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\,e^{-in\omega x}dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{i\omega x(k-n)}dx.$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{i\omega x(k-n)}dx = \begin{cases} 0 \text{ si } k\neq n \\ \frac{2\pi}{\omega} \text{ si } k=n. \end{cases}$$

Les coefficients sont alors donnés par la relation :

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\,e^{-in\omega x}dx = \frac{\omega}{2\pi}\int_\alpha^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\,e^{-in\omega x}dx, n\in\mathbb{Z}.$$

1.2 Séries de Fourier

Dans cette partie, on ne va considérer que les fonctions de période 2π. A chaque fois on précisera les formules pour une période quelconque.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application périodique de période $T=2\pi$. On suppose que $\int_I |f(t)|\,dt$ converge sur un intervalle $I=[\alpha,\alpha+2\pi]$ de longueur $2\pi, \forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Définition 1.2 *On appelle série de Fourier associée à f, la série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]$$

avec $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$ *et* $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx$.

Problème : Deux questions se posent :

1. La série de Fourier associée à f est-elle convergente ?
2. En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f?

Rappelons la notion de discontinuité de première espèce.

Définition 1.3 *Une fonction f admet une discontiuité de première espèce en un point x_0 si les limites à droite et à gauche de x_0 existent. (Celles-ci ne sont pas forcément égales sauf en cas de continuité.)*

Théorème 1.1 (Dirichlet) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application périodique de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes (appelées conditions de Dirichlet) :*

1. *Les discontinuités de f (si elles existent) sont de première espèce et sont en nombre fini dans tout intervalle fini.*
2. *f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.*

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] = \begin{cases} f(x) \text{ si } f \text{ est continue en } x \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \text{ si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Les notations $f(x+0)$ et $f(x-0)$ représentent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x.

Remarque 1.1 *Il y a un autre théorème équivalent au théorème (Dirichlet) dû à Jordan.*

Théorème 1.2 (Jordan) *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application périodique de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

1. *Il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ (i.e f est bornée)*
2. *On peut partager l'intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ en sous-intervalles $[\alpha_1, \alpha_2[, [\alpha_2, \alpha_3[, ..., [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$, avec $\alpha_1 = \alpha$ et $\alpha_n = \alpha + 2\pi$ tels que la restriction $f_{|]\alpha_j, \alpha j+1[}$ soit monotone et continue.*

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] = \begin{cases} f(x) \text{ si } f \text{ est continue en } x \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \text{ si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Remarque 1.2 *Nous allons étudier quelques cas particuliers. Rappelons d'abord quelques propriétés. $f : [-k, k] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[-k, k]$.*

1. *Si f est paire alors $\int_{-k}^{k} f(x)dx = 2\int_{0}^{k} f(x)dx$.*
2. *Si f est impaire alors $\int_{-k}^{k} f(x)dx = 0$.*

3. Si f est développable en série de Fourier :

a) *Si f est paire :*

- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$ *car la fonction* $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ *est paire.*
- $b_n = 0$ *car la fonction* $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ *est impaire.*

b) *Si f est impaire :*

- $a_n = 0$ *car la fonction* $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ *est impaire.*
- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$ *car la fonction* $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ *est paire.*

$$f \text{ fonction paire :} \begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx. \\ b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$f \text{ fonction impaire :} \begin{cases} a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}. \\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx. \end{cases}$$

Exemple 1.1 *Soit $f :]-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction périodique, $T = 2\pi$ définie par $f(x) = x$.*

1. *Les discontinuités de f sont les points de la forme $x_k = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ et sont de première espèce car $f(\pi + 0) = \pi$ et $f(\pi - 0) = -\pi$.*
2. *f est partout dérivable sauf aux points x_k. En ces points nous avons :*

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 1 \text{ et } \lim_{x \to \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 1$$

f vérifie les conditions de Dirichlet, donc développable en série de Fourier. f est impaire donc

$$a_0 = a_n = 0$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

et par suite

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

Exemple 1.2 *Soit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ une fonction périodique, $T = 2\pi$ définie par $f(x) = |x|$.*

1. *On a $|f(x)| \leq \pi$.*
2. *$f_{[-\pi,0]}$ est décroissante continue et $f_{[0,\pi]}$ est croissante continue.*
   f satisfait les conditions du théorème de Jordan donc développable en série de Fourier. De plus f est paire, ce qui nous donne $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi xdx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)dx = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

La série de Fourier converge alors vers f et on a

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

Puisque f est continue, la convergence est uniforme.

Remarquons enfin que l'égalité $f(0) = 0$ se traduit par $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et par conséquent $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Une des particularités des séries de Fourier est le calcul des sommes de certaines séries numériques.

1.2.1 Développement en série de Fourier de fonction non périodiques

Il est clair que le développement en série de Fourier se pratique sur les fonctions périodiques. Cependant, il est possible, dans certains cas, de faire de tels développements pour des fonctions quelconques.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction non périodique définie sur l'intervalle $[a,b]$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T \geq b - a$ telle que la restriction $g_{|[a,b]} = f$. Si g satisfait les conditions de Dirichlet, on aura :

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$$

avec a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à g. La somme de cette série coïncide partout avec f dans l'intervalle $[a,b]$ sauf peut-être aux points de discontinuités de f.

Remarque 1.3 *Soit $f :]0,l[\to \mathbb{R}$ une fonction quelconque, et $\ell > 0$. On suppose que f peut-être prolongée sur $]-\ell, 0[$ et que les conditions de Dirichlet ou de Jordan soient satisfaites. Dans ce cas, on a le choix sur ce prolongement. On peut choisir soit un prolongement pair soit un prolongement impair pour éviter les longs calculs des coefficients.*

Exercice 1.1 *Donner une série de Fourier de période 2π qui coïncide sur $]0,\pi[$ avec la fonction $f(x) = e^x$.*

Réponse : Ici on ne précise que l'intervalle où la série de Fourier coïncide avec f, c'est à dire $]0,\pi[$. Comme la période de la série de Fourier est 2π, il y'a alors une infinité de réponses ; examinons trois cas différents.

Notons $\widetilde{f}_i, i = 1,2,3$ le prolongement de f à $\mathbb{R}$ tout entier. $\widetilde{f}_i$ sera une fonction de période 2π qui vaut exactement e^x pour tout x dans $]0,\pi[$.

a) Choisissons un prolongement pair et posons :

$$\widetilde{f}_1(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \in]0,\pi[\\ e^{-x} \text{ si } x \in]-\pi, 0[. \end{cases}$$

On vérifie aisément que $\widetilde{f_1}$ est une fonction paire. Posons $\widetilde{f_1}(0) = 1$ et $\widetilde{f_1}(\pi) = e^{\pi}$, on a alors un prolongement continue sur $\mathbb{R}$. Le graphe de $\widetilde{f_1}$ et celui de la série de Fourier seront identiques. Le calcul des coefficients donne

$$a_0 = \frac{2(e^{\pi}-1)}{\pi}, a_n = 2\frac{(-1)^n e^{\pi} - 1}{1+n^2} \text{ et } b_n = 0.$$

On a alors :

$$S_1(x) = \frac{e^{\pi}-1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^n e^{\pi}-1}{n^2+1}\cos(nx) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \in [0,\pi] \\ e^{-x} \text{ si } x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

b) Choisissons un prolongement impair et posons :

$$\widetilde{f_2}(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \in]0,\pi[\\ -e^{-x} \text{ si } x \in]-\pi, 0[. \end{cases}$$

remarque que $\widetilde{f_2}$ est une fonction impaire. mais n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Elle est discontinue en tout point de la forme $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Le calcul des coefficients donne

$$a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{2n(1-(-1)^n e^{\pi})}{\pi(1+n^2)}.$$

On a alors :

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1-(-1)^n e^{\pi})}{\pi(1+n^2)}\sin(nx) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \in]0,\pi[\\ e^{-x} \text{ si } x \in]-\pi, 0[\\ 0 \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = \pm\pi. \end{cases}$$

c) Choisissons un prolongement ni pair ni impair et posons : $\widetilde{f_3}(x) = e^x$ si $x \in]-\pi, \pi[$. On remarque que $\widetilde{f_3}$ est une fonction discontinue en tout point de la forme $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. On a le resultat final :

$$S_3(x) = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^2+1)}(\cos(nx) - n\sin(nx))\right] = \begin{cases} e^x \text{ si } x \in]-\pi,\pi[\\ \frac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2} \text{ si } x = \pm\pi. \end{cases}$$

On a obtenu trois séries différentes qui valent exactement e^x sur l'intervalle $]0,\pi[$. On pouvait choisir d'autres prolongements et obtenir d'autres séries.

Remarque 1.4 *Si on voulait une série de Fourier de période π, alors il n'y a qu'une seule qui coïncide avec f sur $]0,\pi[$. On trouve ;*

$$\begin{aligned} S_4(x) &= \frac{2(e^{\pi}-1)}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)}(\cos(2nx) - 2n\sin(2nx))\right] \\ &= \begin{cases} e^x \ si \ x \in]0,\pi[\\ \frac{1+e^{\pi}}{2} \ si \ x = 0 \ ou \ x = \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

1.2.2 Egalité de Parseval

Théorème 1.3 (Egalité de Parseval) *Soit f une fonction développable en série de Fourier et de période $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$, alors on a pour α réel quelconque :*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{\omega}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi/\omega} f^2(x)\, dx = 2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$$

$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ *et* $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ *où* $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.5 *1.*

2. Si f est de période 2π, on a :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$$

3. f fonction paire $\Longrightarrow$ f^2 fonction paire $\Longrightarrow \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx$.

4. f fonction impaire $\Longrightarrow$ f^2 fonction paire $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx$.

1.3 Applications

Exemple 1.3 *f étant une fonction 2π-périodique telle que :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x \in]0, \pi[\\ -1 \ si \ ]-\pi, 0[\end{cases}$$

f étant une fonction impaire $\Longrightarrow a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

On a $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt)\, dx = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) = \begin{cases} 0 \ si \ n \ est \ pair, \\ \frac{4}{n\pi} \ si \ n \ est \ impair. \end{cases}$

La série de Fourier associée est :

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} 1 \ si \ x \in]0, \pi[\\ 0 \ si \ x = 0 \ ou \ x = \pi. \end{cases}$$

Remarque 1.6 *Pour* $x = \frac{\pi}{2}$ *on a* $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi/2}{2n+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.*On tire :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4}.$$

Appliquons l'égalité de Parseval :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(t)\, dt = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et l'on tire donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Remarque 1.7 *Posons* $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *série convergente d'après le critère de Riemann. En séparant les pairs et les impairs on a :*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \tag{1.2}$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{S}{4}$*,en substituant dans l'égalité* (1.2) *on a*

$$S = \frac{S}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \Longleftrightarrow \frac{3S}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \Longleftrightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La méthode complexe :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} -e^{-int} dt + \int_{0}^{\pi} e^{-int} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{e^{-int}}{in} \right)_{-\pi}^{0} + \left(\frac{e^{-int}}{-in} \right)_{0}^{\pi} \right] \\ &= -i \frac{1-(-1)\, n}{\pi n} = \frac{1}{2} (a_n - i b_n)\,. \end{aligned}$$

1.4 Exercices et problèmes

Exercice 1.2 *Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \cos^3 x$$

Exercice 1.3 *Soit* $t \in]-1,1[$. *Former le développement en série de Fourier de la fonction* $x \mapsto \frac{\sin x}{1 - 2t\cos x + t^2}$.

Exercice 1.4 *Caculer les coefficients de Fourier réels de la fonction* f *qui vaut* 1 *sur* $]0,\pi[$ *et* -1 *sur* $]-\pi,0[$.

- *En déduire les sommes suivantes :*$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 1.5 *Soit* a *un nombre tel que* $0 < a < \frac{\pi}{2}$. *Trouver les coeficients de Fourier réels de la fonction* 2π*-périodique et mpaire* f_a *telle que*

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 \text{ sur }]0, 2\pi[, \\ 0 \text{ sur } [2a, \pi]. \end{cases}$$

En déduire les sommes suivantes : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(na)}{n^2}$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(na)}{n}$

Exercice 1.6 *Calculer les coefficients de Fourier réels des fonctions sur*$]-\pi,\pi[$ *définies ci-dessous*

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \\ g(x) &= |x|, \\ h(x) &= x^2. \end{aligned}$$

- *En déduire les sommes suivantes :* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

Exercice 1.7 *Développer en série de Fourier les fonctions suivantes puis déterminer la valeur des sommes indiquées :*

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $2\pi-$*périodique impaire telle que* $\forall x\in[0,\pi], f(x)=x(\pi-x)$. *En déduire* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^6}$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $2\pi-$*périodique telle que* $\forall x\in]-\pi,\pi], f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$. *En déduire* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{16n^2+16n+3}$.

Exercice 1.8 *Soit* f *une fonction à valeurs complexes continue sur* $\mathbb{R}$, *admettant une dérivée continue par morceaux. On suppose que*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=0.$$

Montrer que

$$\int_0^{2\pi}|f'(x)|^2\,dx\geq\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\,dx$$

Quand a-t-on égalité ?

Exercice 1.9 *Soit* f *une fonction à valeurs réelles. Calculer en fonction des coefficient de Fourier réels de* f, *ceus des fonctions* g *et* h *définies par*

$$g(x)=f(x)\cos x \;\; et \;\; h(x)=f(x)\sin x.$$

Exercice 1.10 *Soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *la fonction paire,* $2\pi-$*périodique, définie par*

$$f(x)=\begin{cases}4x^2-\pi^2 \;\; si \;\; x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \\ 8x\pi-3\pi^2-4x^2 \;\; sinon\end{cases}$$

1. *Montrer que* f *est de class* $\mathcal{C}^1$ *et calculer sa dérivée.*
2. *Calculer les coefficients de Fouriertrigonométriques de la fonction* f.
3. *En déduire la valeur de* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 1.11 *Soit* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *la fonction régularisée,* $2\pi-$*périodique, impaire, constante égale à* 1 *sur* $]0,\pi[$.

1. *Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.*
2. *Etudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier vers* f.
3. *En déduire* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.
4. *Calculer* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 1.12 *La série de Fourier de la fonction* f *paire* $22\pi-$*périodique qui vaut* $\sqrt{x}$ *pour* $x\in[0,\pi]$ *converge-t-elle uniformément ? Que vaut sa somme ?*