

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE 20 AOUT 1955 SKIKDA

FACULTE DE SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Cours Analyse de Fourier

Karima Kimouche

Année universitaire : 2020/2021

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Séries de Fourier | 3 |
| 1.1 | Séries trigonométriques | 3 |
| 1.1.1 | Représentation complexe d'une série trigonométrique | 5 |
| 1.1.2 | Calcul des coefficients de la série trigonométrique : Cas réel | 5 |
| 1.1.3 | Calcul des coefficients de la série trigonométrique : Cas complexe | 7 |
| 1.2 | Séries de Fourier | 7 |
| 1.2.1 | Développement en série de Fourier de fonction non périodiques | 10 |
| 1.2.2 | Egalité de Parseval | 12 |
| 1.3 | Applications | 12 |
| 1.4 | Exercices et problèmes | 13 |
| 2 | Transformations de Fourier | 15 |
| 2.1 | Transformée de Fourier | 15 |
| 2.2 | Propriétés de la transformée de Fourier | 16 |
| 2.3 | Exemples de transformées de Fourier | 17 |
| 2.4 | Transformée de Fourier, SLITT et filtrage | 18 |
| 2.5 | Exercices et problèmes | 21 |
| 3 | Echantillonnage | 22 |
| 3.1 | Introduction | 22 |
| 3.2 | Théorème d'échantillonnage de Shannon | 22 |
| 3.2.1 | Echantillonnage idéal | 23 |
| 3.3 | Echantillonnage et calcul numérique du spectre -Aliasing | 28 |
| 3.3.1 | Lien coefficient de Fourier et transformée de Fourier | 28 |
| 3.3.2 | Recouvrement du spectre - aliasing | 29 |
| 3.3.3 | Echantillonnage de signaux sinusoïdaux et de signaux aléatoires | 29 |
| 3.3.4 | Quantification du signal échantillonné | 31 |
| 4 | Transformée de Fourier discrète (TFD et TFR) | 34 |
| 4.1 | Introduction | 34 |
| 4.2 | Transformée de Fourier Discrète : TFD | 35 |

| | | |
|-------|--|----|
| 4.2.1 | Définition de la TFD | 35 |
| 4.2.2 | Inversion de la TFD | 35 |
| 4.2.3 | Lien entre la transformée de Fourier et la TFD | 36 |
| 4.2.4 | Comparaison entre la transformée de Fourier et TFD | 38 |
| 4.2.5 | Fenêtres de pondération | 40 |
| 4.2.6 | Fenêtres rectangulaires, triangulaires et paraboliques | 41 |
| 4.2.7 | Fenêtres détruisant par addition algébrique, les lobes secondaires de la fenêtre rectangulaire | 42 |
| 4.2.8 | Problème de visualisation de la TFD | 45 |
| 4.2.9 | Propriétés de la TFD et convolution circulaire | 46 |
| 4.3 | Transformée de Fourier Rapide TFR (Fast Fourier transform FFT) | 49 |
| 4.3.1 | FFT avec entrelacement temporel | 49 |
| 4.3.2 | FFT avec entrelacement fréquentiel | 53 |
| 4.3.3 | Bit reversal | 55 |
| 4.3.4 | Formulation matricielle de l'algorithme de Cooley-Tukey | 55 |
| 4.3.5 | Autres algorithmes de FFT | 60 |
| 4.3.6 | Utilisation de la FFT pour la convolution rapide | 60 |
| 4.4 | Calcul de convolution par section d'une des suites | 61 |
| 4.5 | Exercices et problèmes | 61 |

Chapitre 1

Series de Fourier

1.1 Séries trigonométriques

Dans cette section, nous verrons une classe importante de séries de fonctions, les séries trigonométriques. La propriété essentielle de ces séries est la prise en compte, dans la décomposition d'une fonction périodique en "somme infinie" de fonctions simples, du caractère de périodicité

Définition 1.1 On appelle *série trigonométrique* une série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ dont le terme générale $f_n(x)$ est de la forme :

$$f_0(x) = \frac{a_0}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x). \quad (1.1)$$

avec $x \in \mathbb{R}, \omega > 0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

- On conviendra d'écrire les sommes partielles d'une série trigonométrique (1.1) sous la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$$

Le problème est de déterminer l'ensemble Δ tel que la série (1.1) soit convergente pour tout $x \in \Delta$.

Supposons que la série (1.1) converge et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)].$$

Sachant que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \cos(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) &= \cos(n\omega x + n2k\pi) = \cos(n\omega x) \\ \sin(n\omega(x + 2k\pi/\omega)) &= \sin(n\omega x + n2k\pi) = \sin(n\omega x). \end{aligned}$$

Alors la série (1.1) converge en tout point de la forme $x + \frac{2k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$.

Si la série (1.1) converge dans \mathbb{R} , on aura $f(x) = f(x + \frac{2k\pi}{\omega})$ et par suite la fonction f est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

En conclusion, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La série trigonométrique (1.1) converge dans \mathbb{R} .
2. La série trigonométrique (1.1) converge dans $[0, \frac{2\pi}{\omega}]$.
3. La série trigonométrique (1.1) converge dans $[\alpha, \alpha + \frac{2\pi}{\omega}]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.1 *Si les séries numériques $(\sum a_n)$ et $(\sum b_n)$ sont absolument convergentes alors la série trigonométrique (1.1) est normalement convergente sur \mathbb{R} ; donc absolument et uniformément sur \mathbb{R} .*

Preuve. C'est évident puisque $|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|$.

Proposition 1.2 *Si les suites numériques (a_n) et (b_n) sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique (1.1) est convergente pour $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}$ où $k \in \mathbb{Z}$.*

Preuve. C'est une application direct du théorème d'Abel. Pour cela il suffit tout simplement de montrer que les sommes suivantes sont majorées indépendamment de m et n .

$$S = \sum_{p=m}^n \sin px, C = \sum_{p=m}^n \cos px.$$

Commençons par calculer les sommes suivantes, On a pour $t \neq 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} C_n + iS_n &= \sum_{p=0}^n \cos pt + i \sum_{p=0}^n \sin pt = \sum_{p=0}^n (\cos pt + i \sin pt) \\ &= \sum_{p=0}^n e^{ipt} = 1 + e^{it} + e^{2it} + \dots + e^{int} = \frac{1 - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{(1 - \cos(n+1)t) - i \sin(n+1)t}{(1 - \cos t) - i \sin t} = \frac{2 \sin^2 \frac{(n+1)t}{2} - 2i \sin \frac{(n+1)t}{2} \cos \frac{(n+1)t}{2}}{2 \sin^2 (t/2) - 2i \sin (t/2) \cos (t/2)} \\ &= \frac{-2i \sin \frac{(n+1)t}{2} \left(\cos \frac{(n+1)t}{2} + i \sin \frac{(n+1)t}{2} \right)}{-2i \sin (t/2) \left(\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2} \right)} \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2} \left[\cos \frac{(n+1)t}{2} + i \sin \frac{(n+1)t}{2} \right]}{\sin (t/2) \left[\cos \frac{t}{2} + i \sin \frac{t}{2} \right]} \\ &= \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2} \left(\cos \frac{nt}{2} + i \sin \frac{nt}{2} \right)}{\sin (t/2)} \end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$\begin{cases} C_n = \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2} \cos \frac{nt}{2}}{\sin(t/2)} \\ S_n = \frac{\sin \frac{(n+1)t}{2} \sin \frac{nt}{2}}{\sin(t/2)}. \end{cases}$$

Maintenant on peut majorer, on a :

$$\begin{aligned} |S| &= \left| \sum_{p=m}^n \sin p\omega x \right| = |S_n - S_{m-1}| \leq |S_n| + |S_{m-1}| \\ &\leq \left| \frac{\sin \frac{(n+1)\omega x}{2} \sin \frac{n\omega x}{2}}{\sin(\omega x/2)} \right| + \left| \frac{\sin \frac{m\omega x}{2} \sin \frac{(m-1)\omega x}{2}}{\sin(\omega x/2)} \right| \\ &\leq \frac{1}{|\sin(\omega x/2)|} + \frac{1}{|\sin(\omega x/2)|} = \frac{2}{|\sin(\omega x/2)|}. \end{aligned}$$

On a de même $|C| \leq \frac{2}{|\sin(\omega x/2)|}$. Les deux sommes étant majorées indépendamment de m et n ; la série $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$ est donc convergente pour $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}, k \in \mathbb{Z}$.

1.1.1 Représentation complexe d'une série trigonométrique

D'après les relations d'Euler :

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}$$

et

$$\sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

la série (1.1) devient :

$$\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} + b_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{in\omega x} \frac{a_n - ib_n}{2} + e^{-in\omega x} \frac{a_n + ib_n}{2} \right] \end{aligned}$$

En posant :

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; c_{-n} = \bar{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2} \text{ et } c_0 = \frac{a_0}{2},$$

la série devient :

$$\begin{aligned} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega x} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{-in\omega x} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x} \end{aligned}$$

Cette dernière expression est appelée forme complexe d'une série trigonométrique.

1.1.2 Calcul des coefficients de la série trigonométrique : Cas réel

Mettons nous dans les conditions de convergence uniforme de la série trigonométrique (1.1) et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)].$$

Alors

$$f(x) \cos(n\omega x) = \frac{a_0}{2} \cos(n\omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) \cos(n\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \cos(n\omega x)]$$

$$f(x) \sin(n\omega x) = \frac{a_0}{2} \sin(n\omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) \sin(n\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \sin(n\omega x)]$$

La convergence uniforme nous permet d'avoir :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(n\omega x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(k\omega x) \cos(n\omega x) dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(k\omega x) \cos(n\omega x) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(n\omega x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(k\omega x) \sin(n\omega x) dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(k\omega x) \sin(n\omega x) dx. \end{aligned}$$

Or on a

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(k\omega x) \cos(n\omega x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \frac{\pi}{\omega} & \text{si } k = n \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(k\omega x) \sin(n\omega x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \frac{\pi}{\omega} & \text{si } k = n \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(n\omega x) \sin(k\omega x) dx = 0.$$

On déduit alors les coefficients par les expressions suivantes :

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x) dx$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x) dx.$$

Ces expressions sont valables même pour $n = 0$.

Lemme 1.1 Soit f une fonction périodique de période $T > 0$ et intégrable dans l'intervalle $[0, T]$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\int_0^T f(t) dt = \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt$.

Preuve. La relation de chasles nous permet d'écrire :

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt = \int_{\alpha}^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_T^{\alpha+T} f(t) dt$$

Dans l'intégrale $\int_T^{\alpha+T} f(t) dt$ on fait le changement de variables $y = t - T$.

Ceci nous donne $\int_T^{\alpha+T} f(t) dt = \int_0^\alpha f(y+T) dy = \int_0^\alpha f(y) dy$. Donc

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(t) dt = \int_\alpha^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_0^\alpha f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Moyennant ce lemme, les coefficients peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x) dx = \frac{\omega}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(n\omega x) dx, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ b_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x) dx = \frac{\omega}{\pi} \int_\alpha^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin(n\omega x) dx, \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En particulier si $\omega = 1$, cas des fonctions 2π -périodique ;

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, . \end{aligned}$$

1.1.3 Calcul des coefficients de la série trigonométrique : Cas complexe

On a $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$.

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) e^{-in\omega x} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{i\omega x(k-n)} dx.$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{i\omega x(k-n)} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \frac{2\pi}{\omega} & \text{si } k = n. \end{cases}$$

Les coefficients sont alors donnés par la relation :

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) e^{-in\omega x} dx = \frac{\omega}{2\pi} \int_\alpha^{\alpha+\frac{2\pi}{\omega}} f(x) e^{-in\omega x} dx, n \in \mathbb{Z}.$$

1.2 Séries de Fourier

Dans cette partie, on ne va considérer que les fonctions de période 2π . A chaque fois on précisera les formules pour une période quelconque.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application périodique de période $T = 2\pi$. On suppose que $\int_I |f(t)| dt$ converge sur un intervalle $I = [\alpha, \alpha + 2\pi]$ de longueur 2π , $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 1.2 On appelle série de Fourier associée à f , la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

avec $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$ et $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$.

Problème : Deux questions se posent :

1. La série de Fourier associée à f est-elle convergente ?
2. En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f ?

Rappelons la notion de discontinuité de première espèce.

Définition 1.3 Une fonction f admet une discontinuité de première espèce en un point x_0 si les limites à droite et à gauche de x_0 existent. (Celles-ci ne sont pas forcément égales sauf en cas de continuité.)

Théorème 1.1 (Dirichlet) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application périodique de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes (appelées conditions de Dirichlet) :

1. Les discontinuités de f (si elles existent) sont de première espèce et sont en nombre fini dans tout intervalle fini.
2. f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Les notations $f(x+0)$ et $f(x-0)$ représentent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x .

Remarque 1.1 Il y a un autre théorème équivalent au théorème (Dirichlet) dû à Jordan.

Théorème 1.2 (Jordan) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application périodique de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. Il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M$ (i.e f est bornée)
2. On peut partager l'intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ en sous-intervalles $[\alpha_1, \alpha_2[$, $[\alpha_2, \alpha_3[$, ..., $[\alpha_{n-1}, \alpha_n]$, avec $\alpha_1 = \alpha$ et $\alpha_n = \alpha + 2\pi$ tels que la restriction $f|_{[\alpha_j, \alpha_{j+1}[}$ soit monotone et continue.

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Remarque 1.2 Nous allons étudier quelques cas particuliers. Rappelons d'abord quelques propriétés. $f : [-k, k] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[-k, k]$.

1. Si f est paire alors $\int_{-k}^k f(x)dx = 2 \int_0^k f(x)dx$.
2. Si f est impaire alors $\int_{-k}^k f(x)dx = 0$.

3. Si f est développable en série de Fourier :

a) Si f est paire :

– $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$ car la fonction $x \mapsto f(x) \cos(nx)$ est paire.

– $b_n = 0$ car la fonction $x \mapsto f(x) \sin(nx)$ est impaire.

b) Si f est impaire :

– $a_n = 0$ car la fonction $x \mapsto f(x) \cos(nx)$ est impaire.

– $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$ car la fonction $x \mapsto f(x) \sin(nx)$ est paire.

$$\begin{aligned} f \text{ fonction paire} &: \begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx. \\ b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \\ f \text{ fonction impaire} &: \begin{cases} a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}. \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 1.1 Soit $f :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique, $T = 2\pi$ définie par $f(x) = x$.

1. Les discontinuités de f sont les points de la forme $x_k = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ et sont de première espèce car $f(\pi+0) = \pi$ et $f(\pi-0) = -\pi$.

2. f est partout dérivable sauf aux points x_k . En ces points nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = 1$$

f vérifie les conditions de Dirichlet, donc développable en série de Fourier. f est impaire donc

$$a_0 = a_n = 0$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

et par suite

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

Exemple 1.2 Soit $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique, $T = 2\pi$ définie par $f(x) = |x|$.

1. On a $|f(x)| \leq \pi$.

2. $f_{[-\pi, 0]}$ est décroissante continue et $f_{[0, \pi]}$ est croissante continue.

f satisfait les conditions du théorème de Jordan donc développable en série de Fourier. De plus f est paire, ce qui nous donne $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

La série de Fourier converge alors vers f et on a

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

Puisque f est continue, la convergence est uniforme.

Remarquons enfin que l'égalité $f(0) = 0$ se traduit par $\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et par conséquent $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Une des particularités des séries de Fourier est le calcul des sommes de certaines séries numériques.

1.2.1 Développement en série de Fourier de fonction non périodiques

Il est clair que le développement en série de Fourier se pratique sur les fonctions périodiques. Cependant, il est possible, dans certains cas, de faire de tels développements pour des fonctions quelconques.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non périodique définie sur l'intervalle $[a, b]$. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T \geq b - a$ telle que la restriction $g|_{[a,b]} = f$. Si g satisfait les conditions de Dirichlet, on aura :

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$$

avec a_n et b_n les coefficients de Fourier associés à g . La somme de cette série coïncide partout avec f dans l'intervalle $[a, b]$ sauf peut-être aux points de discontinuités de f .

Remarque 1.3 Soit $f :]0, l[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque, et $l > 0$. On suppose que f peut-être prolongée sur $] -l, 0[$ et que les conditions de Dirichlet ou de Jordan soient satisfaites. Dans ce cas, on a le choix sur ce prolongement. On peut choisir soit un prolongement pair soit un prolongement impair pour éviter les longs calculs des coefficients.

Exercice 1.1 Donner une série de Fourier de période 2π qui coïncide sur $]0, \pi[$ avec la fonction $f(x) = e^x$.

Réponse : Ici on ne précise que l'intervalle où la série de Fourier coïncide avec f , c'est à dire $]0, \pi[$. Comme la période de la série de Fourier est 2π , il y'a alors une infinité de réponses ; examinons trois cas différents.

Notons $\tilde{f}_i, i = 1, 2, 3$ le prolongement de f à \mathbb{R} tout entier. \tilde{f}_i sera une fonction de période 2π qui vaut exactement e^x pour tout x dans $]0, \pi[$.

a) Choisissons un prolongement pair et posons :

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \in]0, \pi[\\ e^{-x} & \text{si } x \in]-\pi, 0[. \end{cases}$$

On vérifie aisément que \tilde{f}_1 est une fonction paire. Posons $\tilde{f}_1(0) = 1$ et $\tilde{f}_1(\pi) = e^\pi$, on a alors un prolongement continue sur \mathbb{R} . Le graphe de \tilde{f}_1 et celui de la série de Fourier seront identiques. Le calcul des coefficients donne

$$a_0 = \frac{2(e^\pi - 1)}{\pi}, a_n = 2 \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{1 + n^2} \text{ et } b_n = 0.$$

On a alors :

$$S_1(x) = \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2 + 1} \cos(nx) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \in [0, \pi] \\ e^{-x} \text{ si } x \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

b) Choisissons un prolongement impair et posons :

$$\tilde{f}_2(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \in]0, \pi[\\ -e^{-x} \text{ si } x \in]-\pi, 0[. \end{cases}$$

remarque que \tilde{f}_2 est une fonction impaire. mais n'est pas continue sur \mathbb{R} . Elle est discontinue en tout point de la forme $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Le calcul des coefficients donne

$$a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{2n(1 - (-1)^n e^\pi)}{\pi(1 + n^2)}.$$

On a alors :

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(1 - (-1)^n e^\pi)}{\pi(1 + n^2)} \sin(nx) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \in]0, \pi[\\ e^{-x} \text{ si } x \in]-\pi, 0[\\ 0 \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = \pm\pi. \end{cases}$$

c) Choisissons un prolongement ni pair ni impair et posons : $\tilde{f}_3(x) = e^x$ si $x \in]-\pi, \pi[$. On remarque que \tilde{f}_3 est une fonction discontinue en tout point de la forme $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. On a le resultat final :

$$S_3(x) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 + 1)} (\cos(nx) - n \sin(nx)) \right] = \begin{cases} e^x \text{ si } x \in]-\pi, \pi[\\ \frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} \text{ si } x = \pm\pi. \end{cases}$$

On a obtenu trois séries différentes qui valent exactement e^x sur l'intervalle $]0, \pi[$. On pouvait choisir d'autres prolongements et obtenir d'autres séries.

Remarque 1.4 Si on voulait une série de Fourier de période π , alors il n'y a qu'une seule qui coïncide avec f sur $]0, \pi[$. On trouve ;

$$\begin{aligned} S_4(x) &= \frac{2(e^\pi - 1)}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)} (\cos(2nx) - 2n \sin(2nx)) \right] \\ &= \begin{cases} e^x \text{ si } x \in]0, \pi[\\ \frac{1+e^\pi}{2} \text{ si } x = 0 \text{ ou } x = \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

1.2.2 Egalité de Parseval

Théorème 1.3 (Egalité de Parseval) Soit f une fonction développable en série de Fourier et de période $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$, alors on a pour α réel quelconque :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{\omega}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi/\omega} f^2(x) dx = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \text{ et } c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 1.5 1.

2. Si f est de période 2π , on a :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

3. f fonction paire $\implies f^2$ fonction paire $\implies \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx$.

4. f fonction impaire $\implies f^2$ fonction paire $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(x) dx$.

1.3 Applications

Exemple 1.3 f étant une fonction 2π -périodique telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ -1 & \text{si } x \in]-\pi, 0[\end{cases}$$

f étant une fonction impaire $\implies a_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{On a } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nt) dx = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La série de Fourier associée est :

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pi. \end{cases}$$

Remarque 1.6 Pour $x = \frac{\pi}{2}$ on a $S(\frac{\pi}{2}) = 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi/2}{2n+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. On tire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Appliquons l'égalité de Parseval :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f^2(t) dt = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

et l'on tire donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Remarque 1.7 Posons $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ série convergente d'après le critère de Riemann. En séparant les pairs et les impairs on a :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \quad (1.2)$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{S}{4}$, en substituant dans l'égalité (1.2) on a

$$S = \frac{S}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \iff \frac{3S}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \iff S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

La méthode complexe :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -e^{-int} dt + \int_0^{\pi} e^{-int} dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{e^{-int}}{-in} \right)_{-\pi}^0 + \left(\frac{e^{-int}}{-in} \right)_0^{\pi} \right] \\ &= -i \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} = \frac{1}{2} (a_n - ib_n). \end{aligned}$$

1.4 Exercices et problèmes

Exercice 1.2 Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \cos^3 x$$

Exercice 1.3 Soit $t \in]-1, 1[$. Former le développement en série de Fourier de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{1-2t \cos x + t^2}$.

Exercice 1.4 Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction f qui vaut 1 sur $]0, \pi[$ et -1 sur $]-\pi, 0[$.

- En déduire les sommes suivantes : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 1.5 Soit a un nombre tel que $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Trouver les coefficients de Fourier réels de la fonction 2π -périodique et impaire f_a telle que

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur }]0, 2\pi[, \\ 0 & \text{sur } [2a, \pi]. \end{cases}$$

En déduire les sommes suivantes : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^4(na)}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(na)}{n}$

Exercice 1.6 Calculer les coefficients de Fourier réels des fonctions sur $]-\pi, \pi[$ définies ci-dessous

$$\begin{aligned} f(x) &= x, \\ g(x) &= |x|, \\ h(x) &= x^2. \end{aligned}$$

- En déduire les sommes suivantes : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$
et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 1.7 Développer en série de Fourier les fonctions suivantes puis déterminer la valeur des sommes indiquées :

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique impaire telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = x(\pi - x)$. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$
et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique telle que $\forall x \in]-\pi, \pi]$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2+16n+3}$.

Exercice 1.8 Soit f une fonction à valeurs complexes continue sur \mathbb{R} , admettant une dérivée continue par morceaux. On suppose que

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0.$$

Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx \geq \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

Quand a-t-on égalité ?

Exercice 1.9 Soit f une fonction à valeurs réelles. Calculer en fonction des coefficients de Fourier réels de f , ceux des fonctions g et h définies par

$$g(x) = f(x) \cos x \text{ et } h(x) = f(x) \sin x.$$

Exercice 1.10 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π -périodique, définie par

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - \pi^2 & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 8x\pi - 3\pi^2 - 4x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est de class \mathcal{C}^1 et calculer sa dérivée.
2. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de la fonction f .
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 1.11 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction régularisée, 2π -périodique, impaire, constante égale à 1 sur $]0, \pi[$.

1. Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques.
2. Etudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier vers f .
3. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
4. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 1.12 La série de Fourier de la fonction f paire 2π -périodique qui vaut \sqrt{x} pour $x \in [0, \pi]$ converge-t-elle uniformément ? Que vaut sa somme ?

Chapitre 2

Transformations de Fourier

Au chapitre 1, nous avons développé les fonctions périodiques en séries de sinus et de cosinus, ou d'exponentielles complexes, appelées séries de Fourier.

Deux questions se posent alors : premièrement, est-il possible de représenter une fonction non périodique par quelque chose d'analogue à une série de Fourier ?

Ensuite, peut-on étendre ou modifier le concept de série de Fourier de manière à inclure le cas d'un spectre continu ?

De même qu'à la limite continue, une somme est remplacée par une intégrale, la série de Fourier sera remplacée par une intégrale de Fourier. Celle-ci peut être utilisée pour représenter des fonctions non périodiques, par exemple un son qui n'est pas répété, une impulsion unique de tension, ou un flash de lumière. L'intégrale de Fourier fait intervenir un spectre continu de fréquences, par exemple un ensemble de sons musicaux ou de couleurs de lumière.

2.1 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est l'un des outils, sinon l'outil fondamental du traiteur de signaux. Elle permet d'associer à la " forme d'onde " habituelle, la représentation d'un signal en fonction de sa variable d'évolution, une autre représentation, complémentaire, dans le domaine fréquentiel. L'utilisation de cette description fréquentielle permet en outre de caractériser simplement les filtres linéaires, et faciliter leur étude.

Définition 2.1 On appelle transformée de Fourier (TF) de la fonction $f(t)$, la fonction notée $\mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega)$:

$$\mathcal{F}f(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt. \quad (2.1)$$

Définition 2.2 (transformée de Fourier inverse) On appelle transformée de Fourier inverse de la fonction $\hat{f}(\omega)$, la fonction notée $\mathcal{F}^{-1}f = f(t)$:

$$\mathcal{F}^{-1}f = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi i\omega t} dt.$$

Remarque 2.1 - La définition de transformée de Fourier n'est pas unique.

- $\mathcal{F}f$ est une fonction de ω , en général complexe, qui comprend donc une partie réelle $\text{Re}[\mathcal{F}f(\omega)]$ et une partie imaginaire $\text{Im}[\mathcal{F}f(\omega)]$:

$$\text{Re}[\mathcal{F}f(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi\omega t) dt.$$

et

$$\text{Im}[\mathcal{F}f(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(2\pi\omega t) dt.$$

- Pour que la transformée de Fourier de $f(t)$ existe et soit réciproque, il suffit que $f(t)$ soit une fonction de carré sommable. Cela signifie que $f(t)$, ainsi que sa transformée de Fourier, sont à énergie finie. Toutes les fonctions existant physiquement vérifient ces conditions parce qu'on les observe sur un temps fini.
- La transformée de Fourier permet de passer d'une représentation dans l'espace des temps à une représentation dans l'espace des fréquences.
- La formule (2.1) peut être interprétée de la façon suivante : $f(t)$ se décompose comme une somme infinie de fonctions harmoniques ($e^{2\pi i\omega t}$) pondérées par les coefficients $\hat{f}(\omega)$;
- $\hat{f}(\omega)$ est le spectre de la fonction $f(t)$;
- $|\hat{f}(\omega)|$ est appelé module du spectre de $f(t)$, cette quantité représente la contribution de chaque harmonique ;
- $\arg(\hat{f}(\omega))$ est la phase du spectre, cette quantité représente le déphasage entre chaque harmonique ;
- La transformée de Fourier est réversible :

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f(t)).$$

- Il est assez facile de calculer la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ sur un ordinateur en utilisant les algorithmes de FFT (Fast Fourier Transform). Toutefois, comme nous le verrons, les algorithmes de FFT sont des moyens pour calculer les transformées de Fourier discrète qui diffère sur plusieurs points des transformées de Fourier "continues", telles que nous venons de les voir.

La transformée de Fourier et donc une autre 'vision' de la fonction $f(t)$, la visualisation du spectre permet de voir les informations autrement. Cette outil est l'outil de base de l'analyse harmonique.

2.2 Propriétés de la transformée de Fourier

1. **Linéarité** : $\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = a\hat{f}(\omega) + b\hat{g}(\omega)$.
2. **Dérivation** : $\mathcal{F}\left\{\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right\} = i\omega\hat{f}(\omega)$.
3. **Dérivée d'ordre supérieur** : $\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\right\} = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$.

4. **Décalage dans le temps** (translations) : $\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-2\pi i \omega t_0} \widehat{f}(\omega)$.

5. **Relation de Parseval** : Cette relation est comparable à celle qui existe pour des signaux périodiques. Soit $f(t)$ un signal de carré sommable (ou à énergie finie) et qui admet $\widehat{f}(\omega)$ pour TF, on a :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

6. **Théorème de PLANCHEREL** (Propriété de convolution) : Soient f et g , deux fonctions absolument intégrables sur l'axe des réels, alors la transformée de Fourier du produit de convolution de f par g est le produit simple des transformées de Fourier :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} &= \mathcal{F}f(\omega) \mathcal{F}g(\omega) \\ \mathcal{F}\{f(t)g(t)\} &= \mathcal{F}f(\omega) * \mathcal{F}g(\omega) \end{aligned}$$

Ce théorème est très utile : il permet de simplifier un grand nombre de calcul et il est utilisé dans de nombreuses applications.

7. **Transformée de Fourier de la fonction généralisée de Dirac** : La transformée de Fourier de la fonction généralisée de Dirac est :

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \exp\{-i\omega t_0\}.$$

8. **Transformées de Fourier des fonctions sinus et cosinus** : Les transformées de Fourier des fonctions sinus et cosinus sont respectivement :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} &= \frac{i}{2} [\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)] \\ \mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} &= \frac{i}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \end{aligned}$$

9. **Transformée de Fourier du peigne de Dirac** :

$$\mathcal{F}\{III(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)\right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n/T)$$

Cette propriété montre que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac de période T est un peigne de Dirac avec une fréquence de récurrence de $1/T$ et une amplitude de $1/T$.

2.3 Exemples de transformées de Fourier

Exemple 2.1 (*Le son*) : Un objet de la vie quotidienne pour lequel il est naturel de parler de fréquence et de spectre est le son. Tout le monde à déjà associé à un son les concepts de graves ou aigus. Ces mots signifient respectivement qu'un son possède un spectre avec seulement des basses fréquences ou seulement des hautes fréquences. On fait donc de la transformée de Fourier sans le savoir !.

Applet : traitement temps - réel de sons : acquisition et visualisation des sons sous forme de fonction du temps et de sa transformée de Fourier.

La transformée de Fourier et donc une autre 'vision' de la fonction $f(t)$, la visualisation du spectre permet de voir les informations autrement. Cette outil est l'outil de base de l'analyse harmonique.

Exemple 2.2 Nous présentons ci-après un ensemble de fonctions non périodiques et de leurs transformées de Fourier. Ainsi, à partir de cette table des transformées de Fourier et des propriétés associées à cette transformation, il est possible de déterminer la représentation spectrale de la plupart des fonctions usuelles sans effectuer le calcul intégrale donné par la relation (2.1).

Remarque 2.2 - La fonction « échelon unité » $u(t)$ permet en particulier de rendre un signal quelconque $f(t)$ causal en réalisant le produit $f(t).u(t)$.

- La fonction « porte » $\Pi_\tau(t)$ permet de découper dans un signal une portion de durée finie. Cette opération conduit à transformer un signal théorique (représentation mathématique) en un signal réel n'existant que pendant un temps fini de durée t , correspondant au temps de mesure ou d'observation.

2.4 Transformée de Fourier, SLITT et filtrage

On considère un filtre appartenant à la classe des SLITT (Systèmes linéaires et Invariants par Translation dans le Temps). Rappelons que les systèmes linéaires et invariants par translation dans le temps sont caractérisés par une équation de convolution :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \omega) e(\omega) d\omega = h(t) * e(t),$$

$s(t)$ est le signal de sortie du filtre, $e(t)$ est le signal d'entrée du filtre et $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre. En effet, si $e(t) = \delta(t)$ alors $s(t) = h(t)$, car comme nous l'avons vu, la fonction généralisée de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution.

D'après le théorème de convolution, la transformée de Fourier de cette relation s'écrit :

$$\widehat{s}(t) = H(\omega) \widehat{e}(\omega)$$

Définition 2.3 (Fonction de transfert) On appelle fonction de transfert la fonction notée $H(\omega)$ reliant la sortie et l'entrée d'un système linéaire et invariant dans le temps :

$$H(\omega) = \frac{\widehat{s}(t)}{\widehat{e}(\omega)}$$

Cette fonction caractérise entièrement le système étudié, elle contient l'intégralité de ces propriétés physiques.

On voit qu'une fois $H(\omega)$ connue, on peut calculer n'importe quelle sortie pour une entrée donnée :

$$\widehat{s}(t) = H(\omega) \widehat{e}(\omega)$$

On remarque que la réponse impulsionnelle du filtre et la fonction de transfert sont reliées par la relation :

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H(\omega))$$

L'information sur le filtre est contenue soit dans la réponse impulsionnelle $h(t)$, soit dans la fonction de transfert $H(\omega)$ qui sont deux représentations d'une même chose, l'une dans l'espace des temps, l'autre dans l'espace des fréquences. Selon, le problème, il est plus intéressant de travailler avec l'une ou l'autre de ces représentations.

| Représentation temporelle | Représentation spectrale |
|---|---|
| Fonction porte $f(t) = A \Pi_r(t)$ avec $\Pi_r(t) \begin{cases} 1, \text{ pour } t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \\ 0, \text{ pour } t \notin [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \end{cases}$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \widehat{f}(t) = A \cdot \tau \frac{\sin(\pi\omega\tau)}{\pi\omega\tau}$ |
| Fonction sinus tronquée (limitée à l'intervalle $[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$) $f(t) = A \sin(2\pi\omega_0 t) \Pi_r(t)$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{iA\tau}{2} \left[\frac{\sin(\pi\tau(\omega+\omega_0))}{\pi\tau(\omega+\omega_0)} - \frac{\sin(\pi\tau(\omega-\omega_0))}{\pi\tau(\omega-\omega_0)} \right]$ |
| Fonction sinus cardinal : $f(t) = A \sin c(t\tau) = A \frac{\sin(t\tau)}{t\tau}$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A}{\tau} \Pi_r(t)$ |
| Fonction sinusoïdale de variable quadratique $f(t) = A \sin(at^2)$ | $\mathcal{F}(f(t)) = A \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left[\cos\left(\frac{-(\pi\omega)^2}{a}\right) + \frac{\pi}{4} \right]$ |
| Fonction cosinusoidale de variable quadratique $f(t) = A \cos(at^2)$ | $\mathcal{F}(f(t)) = A \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left[\cos\left(\frac{-(\pi\omega)^2}{a}\right) - \frac{\pi}{4} \right]$ |
| Fonction triangle : $f(t) = A \Lambda_{2\tau}(at^2)$ avec $\Lambda_{2\tau}(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{\tau} \text{ pour } t \in [-\tau, 0] \\ 1 - \frac{t}{\tau} \text{ pour } t \in [0, +\tau] \\ 0 \text{ pour } t \notin [-\tau, +\tau] \end{cases}$ | $\mathcal{F}(f(t)) = A \cdot \tau [\sin c(\omega\tau)]^2$ |
| Fonction sinuscardinal quadratique : $f(t) = A \cdot [\sin c(\nu t)]^2 = A \left[\frac{\sin c(\pi\nu t)}{\pi\nu t} \right]^2$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A}{\nu} \Lambda_{2\nu}(\omega)$ |
| Fonction exponentielle symétrique : $f(t) = A \exp\{-a t \}$ avec $a > 0$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A}{2a} \exp\{-a \omega \}$ |
| Fonction rapport du second ordre : $f(t) = \frac{A}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$ avec $a > 0$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{2Aa}{a^2 + 4\pi^2 \omega^2}$ |
| Fonction d'Heaviside ou échelon unité : $f(t) = H(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ 1 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{2\pi i \omega} + \frac{1}{2} \delta(\omega)$ |
| Fonction signe : $f(t) = \text{sgn}(t) = \frac{t}{ t }$, avec $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t \geq 0 \\ -1 \text{ pour } t < 0 \end{cases}$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{i\pi\omega}$ |
| Dérivée de la fonction signe : $f(t) = \frac{d(\text{sgn}(t))}{dt} = 2\delta(t)$ | $\mathcal{F}(f(t)) = 2$ |
| Fonction exponentielle décroissante : $f(t) = Au(t)e^{-at}$ avec $a > 0$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A}{a + 2\pi i \omega}$ |
| Fonction impulsionnelle exponentielle : $f(t) = Au(t)(e^{-at} - e^{-bt})$ avec $a > 0, b > 0$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A(b-a)}{(a+2\pi i \omega)(b+2\pi i \omega)}$ |
| Fonction sinusoïdale amortie : $f(t) = Au(t) \sin(2\pi\omega_0 t) e^{-at}$ avec $a > 0$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A \cdot (2\pi\omega_0)}{(a+2\pi i \omega)^2 + (2\pi\omega_0)^2}$ |
| Fonction cosinusoidale amortie : $f(t) = Au(t) \cos(2\pi\omega_0 t) e^{-at}$ avec $a > 0$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A \cdot (a+2\pi\omega_0)}{(a+2\pi i \omega)^2 + (2\pi\omega_0)^2}$ |
| Fonction cosinusoidale causale : $f(t) = Au(t) \cos(2\pi\omega_0 t)$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A}{4} \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0) + \frac{2\omega}{i\pi(\omega^2 - \omega_0^2)}$ |
| Fonction sinusoïdale causale : $f(t) = Au(t) \sin(2\pi\omega_0 t)$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{iA}{4} \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0) + \frac{2i\omega}{\pi(\omega^2 - \omega_0^2)}$ |
| Fonction gaussienne quelconque : $f(t) = Ae^{-at^2}$ avec $a > 0$ | $\mathcal{F}(f(t)) = A \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{(\pi\omega)^2}{a}}$ |
| Pic de Dirac de poids A : $f(t) = A\delta(t)$ | $\mathcal{F}(f(t)) = A$ |
| Fonction constante : $f(t) = A$ | $\mathcal{F}(f(t)) = A\delta(\omega)$ |

2.5 Exercices et problèmes

Chapitre 3

Echantillonnage

Nous nous intéressons dans ce chapitre à une question unique : la conséquence de l'échantillonnage qui fait passer d'une infinité dense (temps continu) à une infinité dénombrable. Nous démontrons un théorème célèbre, le théorème de Shannon dont le résultat est extrêmement simple à retenir mais qui est plus difficile à interpréter.

3.1 Introduction

Les phénomènes qui nous entourent varient généralement de manière continue. Un son, une température, un signal électrique peuvent prendre n'importe quelle valeur : on parle de signal analogique.

Un signal analogique est un signal continu qui peut prendre une infinité de valeurs, alors que le signal numérique est un signal discret (discontinu), et codé sous forme de bits prenant la valeur 0 ou 1. Il peut ainsi facilement être enregistré, traité et restitué très fidèlement.

Le problème pratique est de transformer un signal analogique continu en un signal discret échantillonné pour un traitement numérique. Pour ce faire, un échantillonneur enregistre le signal toutes les a secondes et il le transforme en impulsions. Un convertisseur analogique/numérique (C.A.N) code les impulsions en données numériques pour le traitement en machine.

Remarque 3.1 *Les signaux à traiter (son, onde électromagnétique, ...) sont convertis en signaux électriques à l'aide de transducteurs.*

3.2 Théorème d'échantillonnage de Shannon

Définition 3.1 (Signal à bande limitée) *Un signal s de $L^1(\mathbb{R})$ continu par morceaux dont le spectre ne comporte pas de fréquences supérieures à λ_c (c'est-à-dire tel que le support de \widehat{s} est borné inclus dans $[-\lambda_c, \lambda_c]$) est dite bande limitée.*

Remarque 3.2 *Le principe d'incertitude que nous verrons plus tard indique qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être toutes les deux à support compact. Donc si un signal est à bande limitée, il est nécessairement à support non borné et C^∞ .*

Définition 3.2 (Fréquence de Nyquist) La fréquence de bande limitée λ_c est appelée fréquence de Nyquist.

Soit a un réel strictement positif. On note s_0 la fonction $t \rightarrow \text{sinc}\left(\frac{\pi}{a}t\right)$ (où sinc est la fonction sinus cardinal) et $s_n = s_0(\cdot - na)$

$$s_0(t) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right)}{\frac{\pi}{a}t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad \text{et } s_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}(t-na)\right)}{\frac{\pi}{a}(t-na)} & \text{si } t \neq na \\ 1 & \text{si } t = na \end{cases}$$

On définit la fonction "créneau" \mathbb{k}_a (porte) par :

$$\mathbb{k}_a(x) = \begin{cases} a & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2a} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Remarque 3.3 La transformée de Fourier de la fonction porte définie ci-dessus est un sinus cardinal : $\mathcal{F}(\mathbb{k}_a(x)) = \widehat{\mathbb{k}}_a(x) = \text{sinc}\left(\frac{\pi}{a}x\right)$

Définition 3.3 L'échantillonnage est une opération qui consiste à représenter un signal analogique continu $s(t)$ par un ensemble de valeurs $s(nT_e)$ avec n entier situées à des instants discrets espacés de T_e constante, appelée la période d'échantillonnage (i.e. T_e). On note $f_e = \frac{1}{T_e}$ la fréquence d'échantillonnage.

Cette opération est réalisée par un circuit appelé « préleveur ou échantillonneur » symbolisé souvent par un interrupteur. Dans une première phase, nous pouvons faire l'hypothèse que cette durée de prélèvement du signal est très courte et négligeable.

3.2.1 Echantillonnage idéal

L'échantillonnage idéal est modélisé par la multiplication du signal continu $s(t)$ et d'un peigne de Dirac de période T_e .

$$\begin{aligned} s_e(t) &= s(t) \cdot \delta_{T_e}(t) \\ &= s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{T_e}(t - nT_e) \\ &= s(nT_e) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{T_e}(t - nT_e) \end{aligned}$$

Le spectre du signal échantillonné est donc le suivant :

$$\begin{aligned} S_e(f) &= \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f) * \delta(f - nf_e) \\ &= \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nf_e). \end{aligned}$$

On obtient donc un spectre infini qui provient de la périodisation du spectre du signal d'origine autour des multiples de la fréquence d'échantillonnage f_e

Problème :

A-t-on nécessairement perte d'information lors de l'échantillonnage ? Sinon, comment échantillonner sans perte ?

1. réponse de normand : oui et non
 - Oui si on considère les signaux continus généraux
 - Non si on considère les signaux à " support fréquentiel borné"
2. Qu'est-ce qu'un signal à "support fréquentiel borné" ?
 - Un signal $s(t)$ dont les composantes fréquentielles sont nulles pour $|f| > f_{\max}$, e.g.

Exemple 3.1 Voici deux exemples d'échantillonnage du même signal pour deux fréquences $f_{e1} = \frac{1}{T_{e1}}$ et $f_{e2} = \frac{1}{T_{e2}}$

Dans le premier exemple, la fréquence d'échantillonnage choisie permet de reproduire les variations du signal. Par contre dans le second exemple, il est clair que les échantillons recueillis ne sont pas suffisants pour reconstruire le signal d'origine.

Le théorème de Nyquist-Shannon 1948 montre que la reconstitution correcte d'un signal (éviter le phénomène de repliements "aliasing") nécessite que la fréquence d'échantillonnage f_e soit au moins deux fois plus grande que la plus grande des fréquences f_{\max} (i.e. λ_c) du spectre du signal :

$$f_e > 2f_{\max} \iff T_e \leq \frac{1}{2}T_{\max}$$

lorsqu'il y a recouvrement spectrale, nous avons vu qu'il était impossible de reconstruire correctement le signal. Pourtant dans la plupart des situations, le spectre du signal à échantillonner s'étale sur tout le domaine des fréquences (tout en diminuant du côté des hautes fréquences), mais il n'existe pas une fréquence f_{\max} au-delà de laquelle l'énergie est nulle.

Il y a donc un problème pour choisir la fréquence d'échantillonnage. On se fixe donc en pratique une f_{\max} à partir de laquelle on estime la représentation de notre signal satisfaisante pour les applications que l'on veut en faire. Puis on effectue un filtrage passe-bas (à f_{\max}) avant l'échantillonnage afin de remédier aux repliements de spectre. On appelle ce filtre un filtre anti repliements.

Remarque 3.4 1. $s_n(ka) = 0$ pour tout $k \neq n$

2. $s_n = \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{k}_a \exp(-2\pi i n a))$ donc $\hat{s}_n(\omega) = (\mathbb{k}_a \exp(-2\pi i n a \omega))$ on se donne un signal à bande limitée de fréquence de Nyquist λ_c . On suppose de plus que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ et que la fréquence d'échantillonnage est assez grande. Autrement dit, la période d'échantillonnage est assez petite ; plus précisément : $0 < a \leq \frac{1}{2\lambda_c}$. La valeur $\frac{1}{2\lambda_c}$ est la cadence de Nyquist.

Théorème 3.1 (Théorème de Shannon 1948) Soit f un signal à bande limitée et d'énergie finie :

$$\text{supp } p(\hat{f}) \subset [-\lambda_c, \lambda_c] \text{ et } \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$$

Alors

$$\forall a > 0, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(na)|^2 < +\infty$$

et

$$\forall a \in]0, \frac{1}{2\lambda_c}], f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) \frac{\text{sin}(\cdot - na)}{\frac{\pi}{a}(\cdot - na)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(na) s_n. \quad (3.2)$$

L'égalité (3.2) a lieu au sens de la norme $L^2(\mathbb{R})$. Si de plus

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(na)| < +\infty$$

la série converge uniformément vers f .

Preuve. La démonstration de ce théorème est difficile dans le cas général : elle fait l'objet de la section suivante. La démonstration qui suit est plus simple et ne nécessite pas d'avoir établi la formule de Poisson. En revanche, elle ne concerne que le cas où f est une fonction continue, intégrable sur \mathbb{R} telle que sa transformée de Fourier est nulle en dehors de l'intervalle $[-\lambda_c, \lambda_c]$.

Soit a un réel vérifiant $0 < a \leq \frac{1}{2\lambda_c}$. On appelle g la fonction de période $\frac{1}{a}$ qui coïncide avec \hat{f} sur $] -\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}[$. Les coefficients de Fourier de g vérifient

$$c_n(g) = af(-na).$$

En effet

$$c_n(g) = a \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} g(t) e^{-2\pi i n a t} dt = a \int_{-\frac{1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} \hat{f}(t) e^{-2\pi i n a t} dt \neq \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{-2\pi i n a t} dt$$

car \hat{f} est nulle en dehors de $] -\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}[$ (puisque $0 < a \leq \frac{1}{2\lambda_c}$). D'autre part, comme $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et f est continue, la transformée de Fourier inverse donne

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{2\pi i t x} dt,$$

et donc

$$c_n(g) = a \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t) e^{-2\pi i n a t} dt = af(-na).$$

Soit t un réel et h_t une fonction de période $\frac{1}{a}$ telle que

$$\forall x \in]\frac{-1}{2a}, \frac{1}{2a}[, h_t(x) = e^{2\pi i t x}.$$

Un calcul classique donne :

$$c_n(h_t) = s_0(t - na).$$

Nous aurons ensuite besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1 Si f et g sont deux fonctions périodiques de carré intégrable sur une période, alors le produit fg est périodique, intégrable sur une période, et ses coefficients de Fourier sont donné par

$$c_n(fg) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{n-k}(f) c_k(g).$$

Preuve. Soit $f \in L_p^2(0, a)$ une fonction de période a . on peut donc l'écrire comme sa série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{2\pi i \frac{k}{a} x}.$$

Soit $f \in L_p^2(0, a)$. La fonction fg est donc intégrable et

$$c_n(fg) = \frac{1}{a} \int_0^a f(t) g(t) e^{2\pi i \frac{n}{a} t} dt.$$

Remplaçons f par sa série de Fourier. On peut intervertir l'intégrale et la série car celle-ci est normalement convergente, ce qui donne

$$\begin{aligned} c_n(fg) &= \frac{1}{a} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) \int_0^a e^{2\pi i \frac{k}{a} t} g(t) e^{-2\pi i \frac{n}{a} t} dt. \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) \underbrace{\left[\frac{1}{a} \int_0^a g(t) e^{-2\pi i \frac{n-k}{a} t} dt \right]}_{c_{n-k}} \end{aligned}$$

on obtient

$$c_n(fg) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) c_{n-k}(g).$$

On reconnaît là un résultat classique pour la transformée de Fourier : le coefficient de Fourier du produit de deux fonctions est le produit de convolution (discret) des coefficients de chaque fonction. Ceci termine la démonstration du lemme 3.1.

On peut maintenant en déduire la formule de Shannon (3.2). Appliquons le lemme aux fonctions g et h_t avec $n = 0$

$$c_0(gh_t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(g) c_k(h_t).$$

Nous avons vu que : $c_{-k}(g) = af(ka)$ et $c_k(h_t) = s_0(t - ka)$: D'autre part

$$\begin{aligned} c_n(gh_t) &= a \int_{\frac{-1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} g(x) e^{2\pi i t x} e^{-2\pi i n a x} dt = a \int_{\frac{-1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} \hat{f}(x) e^{2\pi i (t-na)x} dx \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) e^{2\pi i (t-na)x} dx \end{aligned}$$

Grâce à la transformation de Fourier inverse on obtient

$$c_n(gh_t) = af(t - na).$$

En particulier pour $n = 0$

$$c_0(gh_t) = af(t).$$

Finalement

$$af(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} af(ka) s_0(t-ka),$$

c'est-à-dire

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(ka) s_0(t-ka).$$

Théorème 3.2 *La famille $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de l'espace*

$$V_a = \left\{ \nu \in L^2(\mathbb{R}) \mid \text{supp } p(\hat{\nu}) \subset \left[\frac{-1}{2a}, \frac{1}{2a} \right] \right\}.$$

Preuve. On rappelle que si f et g sont dans $L^2(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) \overline{\hat{g}(\lambda)} d\lambda. \quad (3.3)$$

Il est clair que V_a est un sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{R})$.

- Montrons que la famille $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthogonale : on a vu que

$$\hat{s}_n(\omega) = \mathbb{k}_a(\omega) \exp(-2\pi i n a \omega)$$

où est la fonction créneau définie par (3.1). Par conséquent $s_n \in V_a$ et grâce à (3.3)

$$\int_{\mathbb{R}} s_n(\omega) \overline{s_p(\omega)} d\omega = \int_{\mathbb{R}} \hat{s}_n(\omega) \overline{\hat{s}_p(\omega)} d\omega.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} s_n(\omega) \overline{s_p(\omega)} d\omega = a^2 \int_{\frac{-1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} e^{-2\pi i \omega(n-p)a} d\omega.$$

La famille (s_n) est donc orthogonale et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\|s_n\|_{L^2} = 1$.

- Montrons que la famille $(s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ engendre un sous-espace dense de V_a : Soit $g \in V_a$ et $\varepsilon > 0$.

Grace à la formule de Shannon nous savons que

$$\left\| g - \sum_{n=-N}^N g(na) s_n \right\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{|n|>N} g(na) s_n \right\|_2^2 = a \sum_{|n|>N} |g(na)|^2.$$

On peut donc trouver $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\| g - \sum_{n=-N_0}^{N_0} g(na) s_n \right\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon$$

Ceci termine la démonstration.

Corollaire 3.1 *Sous les hypothèses du théorème de Shannon, si $0 < a \leq \frac{1}{2\lambda_c}$, alors*

$$\|f\|_{L^2}^2 = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(na)|^2.$$

Remarque 3.5 *Si f_M , la fréquence maximale du spectre du signal à échantillonner, est supérieure à $f_e/2$, la restitution du signal original sera impossible car il va apparaître un recouvrement spectral lors de l'échantillonnage. On dit qu'on est en sous-échantillonnage.*

Remarque 3.6 1. *Si $f_e = 2\lambda_c$ alors le signal est correctement échantillonné même si l'impression visuelle peut laisser penser le contraire.*

2. *Si $f_e < 2\lambda_c$ alors le signal est sous-échantillonné, le spectre dans la bande de fréquences $\left[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}\right]$ est modifié, on dit qu'il y a repliement du spectre.*

3. *Si $f_e > 2\lambda_c$ le signal sera bien échantillonné, cependant la fréquence d'échantillonnage est plus grande que nécessaire : on parle de sur-échantillonnage.*

3.3 Echantillonnage et calcul numérique du spectre -Aliasing

3.3.1 Lien coefficient de Fourier et transformée de Fourier

Le théorème d'échantillonnage de Shannon permet de faire (une fois de plus) le lien entre série de Fourier (et coefficients de Fourier) et transformation de Fourier.

On considère un signal f dont la transformée de Fourier \hat{f} est suffisamment régulière et à support compact inclus dans $[-\lambda_c, \lambda_c]$. On choisit $T \geq 2\lambda_c$, on pose $a = \frac{1}{T}$ et on périodise \hat{f} . On peut donc écrire que \hat{f} est égale à sa série de Fourier :

$$\forall \omega \in [-\lambda_c, \lambda_c], \hat{f}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n(\hat{f}) \exp(2\pi i n a \omega),$$

où

$$\begin{aligned} c_n(\hat{f}) &= a \int_{-\lambda_c}^{\lambda_c} \hat{f}(\omega) \exp(-2\pi i n a \omega) d\omega \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \exp(-2\pi i n a \omega) d\omega \\ &= a f(-na). \end{aligned}$$

Corollaire 3.2 *Si f est à support compact alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $c_n(\hat{f}) = a\hat{f}(-na)$ et $c_n(f) = a\hat{f}(na)$.*

Il suffit d'appliquer la transformation de Fourier inverse. Le corollaire ci-dessus précise une fois de plus la relation entre les coefficients de Fourier de f et sa transformée de Fourier aux points d'échantillonnage.

3.3.2 Recouvrement du spectre - aliasing

On considère un signal f dont on veut trouver le spectre. On possède un échantillonnage de f . Pour appliquer le théorème de Shannon on doit trouver λ_c à partir de laquelle toutes les fréquences supérieures sont du bruit. Il y a donc une nécessaire étape de filtrage.

Par exemple, pour un signal sonore : la fréquence maximum "perceptible" par l'oreille humaine est de $16000Hz$. On va donc supposer que tous les sons de fréquence supérieure à $20000Hz$ (pour avoir de la marge) sont inaudibles : on pose donc $\lambda_c = 20000Hz = 40000$ impulsions par seconde, ce qui est utilisé approximativement, pour les enregistrements numériques sur disques compacts.

Il faut toutefois se souvenir qu'on ne peut sans contradiction supposer que le signal et son spectre sont tous deux à support borné, étant donné qu'une fonction analytique nulle sur un intervalle de \mathbb{R} est partout nulle. Supposer que le signal f est à bande limitée entraîne que f est une fonction de support non borné. En particulier, f ne peut pas être causal. Inversement, supposer que f est à support borné entraîne que son spectre ne peut être à support borné.

Si on ne prend pas de précautions, le calcul analytique sur les échantillons directement prélevés du signal peut engendrer des problèmes. Le signal physique enregistré sera toujours entaché d'un bruit, c'est-à-dire de petites fluctuations correspondant à des hautes fréquences. Ceci fait que la fréquence d'échantillonnage choisie a toutes les chances d'être trop petite. On se trouvera alors dans la situation de la figure 3.11 et le spectre calculé n'aura aucun rapport avec le spectre cherché : c'est le phénomène de recouvrement du spectre ou aliasing. Pour éviter ce phénomène il est indispensable de filtrer préalablement le signal analogique, c'est-à-dire de le faire passer dans un filtre passe-bas, de façon à éliminer réellement, avant échantillonnage, les hautes fréquences porteuses de bruit.

Dans un calcul de spectre il est indispensable de filtrer le signal avant échantillonnage. Ceci afin d'éviter le phénomène de recouvrement du spectre.

3.3.3 Echantillonnage de signaux sinusoïdaux et de signaux aléatoires

Signaux sinusoïdaux

Soit le signal $s(t) = \cos(2\pi ft + \varphi)$, avec $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, échantillonné avec la période $T = 1/f_e = 1$. Les échantillons sont donnés par la suite $s(n)$ telle que :

$$s(n) = \cos(2\pi fn + \varphi)$$

Si le rapport $f/f_e = f$ est un nombre rationnel, il vient :

$$f = N_1/N_2 \text{ avec } N_1 \text{ et } N_2 \text{ entiers.}$$

Alors :

$$s(n + N_2) = \cos[2\pi f(n + N_2) + \varphi] = s(n)$$

La suite $s(n)$ présente la périodicité N_2 et comprend au plus N_2 nombres différents. D'autre part la fréquence d'échantillonnage étant supérieure au double de la fréquence du signal, on a nécessairement : $N_1/N_2 < \frac{1}{2}$. L'ensemble de N_2 échantillons différents permet de représenter un nombre de

signaux sinusoïdaux égal au plus grand entier inférieur à $N_2/2$. Par exemple si $N_2 = 8$, avec l'ensemble des nombres : $2 \cos \left(2\pi \frac{n}{8} + \varphi \right)$, ($n = 0, 1, \dots, 7$), il est possible de représenter les échantillons des 3 signaux sinusoïdaux :

$$2 \cos \left(2\pi \frac{N_1}{8} + \varphi \right) \text{ avec } N_1 = 1, 2, 3$$

La figure 1.8 représente cet échantillonnage pour $\varphi = 0$, dans ce cas il suffit même de 4 nombres : ± 2 et $\pm\sqrt{2}$.

Si l'on ajoute aux trois signaux sinusoïdaux de la figure 1.8, le signal continu de valeur 1 et le signal à la fréquence $1/2$ d'amplitude 1 qui s'écrit : $\cos(\pi t)$, l'échantillonnage de cette somme donne des valeurs nulles, sauf aux instants multiples de 8, où la valeur 8 est obtenue, comme le montre la figure 1.9.a. Le spectre de cette somme est obtenu directement en appliquant la relation :

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}).$$

Il est formé de raies d'amplitude 1 aux fréquences multiples de $1/8$ (fig.1.9.b).

La possibilité d'engendrer une gamme de signaux sinusoïdaux à partir d'un ensemble limité de nombres, stockés par exemple dans une mémoire, est utilisée dans les synthétiseurs de fréquence numériques.

Signaux aléatoires discrets

Si le signal aléatoire $s(t)$ est échantillonné avec la période supposée unitaire $T = 1$, il en résulte un signal aléatoire discret $s(n)$, qui a par définition la même loi de probabilité de l'amplitude. Les résultats obtenus dans le cas continu se transposent au cas discret, en particulier pour les signaux aléatoires stationnaires du second ordre.

Ainsi la fonction d'auto-corrélation du signal discret $s(n)$ est la suite $r(n)$ telle que :

$$r(n) = E [s(i).s(i - n)]$$

C'est un échantillonnage de la fonction d'auto-corrélation $r_{xx}(\tau)$ du signal aléatoire continu définie par l'expression

$$r_{xx}(\tau) = E [s(t).s(t - \tau)]$$

Sa transformée de Fourier donne la densité spectrale énergétique $\phi_\varepsilon(f)$ du signal discret, qui est liée à la densité spectrale $\phi_{xx}(f)$ du signal continu par une relation analogue à

$$S_\varepsilon = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S \left(f - \frac{n}{T} \right),$$

c'est-à-dire

$$\phi_\varepsilon(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{xx} \left(f - \frac{n}{T} \right)$$

Si la fréquence d'échantillonnage n'a pas une valeur suffisante, ou si le spectre $\phi_{xx}(f)$ s'étend sur un domaine non borné, il y a repliement.

L'hypothèse d'ergodicité pour le signal discret $s(n)$ conduit à la relation :

$$r(n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=-N}^N s(i)s(i-n).$$

Cette relation permet d'appliquer la notion de fonction d'auto-corrélation aux signaux déterministes. Ainsi, pour un signal périodique et de période N_0 , la fonction d'auto-corrélation est la suite $r(n)$ définie par :

$$r(n) = \frac{1}{N_0} \sum_{i=0}^{N_0-1} s(i)s(i-n).$$

C'est une suite périodique et de même période.

Exemple 3.2

$$\begin{aligned} s(n) &= A \sin\left(2\pi \frac{n}{N_0}\right) \\ r(n) &= \frac{1}{N_0} \sum_{i=0}^{N_0-1} A^2 \sin\left(2\pi \frac{i}{N_0}\right) \sin\left(2\pi \frac{i-n}{N_0}\right) \\ &= \frac{A^2}{2} \cos\left(2\pi \frac{n}{N_0}\right). \end{aligned}$$

On retrouve bien la puissance du signal pour $r(0)$ et la périodicité N_0 . Un signal aléatoire discret peut aussi être défini en tant que tel. Par exemple si la suite $r(n)$ s'annule pour $n \neq 0$, le signal $s(n)$ est un bruit blanc discret dont la densité spectrale est constante sur l'intervalle de fréquence $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Ce signal a une réalité physique, c'est une suite de variables aléatoires non corrélées ; pour l'obtenir il suffit de faire appel à un algorithme qui fournit des nombres statistiquement indépendants.

3.3.4 Quantification du signal échantillonné

On se limite ici à la quantification scalaire, c'est-à-dire à la quantification d'un échantillon isolé. On distingue plusieurs types de quantification scalaire, en particulier

- La quantification uniforme,
- La quantification non uniforme, comme la conversion de type logarithmique.

Définition 3.4 (la quantification) *Quantifier une valeur x réelle appartenant à un intervalle $[-x_{\max}, x_{\max}]$, consiste à remplacer cette valeur x par la valeur $Q(x) = x_n$ la plus proche de x choisie dans un ensemble fini (ou dénombrable) de N valeurs réelles notées x_n , (avec n entre 0 et N) :*

Effet de la quantification

Définition 3.5 *Quantifier une valeur x réelle appartenant à un intervalle $[-x_{\max}, x_{\max}]$, consiste à remplacer cette valeur x par la valeur $Q(x) = x_n$ la plus proche de x choisie dans un ensemble fini (ou dénombrable) de N valeurs réelles notées x_n ; (avec n entre 0 et $N - 1$) :*

La valeur quantifié de $x : Q(x)$ est donner par

$$\forall x \in [x_n, x_{n+1}], Q(x) = \begin{cases} x_n, & \text{si } |x - x_n| < |x - x_{n+1}| \\ x_{n+1}, & \text{si } |x - x_n| > |x - x_{n+1}| \\ x_n, \text{ ou } x_{n+1} & \text{si } x = \frac{x_n + x_{n+1}}{2} \text{ selon les systèmes.} \end{cases}$$

Quantification Uniforme :

Si tous les intervalles $[x_n, x_{n+1}]$ ont même longueur, la quantification est dite uniforme et la constante q définie par $q = |x_n - x_{n+1}|$ est appelée pas de quantification.

Le pas de quantification q peut s'exprimer en fonction des valeurs extrêmes $\pm x_{\max}$ par

$$q = \frac{2x_{\max}}{2^N}$$

où N est le nombre de valeurs de quantification.

Caractéristique de quantification

C'est la courbe donnant $Q(x)$ en fonction de x . Dans le cas d'une quantification uniforme, cette courbe a l'allure suivante :

La quantification uniforme est, de ce fait, parfois appelée quantification linéaire.

| Représentation temporelle | Représentation spectrale |
|---|---|
| Fonction porte $f(t) = A \Pi_r(t)$ avec $\Pi_r(t) \begin{cases} 1, \text{ pour } t \in [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \\ 0, \text{ pour } t \notin [-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}] \end{cases}$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \widehat{f}(t) = A \cdot \tau \frac{\sin(\pi\omega\tau)}{\pi\omega\tau}$ |
| Fonction sinus tronquée (limitée à l'intervalle $[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}]$) $f(t) = A \sin(2\pi\omega_0 t) \Pi_r(t)$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{iA\tau}{2} \left[\frac{\sin(\pi\tau(\omega+\omega_0))}{\pi\tau(\omega+\omega_0)} - \frac{\sin(\pi\tau(\omega-\omega_0))}{\pi\tau(\omega-\omega_0)} \right]$ |
| Fonction sinus cardinal : $f(t) = A \sin c(t\tau) = A \frac{\sin(t\tau)}{t\tau}$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A}{\tau} \Pi_r(t)$ |
| Fonction sinusoïdale de variable quadratique $f(t) = A \sin(at^2)$ | $\mathcal{F}(f(t)) = A \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left[\cos\left(\frac{-(\pi\omega)^2}{a}\right) + \frac{\pi}{4} \right]$ |
| Fonction cosinusoidale de variable quadratique $f(t) = A \cos(at^2)$ | $\mathcal{F}(f(t)) = A \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left[\cos\left(\frac{-(\pi\omega)^2}{a}\right) - \frac{\pi}{4} \right]$ |
| Fonction triangle : $f(t) = A \Lambda_{2\tau}(at^2)$ avec $\Lambda_{2\tau}(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{\tau} \text{ pour } t \in [-\tau, 0] \\ 1 - \frac{t}{\tau} \text{ pour } t \in [0, +\tau] \\ 0 \text{ pour } t \notin [-\tau, +\tau] \end{cases}$ | $\mathcal{F}(f(t)) = A \cdot \tau [\sin c(\omega\tau)]^2$ |
| Fonction sinuscardinal quadratique : $f(t) = A [\sin c(\nu t)]^2 = A \left[\frac{\sin c(\pi\nu t)}{\pi\nu t} \right]^2$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A}{\nu} \Lambda_{2\nu}(\omega)$ |
| Fonction exponentielle symétrique : $f(t) = A \exp\{-a t \}$ avec $a > 0$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A}{2a} \exp\{-a \omega \}$ |
| Fonction rapport du second ordre : $f(t) = \frac{A}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$ avec $a > 0$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{2Aa}{a^2 + 4\pi^2 \omega^2}$ |
| Fonction d'Heaviside ou échelon unité : $f(t) = H(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ 1 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{2\pi i \omega} + \frac{1}{2} \delta(\omega)$ |
| Fonction signe : $f(t) = \text{sgn}(t) = \frac{t}{ t }$, avec $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 \text{ pour } t \geq 0 \\ -1 \text{ pour } t < 0 \end{cases}$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{i\pi\omega}$ |
| Dérivée de la fonction signe : $f(t) = \frac{d(\text{sgn}(t))}{dt} = 2\delta(t)$ | $\mathcal{F}(f(t)) = 2$ |
| Fonction exponentielle décroissante : $f(t) = Au(t)e^{-at}$ avec $a > 0$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A}{a + 2\pi i \omega}$ |
| Fonction impulsionnelle exponentielle : $f(t) = Au(t)(e^{-at} - e^{-bt})$ avec $a > 0, b > 0$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A(b-a)}{(a+2\pi i \omega)(b+2\pi i \omega)}$ |
| Fonction sinusoïdale amortie : $f(t) = Au(t) \sin(2\pi\omega_0 t) e^{-at}$ avec $a > 0$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A(2\pi\omega_0)}{(a+2\pi i \omega)^2 + (2\pi\omega_0)^2}$ |
| Fonction cosinusoidale amortie : $f(t) = Au(t) \cos(2\pi\omega_0 t) e^{-at}$ avec $a > 0$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A(a+2\pi\omega_0)}{(a+2\pi i \omega)^2 + (2\pi\omega_0)^2}$ |
| Fonction cosinusoidale causale : $f(t) = Au(t) \cos(2\pi\omega_0 t)$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{A}{4} \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0) + \frac{2\omega}{i\pi(\omega^2 - \omega_0^2)}$ |
| Fonction sinusoïdale causale : $f(t) = Au(t) \sin(2\pi\omega_0 t)$ | $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{iA}{4} \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0) + \frac{2i\omega}{\pi(\omega^2 - \omega_0^2)}$ |
| Fonction gaussienne quelconque : $f(t) = Ae^{-at^2}$ avec $a > 0$ | $\mathcal{F}(f(t)) = A \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{(\pi\omega)^2}{a}}$ |
| Pic de Dirac de poids A : $f(t) = A\delta(t)$ | $\mathcal{F}(f(t)) = A$ |
| Fonction constante : $f(t) = A$ | $\mathcal{F}(f(t)) = A\delta(\omega)$ |

Chapitre 4

Transformée de Fourier discrète (TFD et TFR)

Dans les études en traitement du signal, on est amené à représenter des signaux dont la transformée ne peut pas s'écrire comme une formule dépendant d'un petit nombre de paramètres. Même dans le cas où une écriture formelle existe, on a souvent besoin de représenter la transformée de Fourier d'un signal ou la réponse en fréquence d'un filtre. On utilisera pour cela les outils informatiques. L'utilisation de techniques numériques pour effectuer un calcul de transformée de Fourier suppose que le nombre de données à traiter soit fini et que le nombre de fréquences pour lesquelles on calcule la transformée soit aussi fini. Pour conserver la même quantité d'informations, on calculera autant de données dans le domaine des fréquences qu'il y a d'échantillons du signal dans le domaine temporel. C'est l'objectif de la transformée de Fourier discrète.

4.1 Introduction

Lorsqu'on désire calculer la transformée de Fourier d'une fonction $x(t)$ à l'aide d'un ordinateur, ce dernier n'ayant qu'un nombre fini de mots de taille, on est amené à :

- discrétiser la fonction temporelle,
- tronquer la fonction temporelle,
- discrétiser la fonction fréquentielle.

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

En approchant l'intégrale par une somme d'aires de rectangles de durée T_e et en limitant la durée d'intégration à l'intervalle $[0, (N-1)T_e]$, on obtient

$$X(f) \approx T_e \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-i2\pi fnT_e}$$

Ce qui donne pour les valeurs de fréquences $f_k = kf_e/N$

$$\begin{aligned} X(f) &\approx T_e \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-i2\pi \frac{nk}{N} f_e T_e} \\ &\approx T_e \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \end{aligned}$$

Ce n'est pas une approximation sophistiquée de $X(f)$, mais elle est très utilisée en pratique sous le nom de *TFD* car il existe un algorithme de calcul efficace appelé FFT (Fast Fourier Transform) ou *TFR* (Transformée de Fourier rapide).

La *TFD* est par ailleurs utilisée, lorsque l'on travaille avec des suites numériques sans lien avec un signal physique, pour définir une représentation de la suite sur une base de fonctions fréquentielles.

4.2 Transformée de Fourier Discrète : TFD

4.2.1 Définition de la TFD

On appelle transformée de Fourier discrète d'une suite de N termes $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$, la suite de N termes $X(0), X(1), \dots, X(N-1)$, définis par

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

En pratique, les N termes $x(n)$ peuvent être N échantillons d'un signal analogique échantillonné : $x_n = x(nT_e)$, et les N termes $X(k)$ correspondre à une approximation (à un facteur multiplicatif T_e près) de la transformée de Fourier de ce signal aux N points de fréquence $f_k = kf_e/N$, avec k entre 0 et $N-1$, c'est à dire f entre 0 et f_e .

4.2.2 Inversion de la TFD

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i2\pi \frac{nk}{N}}$$

En effet, calculons :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i2\pi \frac{nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{j=0}^{N-1} x(j) e^{-i2\pi \frac{jk}{N}} \right) e^{i2\pi \frac{nk}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{(n-j)k}{N}} \right) \\ &\text{si } j \neq n \quad \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{(n-j)k}{N}} = \frac{1 - e^{i2\pi(n-j)}}{1 - e^{i2\pi \frac{n-j}{N}}} = 0 \\ &\text{si } j = n \quad \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{(n-j)k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N \end{aligned}$$

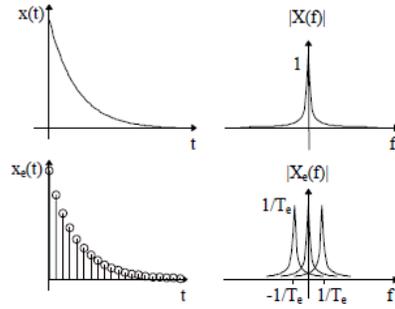


FIG. 4.1 - .

$$A = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \left(\sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{(n-j)k}{N}} \right) = \frac{1}{N} x(n)N$$

$$A = x(n)$$

4.2.3 Lien entre la transformée de Fourier et la TFD

Soit $x(t)$ un signal analogique continu.

1. On échantillonne $x(t)$ à $f_e = 1/T_e$.

$$x(t) \rightarrow x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta(t - nT_e) = x(t)P(t)$$

où $P(t)$ est la « fonction peigne » :

$$P(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \stackrel{TF}{\iff} P(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_e}\right)$$

L'échantillonnage rend le spectre périodique et peut entraîner un phénomène de « recouvrement de spectre » ou aliasing (figure 4.1).

2. On tronque la suite $x(nT_e)$ en ne conservant qu'un nombre fini N de termes pour obtenir le signal $x_{tr}(t)$ formé des échantillons : $x(0) \dots x((N-1)T_e)$:

$$x_{tr}(t) = x_e(t)F(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) \delta(t - nT_e) F(t)$$

$$x_{tr}(t) = x(t)P(t)F(t)$$

où $F(t)$ est une fonction fenêtre de durée NT_e

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{T_e}{2}, T_0 - \frac{T_e}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $T_0 = NT_e$. (figure 4.2)

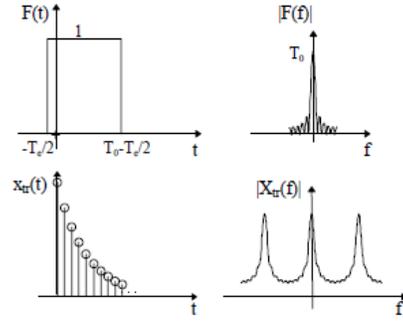


FIG. 4.2 - .

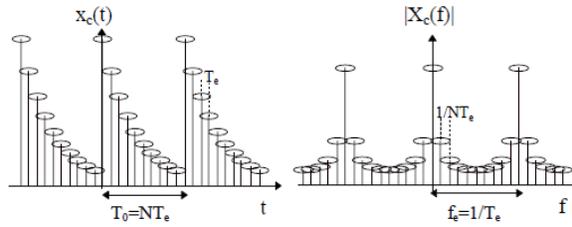


FIG. 4.3 - .

La convolution avec un sinus cardinal introduit des ondulations sur le spectre. Elles sont appelés « ripples » en anglais

$$X_{tr}(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-i2\pi f n T_e}.$$

3. On échantillonne $X_{tr}(f)$ à $1/T_0$. On obtient alors N valeurs différentes espacées de $1/T_0$ entre 0 et $1/T_e$, car $T_0 = NT_e$. Cette dernière opération rend périodique la « fonction » dans le temps. Appelons $x_c(t)$ la fonction résultante.

$$\begin{aligned} X_c(f) &= X_{tr}(f) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{tr}\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \\ X_c(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(kT_e) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \\ x_c(t) &= T_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_{tr}(f) \delta(t - nT_0) \end{aligned}$$

$x_c(t)$ et $X_c(f)$ sont deux distributions échantillonnées reliées par la transformation de Fourier (figure 4.3).

On obtient donc une correspondance entre N points dans le domaine temporel $x_c(nT_e)$ et N points dans le domaine fréquentiel $X_c(n/T_0)$, pour n entre 0 et $N - 1$. De plus :

$$x_c(nT_e) = T_0 X_c(n/T_0) \text{ pour } n \in [0, N - 1]$$

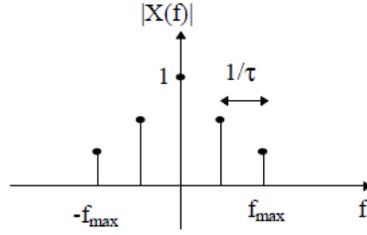


FIG. 4.4 - .

$$X_c\left(\frac{k}{T_0}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

c'est-à-dire que la suite $X_c(k) = X_c(k/T_0)$ est précisément la TFD de la suite $x(n) = x(nT_e)$.

4.2.4 Comparaison entre la transformée de Fourier et TFD

Soit un signal $x(t)$ et sa transformée de Fourier $X(f)$. à la suite $x(nT_e)$ pour $n \in [0, (N-1)]$ correspond la suite TFD $X(k)$ pour $k \in [0, (N-1)]$ avec :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

Quel est le lien entre $X(f)$ et $X(k)$ pour $k \in [0, (N-1)]$?

On pose $T_0 = NT_e$.

Dans le cas où :

- $x(t)$ est périodique de période τ ,
- $x(t)$ est à bande limitée $[-f_{\max}, f_{\max}]$,
- la largeur de la fenêtre $F(t)$ est égale à un multiple de τ , $T_0 = k\tau$,
- et la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ est supérieure à $2 f_{\max}$.

Il y a coïncidence à un facteur multiplicatif près entre $X(k)$ et $X(f = k/T_0)$:

$$X(k) = \frac{T_0}{T_e} X\left(\frac{k}{T_0}\right) = NX\left(\frac{k}{T_0}\right)$$

En effet, $x(t)$ étant périodique de période τ a un spectre formé de raies distantes de $\frac{1}{\tau}$. De plus, ce spectre est limité à f_{\max} . (figure 4.5)

Les trois opérations qui conduisent à la suite $X(k)$ auront les conséquences suivantes :

1. L'échantillonnage de $x(t)$ à f_e rend périodique le spectre et le multiplie par $1/T_e$. (figure 4.6)
2. La troncation de $x_e(t)$ par une fenêtre de largeur T_0 a pour effet de convoluer le spectre avec un sinus cardinal qui s'annule tous les $1/T_0$ avec $T_0 = k\tau$. (figure 4.7)

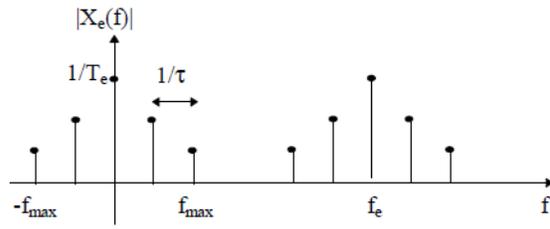


FIG. 4.5 - .

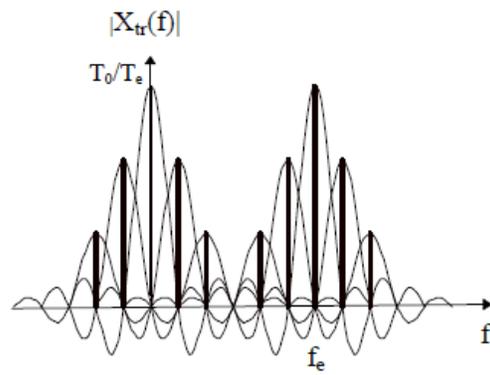


FIG. 4.6 - .

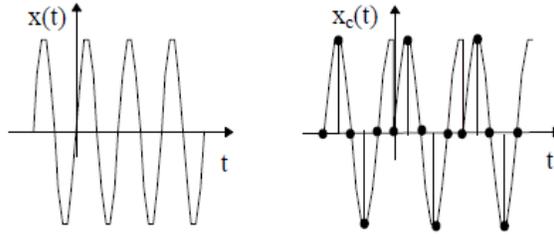


FIG. 4.7 – .

3. L'échantillonnage du spectre à la fréquence $1/T_0$ a pour effet de ne conserver que des valeurs où X_{tr} et X coïncident au facteur $T_0/T_e = N$ près. C'est le seul cas où il y a identité entre la TFD et la TF au facteur N près, aux N points de calcul k/T_0 avec $k \in [0, (N - 1)]$.

Dans tous les autres cas, la TFD diffère de la TF aux points k/T_0 . L'erreur est introduite :

- par recouvrement de spectre si $X(f)$ n'est pas à support limité, erreur que l'on minimise en augmentant f_e .
- par les ondulations dues à la troncature par la fonction fenêtre si $x(t)$ n'est pas périodique ou à durée limitée : erreur que l'on peut chercher à atténuer en choisissant une fenêtre autre que la fenêtre rectangulaire (fenêtre de Hanning par exemple) et en augmentant autant que possible la largeur de la fenêtre.
- pour les deux premières raisons à la fois si $x(t)$ n'est ni à durée limitée ni à bande limitée
- même si $x(t)$ est périodique et à bande limitée, on introduit une erreur si la fenêtre de troncature n'a pas une durée égale à un multiple de la période car la troncature introduit alors de fortes discontinuités (voir la figure suivante). (figure 4.8)

4.2.5 Fenêtres de pondération

De nombreuses fenêtres de pondération ont été proposées pour l'analyse spectrale. Ces fenêtres sont utilisées pour limiter (tronquer) la durée temporelle du signal $x(t)$ à analyser. En notant $x(t)$ le signal, $F(t)$ la fenêtre, et $x_{tr}(t)$ le signal tronqué, on obtient la relation suivante :

$$x_{tr}(t) = x(t)F(t)$$

et dans le domaine fréquentiel :

$$X_{tr}(f) = X(f) * F(f)$$

Pour une même durée temporelle NT_e , on compare les différentes fenêtres essentiellement par leurs propriétés fréquentielles. Idéalement, on aimerait que la troncature du signal en temps ne modifie pas son contenu fréquentiel, c'est-à-dire que $X(f) = X_{tr}(f)$, ce qui suppose que $F(f) = \delta(f = 0)$. En pratique, ce n'est pas possible et les fenêtres $F(f)$ présentent un lobe principal de largeur non nulle centré autour de la fréquence nulle et en général des lobes secondaires de hauteur non nulle. On peut caractériser une fenêtre par des paramètres tels que :

- La largeur du lobe principal, mesurée à 3 dB d'atténuation par rapport à l'amplitude en $f = 0$, ou bien à mi-hauteur.
- La hauteur maximale des lobes secondaires (quand ils existent).

Ces paramètres influencent respectivement la résolution et la dynamique de l'analyse spectrale.

La résolution est la capacité à distinguer 2 fréquences proches. La dynamique est la capacité à mesurer des composantes fréquentielles d'amplitudes très différentes sans que la plus forte ne masque la plus faible.

De manière générale, la largeur du lobe principal est inversement proportionnelle à la durée temporelle de la fenêtre.

4.2.6 Fenêtres rectangulaires, triangulaires et paraboliques

- Fenêtre rectangulaire $F_r(t)$

Une fenêtre rectangulaire $F_r(t)$ centrée de durée NT_e s'écrit en temps et en fréquence :

$$\begin{aligned} F_r(t) &= \text{rect}_{NT_e}(t) \\ F_r(f) &= \frac{\sin 2\pi f NT_e/2}{2\pi f NT_e/2} \end{aligned}$$

La transformé de Fourier de la fenêtre rectangulaire, présente des lobes secondaires importants qui ne décroissent qu'en $\frac{1}{f}$. Le lobe secondaire le plus haut n'est qu'à -13 dB en dessous de l'amplitude en $f = 0$.

- Fenêtre triangulaire $F_t(t)$ et fenêtre parabolique $F_p(t)$

La fenêtre triangulaire $F_t(t)$ (appelée aussi fenêtre de Bartlett) et la fenêtre parabolique $F_p(t)$ se déduisent simplement de la fenêtre rectangulaire par élévation au carré ou au cube de $F_r(f)$. Les transformées de Fourier ainsi obtenues décroissent donc en $\frac{1}{f^2}$ et en $\frac{1}{f^3}$. elles sont respectivement égales à :

$$F_t(\omega) = \left(\frac{\sin N\omega \frac{T_e}{4}}{N\omega \frac{T_e}{4}} \right)^2 \quad \text{ou à} \quad F_p(\omega) = \left(\frac{\sin N\omega \frac{T_e}{6}}{N\omega \frac{T_e}{6}} \right)^3$$

De plus, l'amplitude maximum des lobes secondaires est à -26 db en dessous du lobe principal dans le cas de $F_t(\omega)$, et à -39 db dans le cas de $F_p(\omega)$. Par contre, le lobe principal est, dans les 2 cas, plus large que pour la fenêtre rectangulaire.

Déterminons les expressions temporelles de $F_t(\omega)$ et de $F_p(\omega)$:

$$F_t(\omega) = F_r(\omega) \times F_r(\omega)$$

donc

$$F_t(t) = F_r(t) * F_r(t) = 1 - \left(\frac{2|t|}{NT_e} \right)$$

et

$$F_p(\omega) = F_t(\omega) \times F_r(\omega)$$

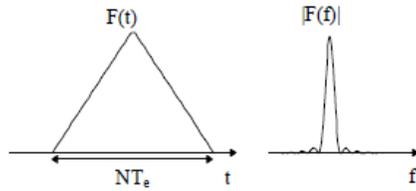


FIG. 4.8 - .

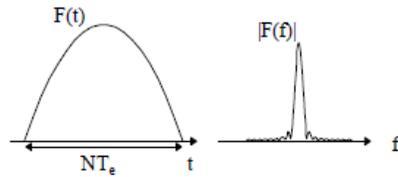


FIG. 4.9 - .

donc

$$Fp(t) = F_t(t) * F_r(t) = 1 - \left(\frac{t}{NT_e} \right)^2$$

La figure suivante représente la fenêtre triangulaire. (figure 4.9)

La figure suivante représente la fenêtre parabolique. (figure 4.10)

4.2.7 Fenêtres détruisant par addition algébrique, les lobes secondaires de la fenêtre rectangulaire

D'autres fenêtres intéressantes s'obtiennent en détruisant les lobes secondaires de la fenêtre rectangulaire, par addition algébrique. On peut citer dans cette catégorie la fenêtre cosinusoidale, les fenêtres de Hanning, de Hamming, de Blackman.

- Fenêtre cosinusoidale $F_c(t)$

L'expression algébrique de la fenêtre cosinusoidale est :

$$F_c(t) = \frac{1}{2} \left(F_R \left(f - \frac{1}{2NT_e} \right) + F_R \left(f + \frac{1}{2NT_e} \right) \right)$$

$$F_c(t) = F_r(t) \cos \left(\pi \frac{1}{NT_e} \right)$$

Les lobes secondaires de $F_c(f)$ sont plus faibles que ceux de $F_r(f)$; ainsi l'amplitude maximum de ces lobes est 34 db en dessous de l'amplitude en $f = 0$ et leur décroissance est en $1/f^2$. Par contre, le lobe principal est plus large.

- Fenêtre de Hanning F_H

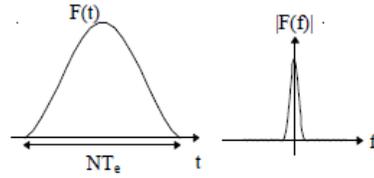


FIG. 4.10 - .

Nous avons vu précédemment comment, par une combinaison algébrique de deux fonctions déduites de $F_r(f)$ par des décalages en fréquence, on pouvait diminuer l'amplitude des lobes secondaires mais en augmentant la bande de transition. On peut encore diminuer l'amplitude des lobes secondaires en augmentant le nombre de fonctions combinées algébriquement. C'est le cas pour la fenêtre de Hanning (voir la figure suivante). (figure 4.11)

L'expression algébrique de la fenêtre de Hanning est (en notant $T_0 = NT_e$) :

$$F_H(f) = \frac{1}{2}F_R(f) + \frac{1}{4}F_R\left(f - \frac{1}{T_0}\right) + \frac{1}{4}F_R\left(f + \frac{1}{T_0}\right)$$

$$F_H(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right)\right) & \text{pour } t \in [-T_0/2, T_0/2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

L'amplitude maximum des lobes secondaires est alors égale à -44 db (en dessous du lobe principal) ; ils décroissent en $\frac{1}{f^3}$. Le lobe principal est presque 2 fois plus large que pour la fenêtre rectangulaire.

- Fenêtre de Hamming F_{hm}

On peut améliorer les résultats obtenus par la fenêtre précédente en modifiant les pondérations de $F_r(f)$, $F_r(f - 1/NT_e)$ et $F_r(f + 1/NT_e)$:

$$F_{hm}(f) = 0.56F_r(f) + 0.22[F_r(f - 1/NT_e) + F_r(f + 1/NT_e)]$$

Dans ce cas, la décroissance des lobes secondaires est toujours en $1/f^3$ mais l'amplitude maximum de ces lobes est à -60 db sous le lobe principal.

L'expression temporelle $F_{hm}(t)$ de la fenêtre de Hamming s'écrit :

$$F_{hm}(f) = \begin{cases} 0.56 + 0.44 \times \cos(2\pi t/NT_e) & \text{si } -\frac{NT_e}{2} < t < \frac{NT_e}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- Fenêtre de Blackman $F_B(t)$

Pour diminuer encore l'amplitude des lobes secondaires, on peut combiner :

$$F_r(f), F_r(f - 1/NT_e), F_r(f - 2/NT_e), F_r(f + 2/NT_e), F_r(f + 1/NT_e)$$

selon la loi suivante :

$$F_B(f) = 0.42F_r(f) + 0.25[F_r(f - 1/NT_e) + F_r(f + 1/NT_e)] \\ + 0.08[F_r(f - 2/NT_e) + F_r(f + 2/NT_e)]$$

La décroissance des lobes secondaires est en $\frac{1}{f^5}$; l'amplitude maximum des lobes secondaires est -87 db en dessous du lobe principal ; Le lobe principal est 2 fois plus large que pour la fenêtre rectangulaire. L'expression temporelle de la fenêtre est :

$$F_B(f) = \begin{cases} 0.42 + 0.5 \cos(2\pi t/NT_e) + 0.08 \cos(4\pi t/NT_e) & \text{si } -\frac{NT_e}{2} < t < \frac{NT_e}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Autres fenêtres : Gauss, Kaiser, Dolph-Chebyshev

- Fenêtre de Gauss $F_g(t)$

Pour supprimer totalement les lobes de la transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire, on peut utiliser une fenêtre telle que sa transformée de Fourier $F_g(t)$ soit une exponentielle

$$F_g(\omega) = \exp \left[-\frac{(N\omega T_e/2)^2}{4k} \right]$$

Le paramètre k est lié à la dispersion σ de l'exponentielle en prenant comme variable réduite $u = N\omega T_e/2$. σ est alors égal à $\sqrt{2k}$. On pourra donc régler la dispersion de $F_g(t)$, c'est-à-dire la largeur de la bande de transition en faisant varier k .

Cherchons l'expression temporelle de cette fonction : $F_g(t) = \exp \left[-4k \left(\frac{t}{NT_e} \right)^2 \right]$, à une constante près puisque la transformée de Fourier conserve la loi gaussienne :

$$\exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) \rightarrow \exp \left(-\frac{\omega^2}{2} \right)$$

La fenêtre gaussienne a donc pour expression :

$$F_g(t) = \begin{cases} \exp \left[-4k \left(\frac{t}{NT_e} \right)^2 \right] & \text{si } |t| < \frac{NT_e}{2} \\ 0 & \text{si } |t| > \frac{NT_e}{2} \end{cases}$$

Le paramètre k permet de réaliser un compromis entre l'ondulation en bande atténuée et la largeur de la bande de transition, ce que ne permettaient pas de faire les fenêtres décrites précédemment.

- Fenêtre de Kaiser $F_K(t)$

Cette fenêtre est une des plus efficaces : sa transformée de Fourier $F_K(t)$ a pour expression

$$F_K(t) = \frac{2}{I_0(\pi V_a)} \frac{\sin \left(\pi \sqrt{v^2 - V_a^2} \right)}{\pi \sqrt{v^2 - V_a^2}}$$

où $V = fNT_r$, $V_a = f_a NT_e$, $\sqrt{v^2 - V_a^2}$ peut être complexe et $I_0(x)$ est la fonction de Bessel modifiée de première espèce.

Cette fonction dépend d'un paramètre V_a qui permet de diminuer l'amplitude des lobes secondaires mais qui augmente la largeur du lobe principal. Dans la plupart des applications, une valeur de V_a comprise entre $4/\pi$ et $9/\pi$ conviendra.

$$4/\pi < V_a < 9/\pi$$

L'expression temporelle de la fenêtre de Kaiser, transformée de Fourier inverse de $F_K(f)$ est

$$F_K(f) = \begin{cases} \frac{I_0[\pi V_a \sqrt{1-(2t/NT_e)^2}]}{I_0(\pi V_a)} & \text{si } |t| < NT_e/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Comparaison avec la fenêtre de Hamming :

Pour obtenir une bande de transition égale à celle de la fenêtre de Hamming, il suffit d'imposer que le premier zéro de la fonction $F_K(f)$ corresponde à $V = 2$, c'est-à-dire d'imposer que $V_a = \sqrt{3}$ puisque le premier zéro est solution de l'équation $V^2 - V_a^2 = 1$. Dans ces conditions, la fenêtre de Kaiser a 99,8% de son énergie dans le lobe principal alors que la fenêtre de Hamming n'a que 96,3% de son énergie dans ce lobe ; par conséquent, l'ondulation en bande atténuée sera meilleure dans le cas de la fenêtre de Kaiser.

Comparaison avec la fenêtre de Blackman :

On peut obtenir la même largeur de lobe principal avec la fenêtre de Kaiser, en positionnant le premier zéro à $V = 3$, c'est-à-dire en faisant $V_a = 2\sqrt{2}$. A nouveau, l'ondulation en bande atténuée est inférieure dans le cas de la fenêtre de Kaiser.

- Fenêtre de Dolph-Chebyshev F_D

La fenêtre de Dolph-Chebyshev est celle qui réalise le meilleur compromis largeur du lobe principal, hauteur des lobes secondaires.

L'expression mathématique de cette fenêtre exprimée dans le domaine fréquentiel est :

$$F_D(f) = \frac{\cos [P \cos^{-1} (\lambda \cos \pi f T_e)]}{ch [P \arg ch (\lambda)]}$$

où $P = N - 1$, N impair.

Le paramètre λ permet de régler l'amplitude des ondulations. les fonctions $\cos(x)$ et $\cos^{-1}(x)$ sont des fonctions complexes.

L'amplitude maximum δ des ondulations est liée au paramètre λ par la relation

$$\delta = \frac{1}{ch [P \arg ch (\lambda)]}$$

L'expression temporelle de cette fenêtre n'a pas une forme simple ; la meilleure façon de l'obtenir étant de calculer la transformée de Fourier inverse de $F_D(f)$ en utilisant la transformée de Fourier discrète.

Dans tous les cas, à nombre N de coefficients constant, on devra réaliser un compromis entre l'amplitude des ondulations et la largeur du lobe principal. Il faudra choisir entre une moins grande dispersion ou une meilleure résolution.

4.2.8 Problème de visualisation de la TFD

Quand on lui présente un graphe discret, l'oeil réalise une interpolation entre les points du dessin. Cette interpolation est d'autant plus réussie que les points sont rapprochés.

Pour observer à la fois un « beau » signal $x(n)$ et un « beau » spectre, on ne peut visualiser le même « buffer ».

Pour le graphe temporel, on a intérêt à ce que $T_e \ll T_0$ mais si $T_e \ll T_0$ alors $1/T_e$ sera trop grand par rapport à $1/T_0$ et l'oeil aura du mal à interpoler le graphe fréquentiel. Pour améliorer le graphe fréquentiel on peut rajouter des 0 à la suite $x(n)$, on ne change rien au résultat mais on augmente T_0/T_e .

On appelle cette opération « zero-padding » en anglais.

Exemple 4.1 Soit $x(t)$ dont la fréquence de Shannon ($2f_{max}$) est $128Hz = f_{SH}$

1. Pour visualiser en « temps », on échantillonne une durée T à $1024Hz = 8f_{SH}$
2. Pour visualiser le spectre, on échantillonne à $128Hz$ une durée égale à $8T$ en rajoutant des 0 à la suite $x(n)$.

On aura alors le même nombre de points sur une période de signal et de spectre et les deux graphes seront bien visualisés.

4.2.9 Propriétés de la TFD et convolution circulaire

Elles sont analogues à celles de la Transformée de Fourier, mais il faut prendre en compte une notion de périodicité des séquences.

Théorème de Parseval

Le théorème de Parseval, sous sa forme discrète, s'écrit :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_e)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_e)|^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2i\pi \frac{nk}{N}} \sum_{l=0}^{N-1} X_l^* e^{2i\pi \frac{-nl}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left[X_k X_l^* \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{n(k-l)}{N}} \right) \right] \end{aligned}$$

or :

$$\begin{cases} \text{Si } k \neq l \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{n(k-l)}{N}} = \frac{1 - e^{2i\pi(k-l)}}{e^{2i\pi \frac{(k-l)}{N}}} = 0 \\ \text{Si } k = l \sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{n(k-l)}{N}} = N \end{cases}$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_e)|^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \left[X_k X_l^* \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{2i\pi \frac{n(k-l)}{N}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \end{aligned}$$

Théorème de la convolution discrète

Avant de présenter les résultats concernant la convolution discrète, on a besoin de définir les notions de convolution circulaire et de convolution linéaire.

Convolution circulaire :

Soit 2 suites périodiques $(x(n))$ et $(y(n))$ de période N . La convolution circulaire de ces 2 suites donne la suite $(z(n))$ de période N définie par :

$$(z(n)) = (x(n)) \otimes (y(n)) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} x(j) y(\|n-j\|) \right) \text{ pour } n \in [0, N-1],$$

où la notation $\|n-j\|$ signifie $(n-j)$ modulo N .

Convolution linéaire :

La convolution linéaire d'une période de $(x(n))$ et d'une période de $(y(n))$ conduit quant-à-elle à une suite $(u(n))$ de longueur $2N-1$ valant :

$$(u(n)) = (x(n)) * (y(n)) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} x(j) y(n-j) \right) \text{ pour } n \in [0, 2N-1],$$

Exemple 4.2 Soit les suites $(x(n))$ et $(y(n))$ périodiques de période $N=3$, telles que $x(n) = y(n) = 1$ pour n entre 0 et 2. La suite $(z(n))$, convolution circulaire des suites $(x(n))$ et $(y(n))$ est périodique de période $N=3$, et vaut $z(n) = 3$ pour n entre 0 et 2. La suite $(u(n))$, convolution linéaire des suites $(x(n))$ et $(y(n))$ est de durée $2N-1=5$, et vaut :

$$z(0) = 1, z(1) = 2, z(2) = 3, z(3) = 2, z(4) = 1.$$

La suite $(z(n))$ peut s'obtenir en répétant périodiquement la suite $(u(n))$ avec la période N . (figure 4.12)

Théorème 4.1 (Théorème de la convolution discrète circulaire) La TFD de la suite $(z(n))$ convolution circulaire de 2 suites périodique $(x(n))$ et $(y(n))$ de période N , est le produit des TFD des suites $(x(n))$ et $(y(n))$:

$$z(n) = x(n) \otimes y(n) \Rightarrow TFD(z(n)) = TFD(x(n))TFD(y(n))$$

où le symbole \otimes représente la convolution circulaire.

Réciproquement, la suite $p(n)$ produit des suites $x(n)$ et $y(n)$, a pour TFD une suite $P(k)$ qui est la convolution circulaire des suites $X(k)$ et $Y(k)$:

$$p(n) = x(n)y(n) \Rightarrow P(k) = X(k) \otimes Y(k)$$

avec $P(k) = TFD(p(n))$, $X(k) = TFD(x(n))$, $Y(k) = TFD(y(n))$.

Preuve.[Démonstration de (I.1)]

$$(z(n)) = (x(n)) \otimes (y(n)) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} x(j) y(\|n-j\|) \right) \text{ pour } n \in [0, N-1]$$

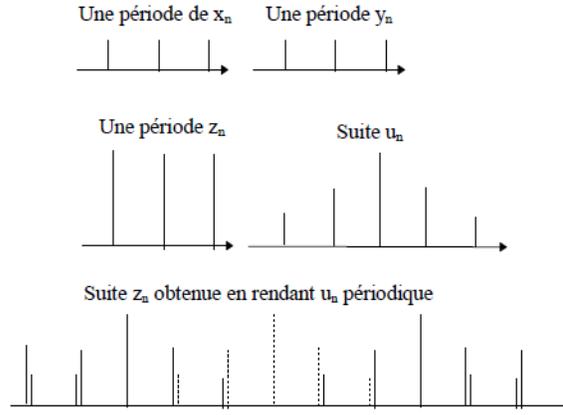


FIG. 4.11 - .

$$\begin{aligned}
 z(n) &= \sum_{j=0}^{N-1} z(j) e^{-i2\pi \frac{nj}{N}} = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(\|j-k\|) \right) e^{-i2\pi \frac{nj}{N}} \\
 &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} y(\|j-k\|) e^{-i2\pi \frac{n(j-k)}{N}} \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} y(\|j-k\|) e^{-i2\pi \frac{n(j-k)}{N}} \right) \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \right) \left(\sum_{j=0}^{N-1} y(j) e^{-i2\pi \frac{nj}{N}} \right) \\
 &= X(n) Y(n)
 \end{aligned}$$

Relation entre convolution discrète linéaire et convolution continue.

Soit $x(t)$ et $y(t)$ de durées finies. La convolution de $x(t)$ avec $y(t)$ s'écrit $u(t)$:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

Échantillonons $x(t)$ et $y(t)$ à $f_e = 1/T_e$. On obtient alors P échantillons pour x et Q échantillons pour y .

On peut approcher l'intégrale $u(t)$ par la méthode de l'intégration rectangulaire (de pas T_e). La suite v_n ainsi obtenue (au terme multiplicatif T_e près) correspond à une convolution discrète linéaire (et non circulaire) des suites $x(n)$ et $y(n)$.

$$v(n) = \sum_{k=0}^{P+Q-1} x(k) y(n-k)$$

Théorème du retard circulaire

Soit la suite $x(n)$ périodique, de période N .

Soit la suite y_n obtenue en retardant $x(n)$ de k_0 échantillons. La suite $y(n)$ est périodique de période N et sa TFD $Y(k)$ se déduit de celle de $x(n)$ par :

$$Y(k) = X(k) e^{-i2\pi k k_0 / N}$$

où $Y(k)$ et $X(k)$ sont les TFD de $x(n)$ et $y(n)$.

4.3 Transformée de Fourier Rapide TFR (Fast Fourier transform FFT)

La Transformée de Fourier Rapide (notée par la suite FFT) est simplement une TFD calculée selon un algorithme permettant de réduire le nombre d'opérations et, en particulier, le nombre de multiplications à effectuer. Il faut noter cependant, que la réduction du nombre d'opérations arithmétiques à effectuer, n'est pas synonyme de réduction du temps d'exécution. Tout dépend de l'architecture du processeur qui exécute le traitement.

Pour calculer une TFD, on doit calculer N valeurs $X(k)$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

et ceci pour $k \in [0, N - 1]$.

Si on effectue le calcul directement sans algorithme efficace, on doit effectuer :

$$\begin{cases} N^2 \text{ multiplications complexes} \\ N(N-1) \text{ additions complexes} \end{cases}$$

Il existe différents algorithmes de FFT. Le plus connu est sûrement celui de Cooley-Tukey (appelé aussi à entrelacement temporel ou à « decimation in time ») qui réduit à

$$\frac{N}{2} \log_2(N) \text{ le nombre de multiplications.}$$

Il existe deux versions de l'algorithme :

- FFT avec entrelacement temporel,
- FFT avec entrelacement fréquentiel.

L'algorithme nécessite que N soit une puissance de 2. Le principe de l'algorithme consiste à décomposer le calcul de la TFD d'ordre $N = 2^l$ en l étapes successives.

4.3.1 FFT avec entrelacement temporel

Illustrons tout d'abord la méthode par un exemple pour $N = 4$.

Les données sont notées $x(n)$ et la suite TFD $X(n)$.

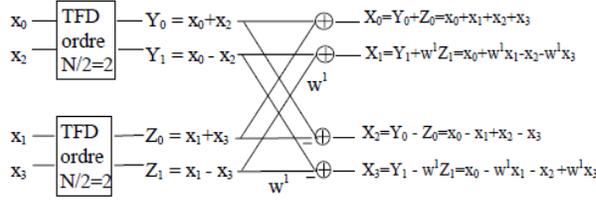


FIG. 4.12 - .

La notation w représente $e^{-i2\pi/N}$, c'est-à-dire $e^{-i2\pi/4}$. On peut remarquer que $w^N = 1$ et $w^{N/2} = -1$.

Pour $N = 4$, $w^4 = 1$ et $w^2 = -1$.

la suite TFD s'écrit :

$$\begin{aligned}
 X(0) &= x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = (x(0) + x(2)) + (x(1) + x(3)) \\
 X(1) &= x(0) + w^1 x(1) + w^2 x(2) + w^3 x(3) = (x(0) - x(2)) + w^1 (x(1) - x(3)) \\
 X(2) &= x(0) + w^2 x(1) + w^4 x(2) + w^6 x(3) = (x(0) + x(2)) - (x(1) + x(3)) \\
 X(3) &= x(0) + w^3 x(1) + w^6 x(2) + w^9 x(3) = (x(0) - x(2)) - w^1 (x(1) - x(3))
 \end{aligned}$$

Les données $(x(0), x(1), \dots, x(N-1))$ sont regroupées en 2 paquets : un paquet formé des données d'indices pairs $(x(0), x(2), \dots, x(N-2))$ et un paquet formé des données d'indices impairs $(x(1), x(3), \dots, x(N-1))$.

Soit pour $N = 4$, un paquet $(x(0), x(2))$ et un paquet $(x(1), x(3))$.

Puis sur chaque paquet on effectue une DFT d'ordre $N/2$ et on combine les résultats de ces 2 DFT pour obtenir celle d'ordre N . Ce qui donne, toujours pour $N = 4$: (figure 4.13)

Pour obtenir les 4 valeurs $X(k)$, il suffit donc de calculer 2 DFT d'ordre $N/2 = 2$ et de combiner les résultats 2 à 2 à l'aide d'une addition et d'une multiplication au maximum, pour chaque valeur $X(k)$. Cette étape est appelée étage de « papillons », pour des raisons évidentes liées à la forme du schéma de calcul. Ce résultat se généralise à toute valeur de N multiple de 2. En effet :

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \\
 &= \sum_{j=0}^{N/2-1} x(2j) e^{-i2\pi \frac{2jk}{N}} + \sum_{j=0}^{N/2-1} x(2j+1) e^{-i2\pi \frac{2(j+1)k}{N}} \\
 &= \sum_{j=0}^{N/2-1} x(2j) e^{-i2\pi \frac{jk}{N/2}} + e^{-i2\pi \frac{k}{N}} \sum_{j=0}^{N/2-1} x(2j+1) e^{-i2\pi \frac{jk}{N/2}} \\
 &= \sum_{j=0}^{N/2-1} y(j) e^{-i2\pi \frac{jk}{N/2}} + w^k \sum_{j=0}^{N/2-1} z(j) e^{-i2\pi \frac{jk}{N/2}}
 \end{aligned}$$

On note $y(j) = x(2j)$ et $z(j) = x(2j+1)$, pour $j \in [0, (N/2-1)]$. On remarque que les 2 termes de

la somme donnant $X(k)$ se déduisent directement des 2 TFD d'ordre $N/2$ des suites $y(j)$ et $z(j)$ de $N/2$ points. On note ces TFD $Y(k)$ et $Z(k)$.

Ainsi pour $k \leq N/2 - 1$, les 2 termes de la somme se déduisent des termes de rang k de $Y(k)$ et $Z(k)$:

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N/2-1} y(j) e^{-i2\pi \frac{jk}{N/2}} + w^k \sum_{j=0}^{N/2-1} z(j) e^{-i2\pi \frac{jk}{N/2}} = Y(k) + w^k Z(k)$$

Pour $k \in [N/2, (N-1)]$, on peut écrire $k = k + N/2$, avec $k \in [0, (N/2 - 1)]$. De plus, comme quelque soit j entier $e^{-i2\pi j} = 1$, on peut déduire $X(k)$ des termes de rang $k - N/2$ des 2 TFD $Y(k)$ et $Z(k)$:

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{j=0}^{N/2-1} y(j) e^{-i2\pi \frac{jk}{N/2}} + w^k \sum_{j=0}^{N/2-1} z(j) e^{-i2\pi \frac{jk}{N/2}} \\ &= \sum_{j=0}^{N/2-1} y(j) e^{-i2\pi \frac{j(k+N/2)}{N/2}} + w^k \sum_{j=0}^{N/2-1} z(j) e^{-i2\pi \frac{j(k+N/2)}{N/2}} \\ &= Y(k - N/2) + w^k Z(k - N/2) \end{aligned}$$

En conclusion, pour tout N multiple de 2, on peut calculer chaque terme $X(k)$ de la TFD d'ordre N en combinant, à l'aide d'au plus 1 multiplication et 1 addition, 2 termes des TFD d'ordre $N/2$ des 2 suites $y(j)$ et $z(j)$ de longueur $N/2$, formées respectivement des termes d'indices pairs et des termes d'indices impairs de la suite $x(n)$. En notant $Y(k)$ et $Z(k)$ les TFD d'ordre $N/2$ de ces suites on peut écrire :

$$\begin{aligned} \text{Pour } k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right] & X(k) = Y(k) + w^k Z(k) \\ \text{Pour } k \in \left[\frac{N}{2}, N - 1\right] & X(k) = Y(k - N/2) + w^k Z(k - N/2) \end{aligned}$$

On appelle « papillon », l'étape de calcul consistant à calculer 2 points de la TFD d'indices distants de $N/2$, par exemple $X(k)$ et $X(k + N/2)$ avec $k \in [0, N/2 - 1]$. Le calcul de ce couple de valeurs de la TFD d'ordre N utilise le couple de valeurs $Y(k)$ et $Z(k)$ des TFD d'ordre $N/2$:

$$\text{Pour } k \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right] \begin{cases} X(k) = Y(k) + w^k Z(k) \\ X(k + N/2) = Y(k) + w^{k+N/2} Z(k) = Y(k) - w^k Z(k) \end{cases}$$

Chaque papillon nécessite 1 multiplication et 2 additions ou soustractions.

Ainsi tout TFD d'ordre N multiple de 2, peut se calculer à l'aide de 2 TFD d'ordre $N/2$ et d'un étage de $N/2$ papillons.

La complexité de calcul, pour la TFD d'ordre N est donc égale à celle de 2 TFD d'ordre $N/2$ plus celle de $N/2$ papillons. Si on suppose que les TFD d'ordre $N/2$ sont calculées directement (sans algorithme efficace), on peut dire que :

Le calcul d'une TFD d'ordre N pair, avec cet algorithme, demande :

$$\text{Le calcul de 2TFD d'ordre } N/2 : \begin{cases} 2 \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2} \text{ multiplications complexes} \\ 2 \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} - 1\right) = N \left(\frac{N}{2} - 1\right) \text{ additions complexes} \end{cases}$$

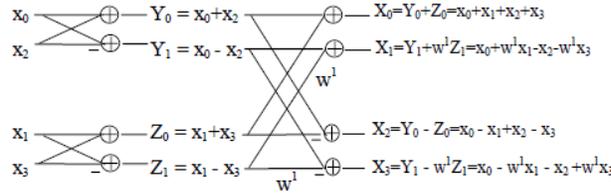


FIG. 4.13 - .

Le calcul de $N/2$ papillons : $\begin{cases} \frac{N}{2} \text{ multiplications complexes} \\ N \text{ additions/soustractions} \end{cases}$

Soit un total de

$$\begin{cases} \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} \text{ multiplications complexes} \\ \frac{N^2}{2} \text{ additions complexes} \end{cases}$$

au lieu de :

$$\begin{cases} N^2 \text{ multiplications complexes} \\ N(N-1) \text{ additions complexes} \end{cases}$$

pour le calcul direct.

Ainsi pour $N = 4$, on a besoin de 10 multiplications et de 8 additions/soustractions complexes au lieu de 16 multiplications et de 12 additions/soustractions complexes.

Si $N/2$ est un multiple de 2, on peut réitérer la méthode pour le calcul des 2 TFD d'ordre $N/2$. Chaque TFD d'ordre $N/2$ est alors calculée à l'aide de 2 TFD d'ordre $N/4$ et de $N/4$ papillons, ce qui donne au total 4 TFD d'ordre $N/4$ plus 2 étages de $N/2$ papillons.

D'une manière plus générale si N est une puissance de 2, $N = 2^l$, on peut réitérer la méthode l fois et calculer la TFD d'ordre N à l'aide de l étages de $N/2$ papillons, avec $l = \log_2(N)$. La complexité de calcul d'une TFD d'ordre N devient alors celle de l étages de $N/2$ papillons, soit :

$$\begin{cases} l \frac{N}{2} = \log(N) \frac{N}{2} \text{ multiplications complexes} \\ lN = \log(N) N \text{ additions complexes} \end{cases}$$

Cet algorithme est l'algorithme de FFT avec entrelacement temporel (base 2) de Cooley-Tukey.

Ainsi pour $N = 1024 = 2^{10}$, le calcul direct demande : 1024×1024 multiplications et 1024×1023 additions, alors que le calcul avec l'algorithme de FFT demande : 10×512 multiplications et 10×1024 additions. Dans ce cas, l'algorithme divise environ par 200 le nombre d'opérations à effectuer. L'efficacité de la FFT augmente avec N .

Pour $N = 4$, le schéma complet de l'algorithme est le suivant : (figure 4.14)

On remarque sur ce schéma que les données $x(n)$ en entrée sont désordonnées, alors que celles de sortie $X(k)$ sont dans l'ordre naturel. De ce fait cet algorithme de FFT s'appelle FFT avec entrelacement temporel. On verra par la suite qu'il existe un algorithme symétrique appelé FFT avec entrelacement fréquentiel.

Pour l'algorithme de FFT en base 2 avec entrelacement temporel, un papillon élémentaire, à l'étage j (en numérotant de 1 à $l = \log_2(N)$), a la forme suivante : (figure 4.15)

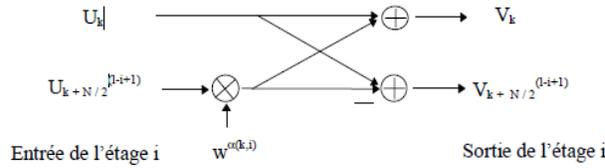


FIG. 4.14 - .

A l'étape j , les indices des termes associés dans un papillon sont séparés de N_j , N_j étant la taille des DFT intervenant à l'étape j , c'est à dire $N_j = 2^{j-1} = 2^l/2^{(l-j+1)} = N/2^{(l-j+1)}$.

Le terme $w^{\alpha(j,k)}$ vaut :

$$w^{\alpha(j,k)} = e^{-i2\pi \frac{k}{2N_j}} = e^{-i2\pi \frac{k}{N} \frac{N}{2^j}} = w^{k2^{l-j}}$$

4.3.2 FFT avec entrelacement fréquentiel

Cet algorithme est symétrique du précédent. Les données temporelles $x(n)$ restent dans l'ordre naturel, mais les résultats $X(k)$ sont désordonnés.

Le principe consiste encore à décomposer le calcul de la TFD d'ordre $N = 2^l$ en l étapes successives. Mais le regroupement de données se fait différemment.

Illustrons la méthode par un exemple pour $N = 4$.

Les données fréquentielles ($X(0), X(1), \dots, X(N-1)$) sont regroupées en 2 paquets : un paquet formé des données d'indices pairs ($X(0), X(2), \dots, X(N-2)$) et un paquet formé des données d'indices impairs ($X(1), X(3), \dots, X(N-1)$). Soit pour $N = 4$, un paquet ($X(0), X(2)$) et un paquet ($X(1), X(3)$).

Pour $N = 4$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = (x(0) + x(2)) + (x(1) + x(3)) \\ X(2) &= x(0) + w^2x(1) + w^4x(2) + w^6x(3) = (x(0) + x(2)) - (x(1) + x(3)) \\ X(1) &= x(0) + w^1x(1) + w^2x(2) + w^3x(3) = (x(0) - x(2)) + [w^1(x(1) - x(3))] \\ X(3) &= x(0) + w^3x(1) + w^6x(2) + w^9x(3) = (x(0) - x(2)) - [w^1(x(1) - x(3))] \end{aligned}$$

Pour obtenir chaque paquet de résultats fréquentiels, on effectue une DFT d'ordre $N/2$ sur des données résultant d'une étape de papillons sur les données $x(n)$. (figure 4.16)

On a donc un étage de 2 papillons suivi d'un étage de 2 DFT d'ordre $N/2 = 2$.

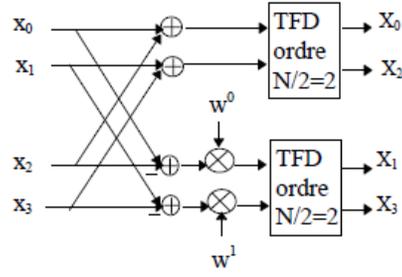


FIG. 4.15 - .

Ce résultat se généralise à toute valeur de N multiple de 2. En effet :

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \\
 X(2j) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{2jn}{N}} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{2jn}{N}} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{jn}{N/2}} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x(m+N/2) e^{-i2\pi \frac{jm}{N/2}} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} (x(n) + x(n+N/2)) e^{-i2\pi \frac{jn}{N/2}}
 \end{aligned}$$

Ainsi les $N/2$ termes $X(k)$ de rang pair sont égaux aux termes de la TFD d'ordre $N/2$ de la suite de $N/2$ valeurs $(x(n) + x(n+N/2))$, avec n entre 0 et $N/2 - 1$.

De même pour les termes $X(k)$ de rang impair :

$$\begin{aligned}
 X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} \\
 X(2j+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{n(2j+1)}{N}} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{n(2j+1)}{N}} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) e^{-i2\pi \frac{n}{N}} e^{-i2\pi \frac{nj}{N/2}} - \sum_{m=0}^{N/2-1} x(m+N/2) e^{-i2\pi \frac{m}{N}} e^{-i2\pi \frac{mj}{N/2}} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} w^n (x(n) - x(n+N/2)) e^{-i2\pi \frac{jn}{N/2}}
 \end{aligned}$$

les $N/2$ termes $X(k)$ de rang impair sont égaux aux termes de la TFD d'ordre $N/2$ de la suite de $N/2$ valeurs $w^n(x(n) - x(n+N/2))$, avec n entre 0 et $N/2 - 1$.

D'une manière générale si N est une puissance de 2 : $N = 2^l$, on peut répéter la méthode l fois et calculer la TFD d'ordre N à l'aide de l étages de $N/2$ papillons, avec $l = \log_2(N)$. La complexité de calcul d'une FFT avec entrelacement fréquentiel est identique à celle de la FFT avec entrelacement temporel.

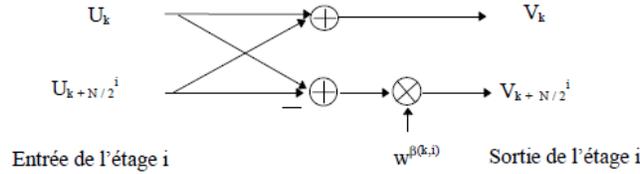


FIG. 4.16 - .

Pour l'algorithme de FFT en base 2 avec entrelacement fréquentiel, un papillon élémentaire, à l'étage j (en numérotant de 1 à $l = \log_2(N)$), a la forme suivante : (figure 4.17)

À l'étage j , Les indices des termes associés dans un papillon sont séparés de N_j , N_j étant la taille des DFT intervenant à l'étage j , c'est à dire $N_j = N/2^j$. Et le terme $w^{\beta(j,k)}$ vaut :

$$w^{\beta(j,k)} = e^{-i2\pi \frac{k}{2N_j}} = e^{-i2\pi \frac{k2^j}{2N}} = w^{k2^{j-1}}$$

4.3.3 Bit reversal

On remarque que dans les 2 cas précédents : FFT avec entrelacement temporel et FFT avec entrelacement fréquentiel, l'ordre entrelacé est obtenu à partir de l'ordre naturel en appliquant une technique dite du « bit reversal ».

Cette technique consiste à écrire en binaire l'indice dans l'ordre naturel puis à retourner l'ordre des bits pour obtenir la représentation binaire de l'indice correspondant dans l'ordre entrelacé.

Par exemple pour $N = 4$:

| indices ordre naturel | représentation binaire | représentation retournée | indices ordre entrelacé |
|--------------------------|---------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| 0 | 00 | 00 | 0 |
| 1 | 01 | 10 | 2 |
| 2 | 10 | 01 | 1 |
| 3 | 11 | 11 | 3 |

4.3.4 Formulation matricielle de l'algorithme de Cooley-Tukey

On utilise les mêmes notations que précédemment :

$$N = 2^l$$

$w = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$. On utilise le fait que $w^N = 1$ et que $w^{N/2} = -1$

On illustre l'algorithme pour le cas $N = 8, l = 3$. Et on présente l'algorithme avec entrelacement fréquentiel.

- On calcule la TFD de la suite $x(n)$ avec $n \in [0, 7]$
- On note la suite transformée $X(n)$ avec $n \in [0, 7]$

$$X(n) = \sum_{k=0}^7 x(k) e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} = \sum_{k=0}^7 x(k) w^{nk}$$

On décompose les indices n et k (qui sont compris entre 0 et 7) en base 2 :

$$\begin{aligned} n &= n_2 2^2 + n_1 2^1 + n_0 2^0 \\ k &= k_2 2^2 + k_1 2^1 + k_0 2^0 \end{aligned}$$

On effectue le produit nk en développant selon k , (Il suffirait de développer selon n pour obtenir l'algorithme avec entrelacement temporel) :

$$\begin{aligned} w^{nk} &= w^{nk_2 2^2} w^{nk_1 2^1} w^{nk_0} \\ &= w^{(n_2 2^2 + n_1 2^1 + n_0) k_2 2^2} w^{(n_2 2^2 + n_1 2^1 + n_0) k_1 2^1} w^{(n_2 2^2 + n_1 2^1 + n_0) k_0} \\ w^8 &= 1 \implies \\ w^{nk} &= w^{n_0 k_2 2^2} w^{(n_1 2^1 + n_0) k_1 2^1} w^{(n_2 2^2 + n_1 2^1 + n_0) k_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(n) &= \sum_{k=0}^7 x(k) w^{nk} \\ X(n) &= \sum_{k_0=0}^1 \left[\sum_{k_1=0}^1 \left(\sum_{k_2=0}^1 x(k_2, k_1, k_0) w^{n_0 k_2 2^2} \right) w^{(2n_1 + n_0) k_1 2^1} \right] w^{(4n_2 + 2n_1 + n_0) k_0} \end{aligned}$$

On a ainsi décomposé la sommation unique sur k en $3 = \log_2(8)$ sommations sur k_0, k_1, k_2 .

Si on effectue la sommation sur k_2 , on obtient un terme :

$$\begin{aligned} x_1(n_0, k_1, k_0) &= \sum_{k_2=0}^1 x(k_2, k_1, k_0) w^{n_0 k_2 2^2} \\ x_1(n_0, k_1, k_0) &= x(0, k_1, k_0) + x(1, k_1, k_0) w^{4n_0} \end{aligned}$$

Si l'on considère l'ensemble des valeurs x_1 que l'on peut obtenir en donnant aux indices n_0, k_1, k_0 toutes les valeurs possibles, on obtient 8 valeurs $x_1(n)$ avec $n \in [0, 7]$ qui vérifient les relations :

$$\begin{aligned} x_1(j) &= x(j) + w^0 x(j+4) \text{ pour } j \leq 3 \\ x_1(j+4) &= x(j) - w^0 x(j+4) \\ \text{avec } j &= n_0 2^2 + k_1 2 + k_0 \end{aligned}$$

On peut regrouper les valeurs de x_1 2 par 2 pour former des paires duales que l'on calcule à partir de 2 noeuds de même indice de l'étape précédente. Les indices de 2 noeuds duaux étant espacés de $4 = N/2^l$. L'ensemble des relations précédentes peut s'écrire sous la forme

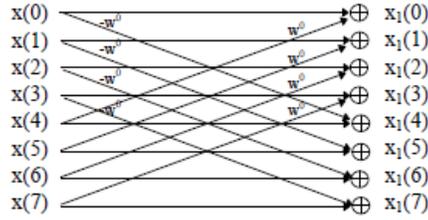


FIG. 4.17 - .

matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \\ x_1(4) \\ x_1(5) \\ x_1(6) \\ x_1(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}$$

Ces relations peuvent aussi se représenter sous la forme graphique de « papillons » : (figure 4.18)

La deuxième étape est la sommation sur k_1 :

$$\begin{aligned} x_2(n_0, n_1, k_0) &= \sum_{k_1=0}^1 x_1(n_0, n_1, k_0) w^{(2n_1+n_0)2k_1} \\ x_2(n_0, n_1, k_0) &= x_1(n_0, 0, k_0) + x_1(n_0, 1, k_0) w^{4n_1+2n_0} \end{aligned}$$

avec $w^{4n_1} = (-1)^{n_1}$

En donnant aux indices n_0, n_1, k_0 toutes les valeurs possibles on obtient les relations duales :

$$\begin{aligned} x_2(j) &= x_1(j) + w^{2n_0} x_1(j+2) \text{ pour } j \leq 3 \\ x_2(j+2) &= x_1(j) - w^{2n_0} x_1(j+2) \end{aligned}$$

avec $j = 4n_0 + k_0$ c'est à dire $n_1 = 0$

Les valeurs de x_2 se calculent 2 par 2 à partir des 2 valeurs de x_1 de mêmes indices de l'étape précédente. Les noeuds duaux étant espacés de $N/2^2 = 2$. Les relations précédentes correspondent

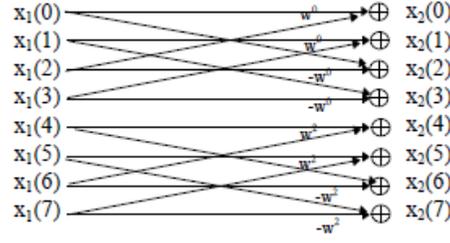


FIG. 4.18 - .

à la forme matricielle

$$\begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \\ x_2(4) \\ x_2(5) \\ x_2(6) \\ x_2(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -w^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \\ x_1(4) \\ x_1(5) \\ x_1(6) \\ x_1(7) \end{bmatrix}$$

Ces relations peuvent aussi se représenter sous la forme graphique de papillons : (figure 4.18)

L'exposant de w dans les relations précédentes est obtenu en divisant logiquement j par 2 et en retournant le résultat.

Enfin la troisième étape est la sommation sur k_0 qui conduit à la relation :

$$\begin{aligned} x_3(n_0, n_1, n_2) &= \sum_{k_0=0}^1 x_2(n_0, n_1, k_0) w^{(4n_2+2n_1+n_0)k_0} \\ x_3(n_0, n_1, n_2) &= x_2(n_0, n_1, 0) + x_2(n_0, n_1, 1) w^{(4n_2+2n_1+n_0)} \end{aligned}$$

avec $w^{4n_2} = (-1)^{n_2}$

Ce qui conduit aux relations duales :

$$\begin{aligned} x_3(j) &= x_2(j) + w^{2n_1+n_0} x_2(j+1) \\ x_3(j+1) &= x_2(j) - w^{2n_1+n_0} x_2(j+1) \text{ pour } j \text{ pair} \end{aligned}$$

avec $j = 4n_0 + 2n_1$

Les valeurs de x_3 se calculent 2 par 2 à partir des 2 valeurs de x_2 de mêmes indices de l'étape précédente. Les noeuds duaux étant espacés de $N/2^3 = 1$. L'exposant de w s'obtient en divisant logiquement j par 1 et en retournant le résultat.

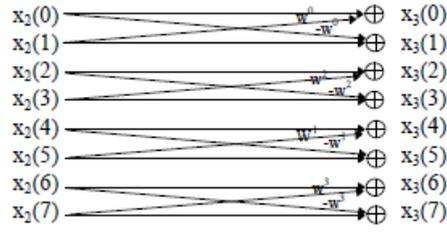


FIG. 4.19 - .

Les relations précédentes correspondent à la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} x_3(0) \\ x_3(1) \\ x_3(2) \\ x_3(3) \\ x_3(4) \\ x_3(5) \\ x_3(6) \\ x_3(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -w^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -w^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \\ x_2(4) \\ x_2(5) \\ x_2(6) \\ x_2(7) \end{bmatrix}$$

Relations qui se représentent graphiquement par : (figure 4.19)

Cette dernière suite de valeurs est égale à la suite cherchée $X(n)$ mais dans le désordre :

$$X(n_2, n_1, n_0) = x_3(n_0, n_1, n_2)$$

En résumé :

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(4) \\ X(2) \\ X(6) \\ X(1) \\ X(5) \\ X(6) \\ X(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3(0) \\ x_3(1) \\ x_3(2) \\ x_3(3) \\ x_3(4) \\ x_3(5) \\ x_3(6) \\ x_3(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -w^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -w^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & w^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -w^3 \end{bmatrix} \times$$

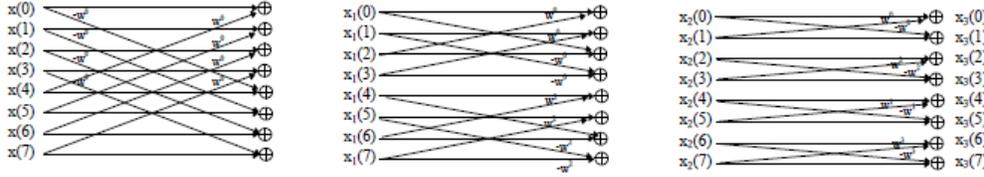


FIG. 4.20 - .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -w^0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & w^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -w^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -w^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & w^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -w^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix}$$

(figure 4.20)La méthode illustrée pour $N = 8$ se généralise pour tout N puissance de 2.

4.3.5 Autres algorithmes de FFT

Il existe de nombreux autres algorithmes de FFT, qui s'appliquent par exemple au cas où N n'est pas une puissance de 2.

Lorsque N est une puissance de 4, on peut appliquer un algorithme de FFT en base 4, plus efficace que l'algorithme en base 2. Le nombre d'opérations nécessaires étant alors de :

$$\begin{cases} \log_4(N) \frac{3N}{4} \text{ multiplications complexes} \\ \log_4(N) N \text{ additions complexes} \end{cases}$$

4.3.6 Utilisation de la FFT pour la convolution rapide

Soit la suite $(u(n))$ convolution de la suite $(x(n))$, de durée P , et de la suite $(y(n))$, de durée Q :

$$u(n) = \sum_{j=0}^{P-1} x(j) y(n-j)$$

la suite $(u(n))$ a pour durée $P + Q - 1$.

On peut calculer directement les $(P + Q - 1)$ valeurs de la suite $(u(n))$. Ce calcul nécessite $P(Q + 1)$ multiplications pour $(Q \geq P)$. Si P et Q sont grands, il peut être efficace de faire ce calcul par FFT.

Pour cela, on complète par des zéros les suites $(x(n))$ et $(y(n))$ de façon qu'elles aient toutes les deux N points, où N est une puissance de 2 telle que $N \geq P + Q - 1$.

Appelons $(x_l(n))$ et $(y_l(n))$ les suites prolongées par des zéros.

La suite $(z_l(n)) = (x_l(n)) \otimes (y_l(n))$ coïncide avec la suite $(u(n))$ sur ses $P+Q-1$ premiers points. Pour calculer la suite $(u(n))$, il suffit donc de :

1. compléter les suites $(x(n))$ et $(y(n))$ par des zéros pour qu'elles aient N points, avec $N \geq P+Q-1$.
2. Calculer par FFT les suites $X_l(k)$ et $Y_l(k)$: DFT des suites $(x_l(n))$ et $(y_l(n))$.
3. Calculer la suite $Z_l(k)$ produit des suites $X_l(k)$ et $Y_l(k)$: $Z_l(k) = X_l(k) \times Y_l(k)$
4. Calculer la suite $z_l(n)$ par FFT inverse de $Z_l(k)$
5. Identifier $(u(n))$ avec les $P+Q-1$ premiers points de $z_l(n)$.

Le nombre d'opérations à effectuer est de :

3 FFT (directes ou inverses) de N points + N multiplications complexes, c'est à dire :

$$\begin{cases} \frac{3N}{2} \log_2(N) + N \text{ multiplications complexes} \\ N \log_2(N) \text{ additions complexes} \end{cases}$$

Ce qu'il faut comparer au calcul direct : $P(Q+1)$ multiplications et additions réelles.

Exemple 4.3 $P = Q = 500$. On choisirait $N = 1024$.

Le calcul direct demanderait 500×501 multiplications et additions réelles.

Le calcul par FFT demanderait environ $1500 \times 10 + 1000$ soit 16000 multiplications complexes.

Une multiplication complexe demandant 4 multiplications réelles, on constate que le gain de calcul par FFT serait de :

$$\frac{500 \times 500}{16000 \times 4} \approx 4$$

4.4 Calcul de convolution par section d'une des suites

Souvent l'une des suites est beaucoup plus courte que l'autre. Le calcul peut alors se faire en sectionnant la suite la plus longue en sous-suites.

Appelons $(x(n))$ la suite courte de longueur P et $(y(n))$ la suite longue de longueur Q .

$(y(n))$ est coupée en suites de longueur $M > P$.

La convolution totale de $(x(n))$ et $(y(n))$ est obtenue en sommant correctement les convolutions de $(x(n))$ avec les sous-suites de $(y(n))$. Ces petites convolutions sont calculées par exemple par FFT. Le résultat coïncide sur $P+M-1$ premiers points avec les bonnes valeurs. Les petites convolutions se superposent 2 à 2 sur $(P-1)$ points. (figure 4.21)

Cette méthode permet de limiter la taille de la mémoire nécessaire.

4.5 Exercices et problèmes

Exercice 4.1 Calculer la transformée de Fourier discrète de la suite (x_n) formée de $N = 8$ points ($n \in [0, 7]$), obtenue en échantillonnant à la fréquence $f_e = 16\text{Hz}$ le signal $x(t)$:

$$x(t) = 2 \sin(8\pi t) + 8 \cos(4\pi t).$$

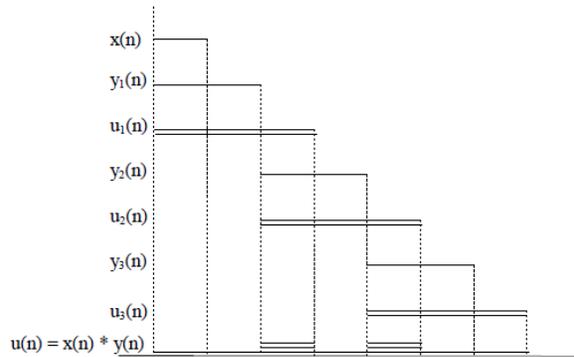


FIG. 4.21 - .

Exercice 4.2 Calculer la TFD de la suite x_n suivante :

x_n est formée de $N = 24$ points obtenus en échantillonnant le signal $x(t) = 3 \sin(8\pi t) + 4 \cos(6\pi t)$ à la fréquence $f_e = 24\text{Hz}$.

Exercice 4.3 Comparer le résultat de la convolution linéaire et de la convolution circulaire des 2 suites x_n et y_n suivantes :

$$\begin{cases} x_n = 1 \text{ pour } 0 \leq n \leq 3 \\ x_n = 0 \text{ pour } n \notin [0, 3] \end{cases} \quad \begin{cases} y_n = 2 \text{ pour } 0 \leq n \leq 3 \\ y_n = 0 \text{ pour } n \notin [0, 3] \end{cases}$$

On appellera z_n le résultat de la convolution linéaire :

$$z_n = \sum_{k=0}^3 x_k y_{n-k}$$

et t_n le résultat de la convolution circulaire :

$$t_n = \sum_{k=0}^3 x_k y_{\|n-k\|}$$

où $\|n-k\|$ signifie $n-k$ modulo $N = 4$.

Exercice 4.4 Pour $N = 4$, la TFD de la suite : x_0, x_1, x_2, x_3 s'écrit : X_0, X_1, X_2, X_3 avec :

$$X_k = \sum_{n=0}^3 x_n e^{-i2\pi \frac{nk}{N}}$$

1. Ecrire la matrice de passage du vecteur $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ au vecteur $\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$. On notera $w = e^{-2i\frac{\pi}{4}}$.

2. *Quel est le nombre de multiplications et d'additions à effectuer pour effectuer le calcul de la TFD sans algorithme particulier ?*
3. *Chercher à décomposer le calcul en 2 étapes pour diminuer le nombre d'opérations globales. Par exemple, commencer par grouper les indices pairs et les indices impairs séparément.*