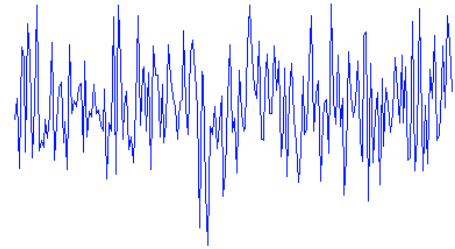




République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

Université du 20 Aout 1955 SKIKDA
Faculté de technologie
Département de génie mécanique



Traitement du signal

Cours, 3^{ème} Année Licence Maintenance
Industrielle

Réalisé par : Dr. GAHGAH MOUNIR

Année universitaire 2021/2022

Objectifs du cours

Ce cours est issu d'un enseignement donné depuis quelques années au sein du département de mécanique et s'adresse aux étudiants de licence maintenance industrielle et même à ceux désirant franchir les premières portes du traitement du signal et de connaître les techniques de base et les outils mathématiques utilisés dans traitement du signal.

Le contenu de cette polycopie vient conformément semblable à celui décrit pour la troisième année maintenance industrielle. Il s'étale sur six chapitres

Le premier chapitre expose des généralités sur les signaux ; une théorie sur le signal ; les différents critères de classification et les signaux usuels les plus rencontrés

Le deuxième chapitre décrit l'analyse de Fourier avec ses deux importants outils, la série de Fourier trigonométrique et complexe et transformée de Fourier qui permet le passage du domaine temps au domaine fréquentiel.

Le troisième chapitre est La transformée de Laplace qui est un outil mathématique très utile, il sert à résoudre des problèmes divers d'engineering, son importance ne manque à celle de la transformée de Fourier.

Dans le chapitre quatre on étudie la convolution ou le produit de convolution qui généralise l'idée de moyenne glissante et est la représentation mathématique de la notion de filtre linéaire. Il s'applique aussi bien à des données temporelles (en traitement du signal par exemple) qu'à des données spatiales (en traitement d'image).

Liée à la convolution, le sixième chapitre est destiné à l'étude de la corrélation des signaux. Les fonctions de corrélation traduisent le degré de similitude d'un signal avec lui-même ou entre deux signaux au niveau de leur forme et leur position relative dans le temps en fonction d'un certain paramètre de translation. La corrélation implémente un processus de comparaison entre les signaux.

Dans le dernier, on présente l'une des deux opérations importantes dans la numérisation des signaux : l'échantillonnage des signaux et sa théorie. Et à la fin du chapitre on expose une autre transformée très utile en traitement du signal : la transformée en Z ?

Table des matières

Chapitre I

Généralités sur les signaux

I.1	définition	1
I.2	classification des signaux	1
I.2.1	classification morphologique.....	1
a)	signal analogique.....	1
b)	signal discret.....	1
I.2.2	Classification phénoménologique:.....	2
a)	signal déterministe.....	2
b)	signal aléatoire.....	2
I.2.3	Signal périodique et non périodique	3
a)	signal périodique.....	3
b)	signal non périodique.....	3
I.3	Notion de puissance et d'énergie.....	5
I.4	signaux particuliers	7

Chapitre II

l'analyse de Fourier

II.1	Introduction	12
II.2	Série de Fourier	12
II.2.1	Série trigonométrique de Fourier.....	12
II.2.2	Forme exponentielle des séries de Fourier.....	16

II.2.3	théorème de Parseval.....	17
II.3	Transformée de Fourier	18
II.3.1	Définition	18
II.3.2	Propriétés	22

Chapitre III

la transformée de Laplace

III.1	Introduction	30
III.2	Définition	30
III.3	Propriétés de la Transformée de Laplace	30
III.4	Transformée inverse de Laplace	35
III.4.1	Décomposition en fractions partielles	35
III.4.2	Résolution des équations différentielles	38

Chapitre IV

Le produit de convolution

IV.1	Introduction	40
IV.2	Convolution des Signaux	40
IV.2.1	Propriétés de la Convolution	40
IV.2.2	Méthode graphique pour le produit de convolution.....	41

Chapitre V

Corrélation des signaux

V.1	Définition.....	46
V.1.1	Fonction d'inter-corrélation.....	46

V.1. 2 Fonction d'auto-corrélation	46
IV.2 Propriétés de la corrélation	47

Chapitre VI

Echantillonnage et Signaux discrets

VI.1 Introduction	49
VI.2 système échantillonné	49
VI.3 Echantillonnage réel	50
VI.3.1 La transformée de Fourier	51
VI.4 Echantillonnage idéalisé	52
III.4.1 La transformée de Fourier	52
VI.5. Théoreme de Shanon	53
VI.5.1. théoreme d'échantillonnage.....	53
Exemples D'échantillonneur.....	53
VI.6 La transformée en Z	55
VI.6.1 Introduction	55
VI.6.2 Définition	56
VI.6.3 transformée en Z des signaux particuliers.....	57
VI.6.4 propriétés de la transformée en Z	58
VI.6.5 la transformée inverse	60

Chapitre I

Généralités sur les signaux

I.1 définition

Un signal est une grandeur physique, qui convoie une information et le plus souvent elle est sous forme électrique (tension, courant, ...)

I.2 Classification des signaux

Les critères de classification des signaux sont multiples parmi ;

I.2.1 Classification morphologique

Si un signal est défini pour toutes les valeurs de la variable indépendante t , il est appelé signal à temps continu (CT). Considérez les signaux représentés sur les Fig. 1.1 Comme ces signaux varient continuellement avec le temps t et ont des amplitudes connues à tous les instants temporels, ils sont classés comme signaux CT. En revanche, si un signal n'est défini qu'à des valeurs discrètes de temps, il est appelé signal à temps discret (DT). La figure 1.1 (h) montre la température de sortie d'une pièce mesurée à la même heure chaque jour pendant une semaine. Aucune information n'est disponible pour la température entre les relevés quotidiens. La figure 1.1 (h) est donc un exemple de signal DT. Dans notre notation, un signal CT est désigné par $x(t)$ avec des parenthèses régulières, et un signal DT est noté avec des parenthèses carrées comme suit [1], [4] :

- a) **Signal analogique** : se sont des signaux à temps continu, définies à chaque instant, d'une autre manière on peut dire que l'amplitude et le temps sont des variables continues, il n'y a pas de discontinuité.

- b) **Signal discret** : Le nombre des valeurs prises $s(t)$ est limité, ceci à des instants t discrets (l'amplitude et le temps sont des variables discontinues) .

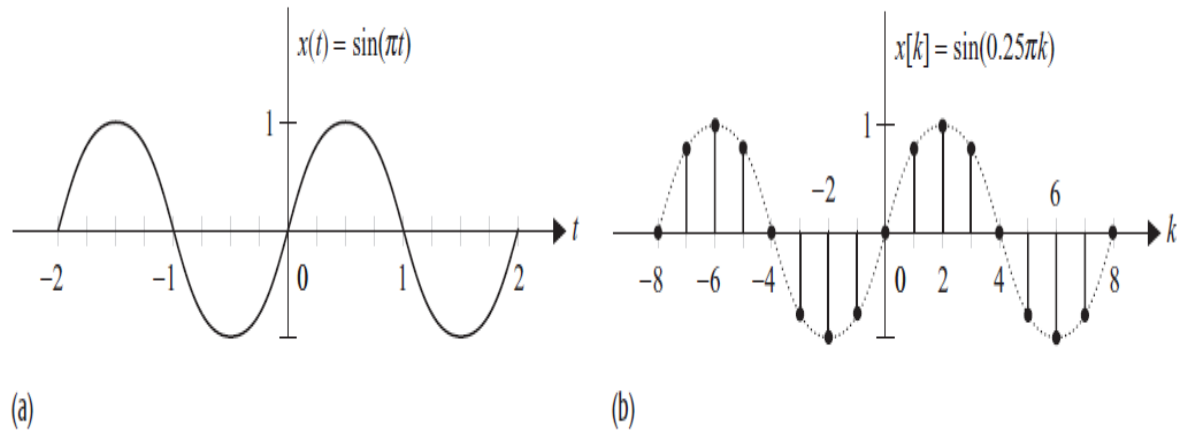


Fig. 1.1 classification morphologique : a) signal continu b) signal discret

I.2.2 Classification phénoménologique:

En tenant compte de la nature de l'évolution du signal dans le temps. Il apparaît deux types de signaux :

- a) **Signal déterministe** : Les signaux déterministes sont qualifiés de certains, c'est-à-dire prévisibles dans le temps. Leur évolution en fonction du temps peut être exprimée par un modèle mathématique classique [2].

Exemple le signal $y(t) = 1$

- b) **Signal aléatoire** : dont le comportement est imprévisible pour leur description, on utilise la description physique.

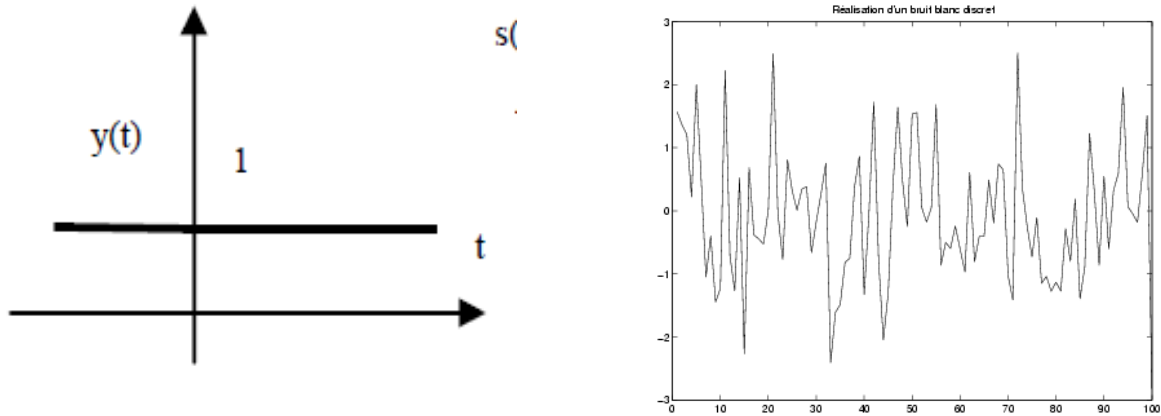


Fig. 1.2 classification phénoménologique : a) signal déterministe b) signal aléatoire

I.2.2 Signal périodique et non périodique:

- Signal périodique :

Un signal continu $x(t)$ est dit périodique s'il satisfait la propriété suivante:

$$x(t) = x(t + T_0) \quad (1.1)$$

À tout instant t et pour une constante positive T_0 . La plus petite valeur positive de T_0 qui satisfait à la condition de périodicité, Eq. (1.3), est appelée période fondamentale de $x(t)$.

De même, un signal discret $x[n]$ est dit périodique s'il satisfait

$$x(n) = x(n + n_0) \quad (1.2)$$

À tout moment n et pour une constante positive n_0 . La plus petite valeur positive de n_0 qui satisfait à la condition de périodicité, Eq. (1.4), est appelée période fondamentale de $x[n]$.

-Signal non périodique:

Un signal qui n'est pas périodique est appelé signal apériodique ou non périodique. La figure 1.6 montre des exemples de signaux périodiques et apériodiques. La réciproque de la période

fondamentale d'un signal est appelée fréquence fondamentale. Mathématiquement, la fréquence fondamentale s'exprime comme suit :

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \text{ pour les signaux continus et } f_0 = \frac{1}{n_0} \text{ pour les signaux discrets}$$

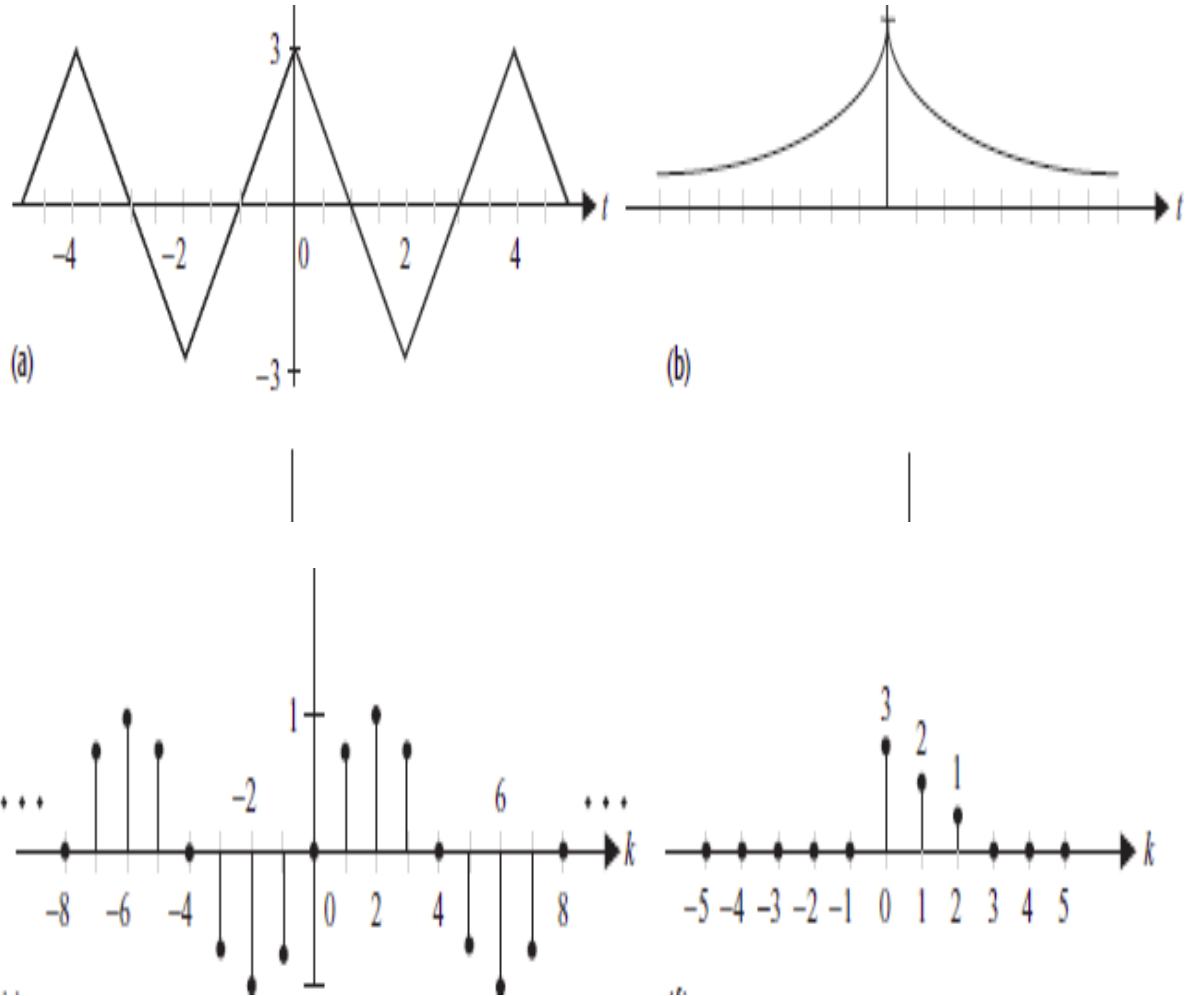


Fig. 1.3 classification signaux périodiques et non périodiques

Où T_0 et n_0 sont, respectivement, les périodes fondamentales des signaux continus et discrets. La fréquence d'un signal fournit des informations utiles sur la vitesse à laquelle le signal change son amplitude [5]. L'unité de fréquence est le nombre de cycles par seconde (c / s) ou hertz (Hz). Parfois, nous utilisons également des radians par seconde comme unité de fréquence. Puisqu'il y a 2π radians (ou 360°) dans un cycle, une fréquence de f_0 hertz

équivalent à $2\pi f_0$ radians par seconde. Si des radians par seconde sont utilisés comme unité de fréquence, la fréquence est appelée fréquence angulaire et est donnée par

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \text{ pour les signaux continus et } \Omega_0 = \frac{2\pi}{n_0} \text{ pour les signaux discrets}$$

I.3 Notion de puissance et d'énergie

Avant de présenter les conditions de classification d'un signal en énergie ou en puissance, nous présentons les formules de calcul de l'énergie et de la puissance d'un signal.

La puissance instantanée à l'instant $t = t_0$ d'un signal continu de valeur réelle $x(t)$ est donnée par $x^2(t_0)$. De même, la puissance instantanée d'un signal discret de valeur réelle $x[n]$ à l'instant $n = n_0$ est donnée par $x^2[n_0]$. Si le signal a une valeur complexe, les expressions de la puissance instantanée sont modifiées en $|x(t_0)|^2$ ou $|x[n_0]|^2$, où le symbole $|\cdot|$ représente la valeur absolue d'un nombre complexe[3].

L'énergie présente dans un signal continu ou discret dans un intervalle de temps donné est donnée par ce qui suit:

Pour un signal continu

L'énergie dans un intervalle $[t_1; t_2]$

$$W_{(t_1 t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \quad (1.3)$$

La puissance moyenne dans $[t_1; t_2]$

$$P_{moy} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \quad (1.4)$$

Energie total d'un signal

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.5)$$

Puissance moyenne totale

$$P_{moy} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) dt \right] \quad (1.6)$$

Pour un signal discret

$$W_{(n_1 n_2)} = \sum_{k=n_1}^{n_2} |x(n)|^2 \quad (1.7)$$

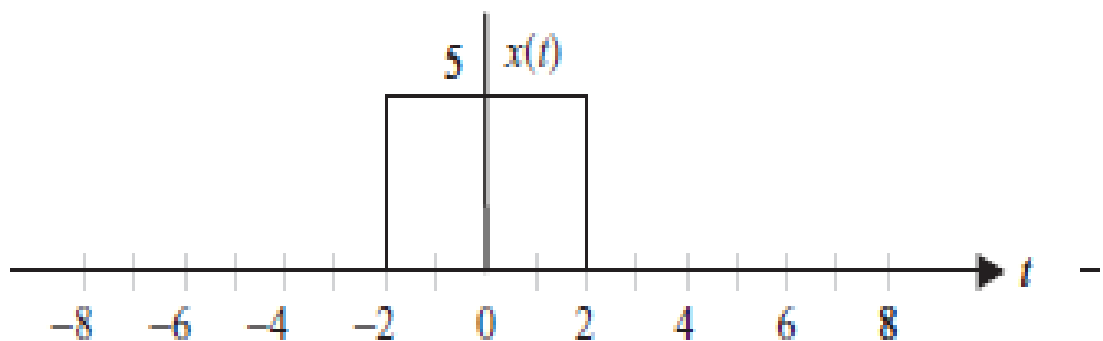
- **Exemple :**

Soit un signal continu $x(t)$ défini comme suit :

$$x(t) = \begin{cases} 5 & -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer la puissance instantanée, la puissance moyenne, et l'énergie de ce signal

Solution



En la valeur du signal au carré nous aurons la valeur de la puissance instantanée

$$P(t) = \begin{cases} 25 & -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'énergie totale de du signal est

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = W = \int_{-2}^{+2} 25 dt = 100$$

La puissance moyenne

$$P_{moy} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) dt \right] = 0$$

$x(t)$ a une énergie finie ($0 < W = 100 < \infty$) c'est un signal énergie

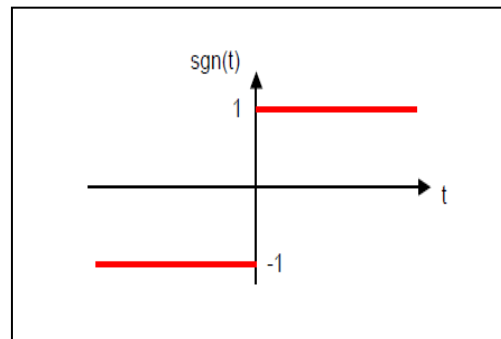
Par contre s un signal a une puissance finie, le signal est dit signal puissance

I.4 Signaux particuliers

1) Signal signe

Noté $\text{sgn}(t)$, il est défini par :

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t > 0 \\ -1 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

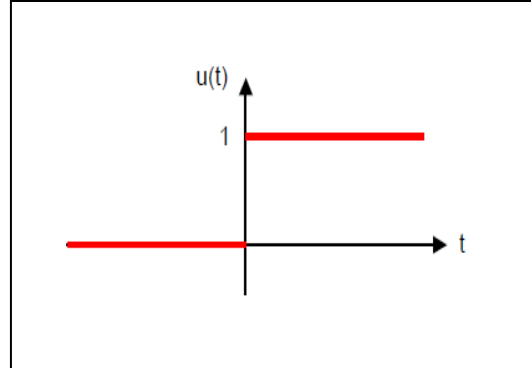


En $t=0$ on adopte $\text{sgn}(t)=0$

2) Echelon Unité

Il est aussi appelé fonction de Heavyside, ce signal est défini par :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

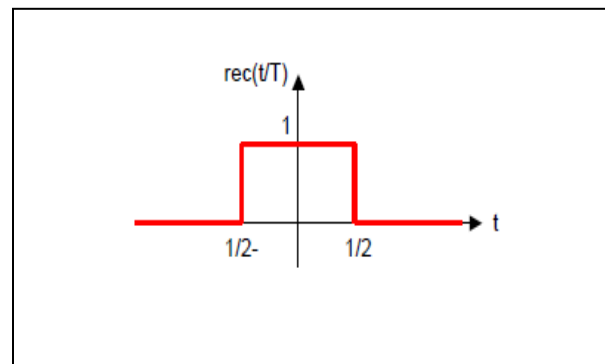


En $t=0$ $u(t) = 1$ ou $u(t) = \frac{1}{2}$

3) Signal rectangle

Il est aussi appelé signal porte $\Pi(t)$, défini par :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pour } |t| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.9)$$



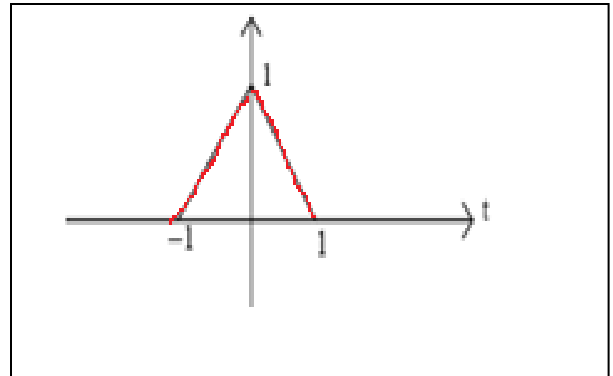
Pour $t = \frac{1}{2}$ on a $\text{rect}(t) = \frac{1}{2}$

Si T est la période la fonction sera défini par

$$\begin{cases} 1 & \text{pour } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{pour } |t| > \frac{T}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{pour } |t| = \frac{T}{2} \end{cases} \quad (1.10)$$

4) Signal triangle

Il est défini par :

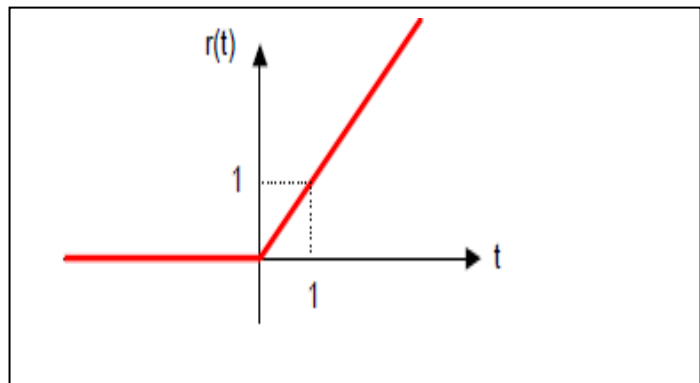


$$tri(t) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{t}{T} \right| & \text{pour } |t| \leq T \\ 0 & \text{pour les autres valeurs de } t \end{cases} \quad (1.11)$$

5) Le signal rampe

La rampe est définie par :

$$r(t) = t \cdot u(t) \quad (1.12)$$

**6) Impulsion de Dirac**

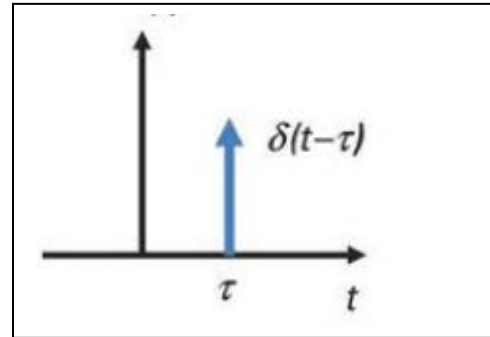
Cette fonction est défini par :

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \neq 0 \\ \infty & \text{pour } t = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ est $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$

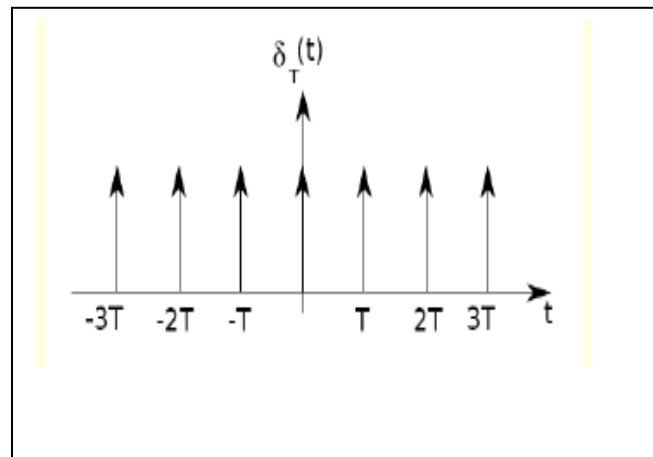
c) impulsion de Dirac décalée

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} \delta(t - \tau) \text{ pour } t \neq \tau \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1 \end{cases} \quad (1.14)$$



d) Peigne de Dirac

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad (1.15)$$



Exercice01

Déterminer la valeur de la puissance et de l'énergie de chaque signal:

a) $x(t) = \cos t$

b) $y(t) = e^{-2t}u(t)$

Solution

a)

$$E_{\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(t) dt = \infty$$

$$\begin{aligned} P_\infty &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \cos^2(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Le signal $x(t) = cost$ est un signal puissance

$$\text{b) } E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{4}$$

$$P_\infty = 0, \text{ puisque } E_\infty < \infty$$

Chapitre II

l'analyse de Fourier

II.1 Introduction

L'analyse de Fourier est l'étude de la façon dont les fonctions générales peuvent être décomposées en fonctions trigonométriques ou exponentielles avec des fréquences définies. Il existe deux types d'extensions de Fourier:

- Série de Fourier: si une fonction est périodique, elle peut être écrite comme une somme discrète de fonctions trigonométriques ou exponentielles avec des fréquences spécifiques.
- Transformée de Fourier: une fonction générale qui n'est pas nécessairement périodique peut être écrite comme une intégrale continue de fonctions trigonométriques ou exponentielles avec un continuum de fréquences possibles.

La raison pour laquelle l'analyse de Fourier est si importante en physique est que beaucoup (mais certainement pas toutes) des équations différentielles qui régissent les systèmes physiques sont linéaires, ce qui implique que la somme de deux solutions est à nouveau une solution. Par conséquent, puisque l'analyse de Fourier nous dit que toute fonction peut être écrite en termes de fonctions sinusoïdales, nous pouvons limiter notre attention à ces fonctions lors de la résolution des équations différentielles. Et puis nous pouvons construire toute autre fonction à partir de ces fonctions spéciales. Il s'agit d'une stratégie très utile, car il est invariablement plus facile de traiter les fonctions sinusoïdales que les fonctions générales.

II.2 Série de Fourier

II.2.1 Série trigonométrique de Fourier

Le théorème de Fourier stipule que toute fonction peut être écrite en termes de fonctions trigonométriques ou exponentielles.

Considérons une fonction $f(t)$ qui est périodique sur l'intervalle $0 \leq t \leq L$. Le théorème de Fourier fonctionne même si $f(t)$ n'est pas continu, bien qu'une chose intéressante se produise au niveau des discontinuités. Il existe de nombreuses conventions différentes, mais elles aboutissent toutes au même résultat général à la fin. Si nous supposons une périodicité de $0 \leq t \leq L$, le théorème de Fourier déclare que $f(t)$ peut s'écrire

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (2.1)$$

$$\text{Avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Où les coefficients a_n et b_n prennent certaines valeurs que nous calculerons ci-dessous. Cette expression est la série trigonométrique de Fourier pour la fonction $f(t)$. Nous pourrions alternativement ne pas séparer le terme a_0 et laisser la somme courir de $n = 0$ à ∞ , car $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$. Mais la convention normale est d'isoler le terme a_0 .

- **Calcul des coefficients**

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (2.2)$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (2.3)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (2.4)$$

- si f est paire :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \quad (2.5)$$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (2.6)$$

$$b_n = 0 \quad (2.7)$$

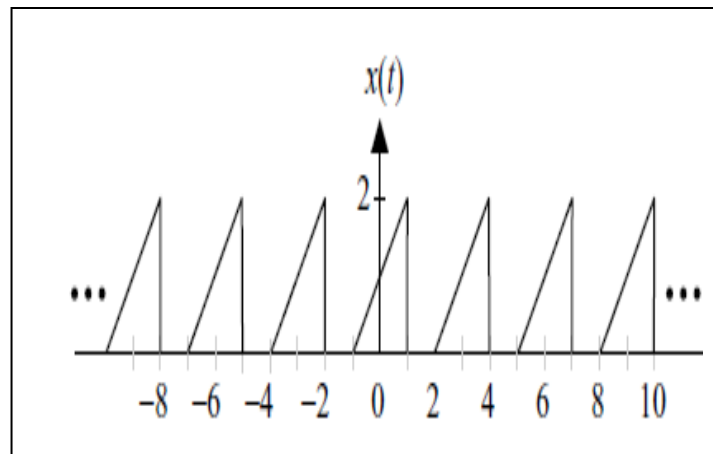
- Si f est impaire

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (2.8)$$

- Exemple

Calculer les coefficients du signal périodique $f(t)$ de période $T=3$ défini par

$$f(t) = \begin{cases} t + 1 & \text{pour } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{pour } 1 < t < 2 \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T f(t) dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 (t + 1) dt = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} t^2 + t \right] = \frac{2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (t+1) \cos(n\omega t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 t \cos(n\omega t) dt + \frac{2}{3} \int_{-1}^1 \cos(n\omega t) dt$$

$$\int_{-1}^1 t \cos(n\omega t) dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 \cos(n\omega t) dt = \frac{4}{3} \int_0^1 \cos(n\omega t) dt = \frac{4}{3} \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right] = \frac{4 \sin(n\omega)}{3n\omega}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 3K \\ \frac{\sqrt{3}}{n\pi} & n = 3k + 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{n\pi} & n = 3k + 2 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_T f(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (t+1) \sin(n\omega t) dt$$

en suivant les mêmes étapes de calcul de a_n , on aura

$$b_n = \begin{cases} -\frac{2}{n\pi} & n = 3K \\ \frac{1}{n\pi} + \frac{3\sqrt{3}}{2(n\pi)^2} & n = 3k + 1 \\ \frac{1}{n\pi} - \frac{3\sqrt{3}}{2(n\pi)^2} & n = 3k + 2 \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{3}t\right)$$

II.2.2 Forme exponentielle des séries de Fourier

Une fonction périodique arbitraire $f(t)$ de période T peut être exprimée comme suit :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jnwt} \quad (2.9)$$

Avec
$$C_n = \frac{1}{T} \int f(t) e^{-jnwt} dt \quad (2.10)$$

L'équation ci-dessus est connue comme la représentation exponentielle de la série de Fourier de $f(t)$. Étant donné que les fonctions de base correspondant à la forme trigonométrique et exponentielle sont liées par l'identité d'Euler

$$e^{-jnwt} = \cos(nwt) - j\sin(nwt) \quad (2.11)$$

Si $f(t)$ est un signal périodique de période T , il s'écrit sous la forme

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(nwt) + b_n \sin(nwt)]$$

A partir de l'identité d'Euler, on peut tirer les relations suivantes :

$$\cos(nwt) = \frac{1}{2} (e^{jnwt} + e^{-jnwt}) \quad (2.12)$$

$$\sin(nwt) = \frac{1}{2j} (e^{jnwt} - e^{-jnwt}) \quad (2.13)$$

On aura

$$a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega t} \quad (2.14)$$

$$\text{Donc } f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega t} \quad (2.15)$$

La deuxième partie de la sommation peut être exprimée comme suit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n})e^{jn\omega t} \quad (2.16)$$

Ce qui conduit à l'expression suivante:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n})e^{jn\omega t} \quad (2.17)$$

On obtient

$$C_n = \begin{cases} a_0 & n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_n - jb_n) & n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n}) & n < 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

II.2.3 Théorème de Parseval

L'énergie d'un signal périodique $f(t)$ peut être calculer de ses coefficients de sa forme exponentiel de la série de Fourier.

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 \quad (2.19)$$

Pour les valeurs réelles des signaux

$$|C_n| = |C_{-n}| \quad (2.20)$$

Ce qui donne la formule simplifiée suivante:

$$W = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n|^2 = |C_0|^2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |C_n|^2 \quad (2.21)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(nwt) + b_n \sin(nwt)] \quad (2.22)$$

$$\text{Avec } w = \frac{2\pi}{T}$$

II.3 Transformée de Fourier

II.3.1 Définition

Les transformées de Fourier sont un outil mathématique qui nous permet d'obtenir une représentation en fréquentielle (représentation spectrale) des signaux déterministes, continus et non périodiques. Elle exprime la répartition fréquentielle de l'amplitude et de la phase des signaux considérés.

La transformée de Fourier d'une fonction peut être dérivée comme un cas particulier de la série de Fourier lorsque la période, $T \rightarrow \infty$.

Ces décompositions de fréquence résultantes qui sont appelées la transformée de Fourier sont utilisées pour exprimer à la fois des signaux continus aperiodiques et périodiques en termes de combinaisons linéaires de fonctions exponentielles complexes.

Considérons le signal apériodique $x(t)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2j\pi ft} df \quad (2.23)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi ft} dt \quad (2.24)$$

$X(f)$ est la transformée de Fourier de (t) , on peut écrire aussi $X(f) = TF(x(t))$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi ft} dt = X(f) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt - jX(f) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \quad (2.25) \end{aligned}$$

On a

$$X(f) = X_r(f) + jX_{im}(f) \quad (2.26)$$

Ou: $X_r(f)$ est la partie réelle est $X_{im}(f)$ la partie imaginaire de $X(f)$ qui est généralement complexe

$$X_r(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt \quad \text{et} \quad X_{im}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt$$

De la

$$\left| X(f) \right| = \sqrt{X_r^2(f) + X_{im}^2(f)} \quad (2.27)$$

$$\text{Arg}[X(f)] = \text{arctang} \left(\frac{X_{im}(f)}{X_r(f)} \right) \quad (2.28)$$

- Le spectre d'amplitude d'un signal réel est pair
- Le spectre de phase d'un signal réel est impair

La transformation inverse de Fourier est:

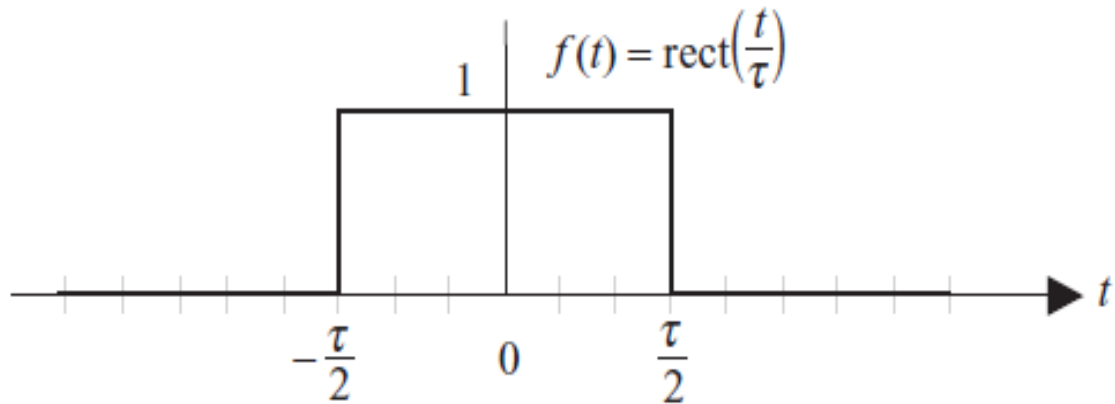
$$x(t) = TF^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.29)$$

Comme $\omega = 2\pi f$ on peut écrire

$$x(t) = TF^{-1}\{X(f)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.30)$$

Exemple 3.1

Calculer la transformée de Fourier du signal rectangulaire $f(t)$



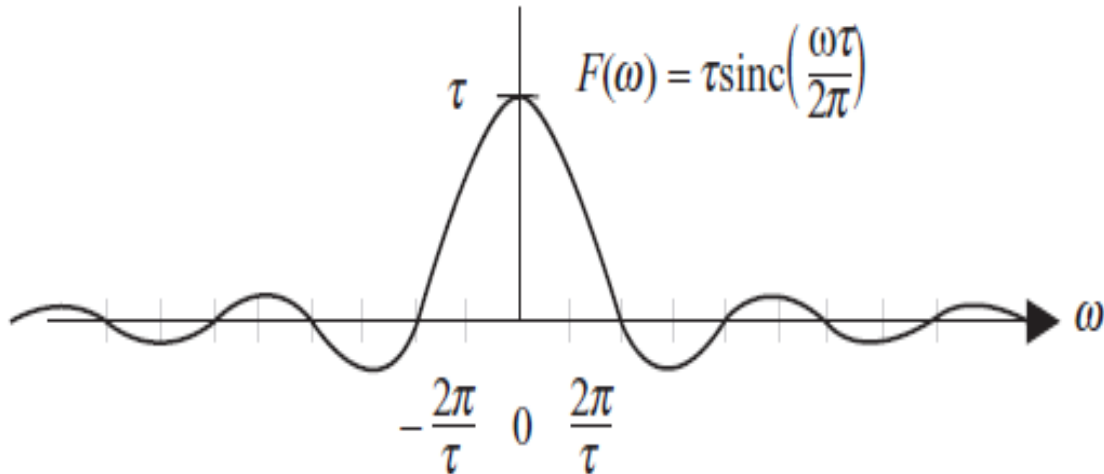
Solution :

$$TF(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \text{rect}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = -\frac{1}{j\omega} \left[e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}} \right]$$

En écrivant l'exponentiel en fonction de sinus et cosinus nous aurons:

$$TF(\omega) = -\frac{1}{j\omega} \left[-2j \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right] = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

La transformée de Fourier du signal $f(t)$ sera représenté sur la figure ci dessous



- ❖ **La réciprocité** : les propriétés de $X(f)$ sont toutes valables pour $x(t)$ et réciproquement

$$X(f) \Leftrightarrow x(t)$$

$$t \Leftrightarrow f$$

II.3.2 Propriétés

- ❖ **Linéarité**

Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux fonctions de L^2 , α et β de \mathbb{C} , on démontre que

$$TF[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha TF[x_1(t)] + \beta TF[x_2(t)] = \alpha X_1(f) + \beta X_2(f) \quad (2.31)$$

- ❖ **Changement d'échelle**

$$TF[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right) \quad (2.32)$$

❖ Transformée de la dérivée

$$\frac{dx(t)}{dt} = j2\pi fX(f) \quad \text{et} \quad \frac{d^n x(t)}{dt^n} = (j2\pi f)^n X(f) \quad (2.33)$$

❖ Retard temporel

$$TF[x(t - t_0)] = e^{-2j\pi f t_0} X(f) \quad (2.34)$$

La sera modifié mais le module ne change pas, on appliquant la réciprocity

$$TF^{-1}[X(f - f_0)] = e^{-2j\pi f_0 t} x(t) \quad (2.35)$$

et

$$TF^{-1}[e^{2j\pi f_0 t} x(t)] = X(f - f_0) \quad (2.36)$$

Le théorème de Parseval nous donne la possibilité de faire le lien entre l'énergie d'un signal dans le domaine temporel et l'énergie en fonction de la fréquence.

Puisque la fréquence et le temps sont deux domaines qui permettent de d'écrire complètement un signal, il faut que l'énergie totale soit la même dans les deux domaines.

Gabriel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (2.37)$$

Tables des signaux usuelles et leurs transformées de Fourier

Le signal : $s(t)$	Transformée de Fourier du signal : $S(f)$
Constante $A \forall t$	$A\delta(f)$
$\delta(t)$	1
Peigne de Dirac $\sum_n \delta(t - nT)$	$\sum_n \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$
$\delta(t - \tau)$	$e^{-j2\pi f\tau}$
Echelon unité $U(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
$A \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$A\tau \text{sinc}(f\tau)$
$A \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right)$	$AT \text{sinc}^2(fT)$
$e^{-j2\pi f_0 t}$	$\delta(f + f_0)$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$

Exercices▪ **Exercice01**

Déterminer les séries de Fourier du signal

$$f(t) = 2t + 1 \quad -\pi \leq t \leq \pi \quad \text{et} \quad T = 2\pi$$

○ **Solution**

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

On détermine maintenant les coefficients de Fourier

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2t + 1) \cos(nt) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(2t + 1)}{n} \sin(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{n} \sin(nt) dt \quad (t \neq 0)$$

$$a_n = 0 + \frac{1}{\pi} \frac{2}{n^2} [\cos(nt)]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2t + 1) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} [t^2 + t]_{-\pi}^{\pi} = 2$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2t + 1) \sin(nt) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(2t+1)}{n} \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{n} \cos(nt) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{(2\pi+1)}{n} + \frac{(-2\pi+1)}{n} \right] (-1)^n \\
\mathbf{b_n} &= -\frac{4}{n} (-1)^n
\end{aligned}$$

Les séries de Fourier s'écrivent

$$f(t) = 2 - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt)$$

▪ **Ex02**

Trouver la série de Fourier de la fonction

$$\begin{aligned}
f(t) &= t^2 + t \quad -\pi \leq t \leq \pi \\
f(t) &= f(t + 2\pi)
\end{aligned}$$

○ **Solution**

Nous pourrions aller de l'avant et trouver la série de Fourier de la manière habituelle. Cependant, il est beaucoup plus facile d'utiliser le formulaire complexe mais de manière sur mesure comme suit. Étant donné

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

On définit

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{jnt} dt = \mathbf{a}_n + j\mathbf{b}_n$$

Alors

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + t) e^{jnt} dt$$

(par utilisation de l'intégral par parties)

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2+t}{jn} e^{jnt} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(2t+1)}{jn} e^{jnt} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2+t}{jn} e^{jnt} - \frac{(2t+1)}{(jn)^2} e^{jnt} + \frac{2}{(jn)^3} e^{jnt} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^2 + \pi}{jn} - \frac{\pi^2 - \pi}{jn} + \frac{2\pi + 1}{n^2} - \frac{-2\pi + 1}{n^2} \right] (-1)^n \\ &= (-1)^n \left(\frac{4}{n^2} + \frac{2}{jn} \right) \end{aligned}$$

On aura alors

$$\mathbf{a}_n = (-1)^n \left(\frac{4}{n^2} \right) \quad \mathbf{b}_n = (-1)^n \left(\frac{2}{jn} \right)$$

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (t^2 + t) dt = \frac{2}{3} \pi^2$$

Ceux-ci peuvent être vérifiés par calcul direct. La série de Fourier est donc, en supposant la convergence du membre de droite,

$$f(t) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4\cos nt}{n^2} - \frac{2\sin nt}{n} \right)$$

▪ **Ex03**

Déterminer la transformée de Fourier du signal $f(t)$ défini comme suit :

$$f(t) = \begin{cases} T+t & -T \leq t \leq 0 \\ T-t & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

○ **Solution**

$$F(w) = \int_{-T}^0 (T+t)e^{-jwt} dt + \int_0^T (T-t)e^{-jwt} dt$$

$$= 2 \int_0^T (T-t)\cos(wt) dt$$

$$= \frac{2}{w} \left[(T-t) \frac{\sin(wt)}{w} \right]_0^T + \frac{2}{w} \int_0^T \sin(wt) dt$$

$$= \frac{2}{w} \left[-\frac{\cos(wt)}{w} \right]_0^T$$

$$= \frac{2(1 - \cos(wT))}{w^2}$$

▪ **Ex04**

Si $f(t) = e^{-t^2}$ trouver sa transformation de Fourier

○ **Solution**

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-jw t} dt$$

On écrit

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\frac{1}{2}jw)^2} e^{-\frac{1}{4}w^2} dt$$

D'où

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\frac{1}{2}jw)^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Donc la transformée de Fourier du signal sera

$$F(w) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}w^2}$$

Chapitre III

la transformée de Laplace

III. Transformation de Laplace

III.1 Introduction

La transformée de Laplace est un outil mathématique très utile, il sert à résoudre des problèmes divers d'engineering, son importance ne manque à celle de la transformée de Fourier. Cette transformation permet d'associer, à toute fonction $f(t)$, une fonction $F(p)$ d'une variable complexe P . Elle permet de remplacer les opérations analytiques de dérivation et d'intégration par des opérations algébriques. Cette propriété facilite la résolution des équations différentielles[1] [7].

III.2 Définition

Soit $f(t)$ une fonction à valeur réelle ou complexe de la variable réelle t définie de $[0, \infty[$ et soit $p = \alpha + j\beta$, une variable complexe; l'expression :

$$L[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (3.1)$$

Est la transformée de Laplace de fonction $f(t)$, La variable p est appelé fréquence complexe et des fois elle est notée s

La transformée de Laplace permet le passage du problème du temps au domaine de la fréquence. Lorsqu'on obtient la réponse voulue dans le domaine de la fréquence, on transforme le problème à nouveau dans le domaine du temps, à l'aide de la transformée inverse de Laplace. Dans le domaine de Laplace, les dérivées et intégrales se combinent à l'aide de simples opérations algébriques ; pas besoin d'équations différentielles[8].

III.3. Propriétés de la Transformée de Laplace

- **Linéarité**

Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions deux signaux et a et b sont deux constants, on a :

$$F(p) = L[f(t)] \quad \text{et} \quad G(p) = L[g(t)] \quad (3.2)$$

$$L[af(t) + bg(t)] = aF(p) + bG(p)$$

Pour le démontrer on a :

$$\int_0^{+\infty} [af(t) + bg(t)] dt = a \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt + b \int_0^{+\infty} e^{-pt} g(t) dt \quad (3.3)$$

- **Transformée de la dérivée**

La dérivée première est obtenue par :

$$L[f'(t)] = pF(p) - f(0) \quad (3.4)$$

La transformée de la dérivée seconde :

$$L[f''(t)] = p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \quad (3.5)$$

La dérivée d'ordre n est :

$$L[f^n(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (3.6)$$

Si on considère les valeurs initiales toutes nulles, on :

$$L[f^n(t)] = p^n F(p) \quad (3.7)$$

Tableau des signaux usuels et leurs transformées de Laplace

Pour utiliser la transformée de Laplace, on ne recalcule pas les fonctions, on utilise le tableau récapitulatif suivant. L'utilisation de la fonction échelon permet de travailler dans \mathbb{R}^+ et ainsi de pouvoir utiliser la transformée de Laplace[5].

$x(t)$	$X(p)$
Impulsion de Dirac $\delta(t)$	1
Échelon $A.u(t)$	$\frac{A}{p}$
$at.u(t)$	$\frac{a}{p^2}$
$e^{-at}.u(t)$ avec $a \geq 0$	$\frac{1}{p+a}$
$t.e^{-at}.u(t)$ avec $a \geq 0$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\sin(\omega t).u(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t).u(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$e^{-at}.\sin(\omega t).u(t)$ avec $a \geq 0$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}.\cos(\omega t).u(t)$ avec $a \geq 0$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

Tableau. III.1 récapitulatif des transformées de fonctions usuelles

- ***Théorème de la valeur initiale***

On peut déterminer la valeur de la fonction $f(t)$ à l'origine si on connaît la limite à l'infini de sa transformée de Laplace.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = f(0^+) \quad (3.8)$$

Exemple :

Soit $F(p) = \frac{2p+3}{p(p+2)}$; déterminer $f(t)$

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2}$$

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ A = \frac{3}{2}, \quad B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{\frac{3}{2}}{p} + \frac{\frac{1}{2}}{p+2}$$

$$f(t) = \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} \right] \quad f(0^+) = 2$$

En utilisant le théorème de la valeur initiale

$$pF(p) = \frac{2p+3}{p+2}$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = 2 = f(0^+)$$

- **Théorème de la valeur finale**

On peut déterminer la valeur de la fonction $f(t)$ à l'infini si on connaît la limite pour p tend vers 0 de sa transformée de Laplace[1].

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \quad (3.9)$$

Exemple

$$F(p) = \frac{2p+3}{p(p^2+2p+2)}$$

On vérifie que

$$f(t) = \left[\frac{3}{2} - e^{-t} \left(\frac{3}{2} \cos t + \sin t \right) \right]$$

$$\text{D'où } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{3}{2}$$

$$pF(p) = \frac{2p + 3}{p^2 + 2p + 2}$$

On a:

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \frac{3}{2}$$

- **L'intégration d'une fonction**

Soit $y(t) = \int_0^t f(x)dx$

$y(t)' = f(t)$ et $y(0) = 0$

$$F(p) = L(y(t)') = pL(y(t) - y(0))$$

On aura:

$$L\left[\int_0^t f(x)dx\right] = \frac{F(p)}{p} \quad (3.10)$$

- **Changement d'échelle :**

Soit

$$y(t) = f(at)$$

$$Y(p) = \int_0^{+\infty} f(at)e^{-pt} dt \quad (3.11)$$

On effectue un changement de variable

$$x = at \quad dx = adt$$

$$Y(p) = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(x) e^{-\frac{px}{a}} dx$$

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \quad (3.12)$$

- **Fonction en retard**

En utilisant le changement de variable on aura

$$L[f(t - a)] = e^{-ap} F(p) \quad (3.13)$$

III.4. Transformée inverse de Laplace :

L'utilisation de la transformation de Laplace permet le passage d'un problème portant sur le domaine temps à un problème portant sur le domaine de la variable complexe p , après avoir obtenu la solution du problème. Il est nécessaire d'inverser cette transformation pour obtenir la solution ayant pour domaine de temps.

Dans cette étape on a besoin de la transformée inverse de Laplace pour réaliser ce retour au domaine temporel.

Soit $F(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$.

$$L^{-1}[F(p)] = f(t) \text{ est la transformée inverse de Laplace de } F(p)$$

III.4.1. Décomposition en fractions partielles

La méthode des fractions partielles est une technique de décomposition de fonctions comme $Y(s)$ ci-dessus afin que la transformée inverse puisse être déterminée de manière simple. Il est applicable aux fonctions du formulaire

$$Y(p) = \frac{N(p)}{D(p)} \quad (3.14)$$

Où $N(p)$ et $D(p)$ sont des polynômes et le degré de N est inférieure à la mesure de D . Pour simplifier, nous supposons que N et D ont des coefficients réels. Nous considérons les cas suivants:

- $D(p)$ est un quadratique avec 2 racines réelles
- $D(p)$ est un quadratique à double racine
- $D(p)$ est un quadratique à racines conjuguées complexes
- $D(p)$ est de degré 3 et a 1 racine réelle et 2 racines conjuguées complexes

a) $D(p)$ est un quadratique avec 2 vraies racines

Exemple

$$Y(p) = \frac{2p - 8}{p^2 - 5p + 6}$$

$$Y(p) = \frac{2p - 8}{p^2 - 5p + 6} = \frac{A}{p - 2} + \frac{B}{p - 3}$$

$$Y(p) = \frac{4}{p - 2} - \frac{2}{p - 3}$$

Maintenant, nous pouvons inverser $Y(s)$

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = Ae^{2t} + Be^{3t}$$

Si le dénominateur a n racines distinctes:

$$D(p) = (p - a_1)(p - a_2) \dots (p - a_n)$$

Alors la décomposition a la forme

$$Y(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{A_1}{p - a_1} + \frac{A_2}{p - a_2} + \dots + \frac{A_n}{p - a_n}$$

où A_1, A_2, \dots, A_n sont des nombres inconnus. La transformée inverse est

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = A_1 e^{a_1 t} + A_2 e^{a_2 t} + \dots + A_n e^{a_n t}$$

b) $D(p)$ est un quadratique à double racine

Exemple:

$$Y(p) = \frac{p + 1}{(p + 2)^2}$$

Le dénominateur a une racine double -2. La décomposition appropriée dans ce cas est

$$Y(p) = \frac{p + 1}{(p + 2)^2} = \frac{A}{p + 2} + \frac{B}{(p + 2)^2}$$

$A = 1$ et $B = -2$.

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = Ae^{-2t} + Bte^{-2t}$$

c) $D(p)$ est un quadratique et a des racines conjuguées complexes

Les racines du dénominateur sont $-2 \pm i$. Nous pouvons compléter le carré du dénominateur. On a

$$p^2 + 4p + 5 = p^2 + 4p + 4 + 1 = (p + 2)^2 + 1$$

Nous avons

$$Y(p) = \frac{3p + 9}{(p + 2)^2 + 1}$$

$$\frac{3p + 9}{(p + 2)^2 + 1} = \frac{A(p + 2) + B}{(p + 2)^2 + 1}$$

$$\frac{3p + 9}{(p + 2)^2 + 1} = A \frac{p + 2}{(p + 2)^2 + 1} + B \frac{1}{(p + 2)^2 + 1}$$

La transformée inverse est

$$y(t) = L^{-1}[Y(p)] = Ae^{-2t} \cos t + Be^{-2t} \sin t$$

Nous pouvons déterminer A et B en égalant les numérateurs dans l'expression

$$\frac{3p + 9}{(p + 2)^2 + 1} = \frac{A(p + 2) + B}{(p + 2)^2 + 1} = \frac{Ap + 2A + B}{(p + 2)^2 + 1}$$

A = 3 et B = 3

d) D(p) est de degré 3 et a 1 racine réelle et 2 racines conjuguées complexes

Exemple :

$$Y(p) = \frac{p^2 + 9p + 3}{(p - 1)(p^2 + 4p + 5)}$$

Les racines du dénominateur sont 1 et -2 +/- i. Dans ce cas, nous recherchons une décomposition de la forme:

$$\frac{p^2 + 9p + 3}{(p - 1)(p^2 + 4p + 5)} = \frac{A}{p - 1} + \frac{Bp - C}{p^2 + 4p + 5}$$

Où A, B et C sont des inconnues. La transformée inverse de A / (s-1) est Ae^t. Une fois B et C déterminés, le deuxième terme peut être manipulé comme dans l'exemple précédent.

III.4.2 Résolution des équations différentielles

La résolution des équations différentielle est basée sur l'utilisation la propriété de la transformée de Laplace de la dérivée et l'utilisation des propriétés de la transformée de Laplace inverse.

Exemple:

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y''(t) - 2y'(t) + 4y(t) = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

b) $y''(t) + y(t) = t$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$

Solution

a) $y''(t) - 2y'(t) + 4y(t) = 0$

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) - 2pY(p) + 2y(0) + 4Y(p) = 0$$

$$Y(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 4} = \frac{P}{(p-1)^2 + 3} = \frac{P-1+1}{(p-1)^2 + 3} = \frac{P-1}{(p-1)^2 + 3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sqrt{3}}{(p-1)^2 + 3}$$

En utilisant la table de la transformée de Laplace

On aura $y(t) = e^t \cos\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{3} e^t \sin\sqrt{3}t$

b) $y''(t) + y(t) = t$

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + Y(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$Y(p) = \frac{p^3 - p^2 + 1}{p^2(p^2 + 1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 1}$$

$$A = \left. \frac{d}{dp} \frac{(p^3 - p^2 + 1)}{p^2 + 1} \right|_{p=0} = 0$$

$$B = \left. \frac{(p^3 - p^2 + 1)}{p^2 + 1} \right|_{p=0} = 1$$

On a : $\frac{1}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1} = \frac{p^3-p^2+1}{p^2(p^2+1)}$

$$C = 1 \text{ et } D = -2 \rightarrow Y(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2 + 1} - 2 \frac{1}{p^2 + 1}$$

$$y(t) = t + \cos t - 2\sin t$$

Chapitre IV

Le produit de convolution

VI. La convolution

IV.1 Introduction

Un système est toujours décrit par la relation entrée/sortie évoluant dans le domaine temporel ou fréquentiel.

Une des méthodes d'analyse dans le domaine temporel permettant de relier tout signal de sortie (réponse du système) à un signal d'entrée (signal d'excitation du système) est basée sur la notion de *Convolution des signaux*[6].

IV .1. Convolution des Signaux

La convolution de deux fonctions (signaux) est un concept physique très important dans plusieurs domaines de la recherche scientifique. L'intégrale ou produit de convolution, notée * [9], est définie par :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau = h(t) * x(t) \quad (4.1)$$

IV .2.2. Propriétés de la Convolution

Le passage d'un signal à travers d'un système linéaire invariant est équivalent à une opération de convolution entre ce signal et la réponse impulsionnelle du système. Cette convolution possède les propriétés principales suivantes :

- *Commutativité* :

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \quad (4.2)$$

- *Associativité* :

$$[x_1(t) * h(t)] * x_2(t) = x_1(t) * [h(t) * x_2(t)] \quad (4.3)$$

]

- *Distributivité* : par rapport à l'addition

$$x(t) * [h(t) + k(t)] = x(t) * h(t) + x(t) * k(t) \quad (4.4)$$

- *Élément neutre de la convolution*

L'élément neutre de l'opération de convolution est le signal impulsion ou pic de Dirac

$$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = x(t) \quad (4.5)$$

- Si l'un des signaux est causal (=0 pour $t < 0$) alors l'expression de la convolution est :

$$y(t) = \int_0^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad (4.6)$$

- **Changement d'échelle**

$$\text{si } x(t) * h(t) = y(t) \text{ alors } x(at) * h(at) = \frac{1}{|a|} y(at)$$

- **Differentiation de la sortie**

$$\text{si } y(t) = x(t) * h(t) \text{ alors } \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} * h(t)$$

$$\text{Ou bien } \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dh(t)}{dt} * x(t)$$

IV .2.3.Méthode graphique pour le produit de convolution

Soient de signaux continus $x(t)$ et $h(t)$

Étapes de la convolution graphique

- 1- tracer le signal $x(\tau)$ en changeant la variable indépendante de t à τ et gardez le signal $x(\tau)$ fixe pendant la convolution.
- 2- tracer la réponse impulsionnelle $h(\tau)$ en changeant la variable indépendante de t à τ .
- 3- Réfléchissons $h(\tau)$ autour de l'axe vertical pour obtenir la réponse impulsionnelle inversée dans le temps $h(-\tau)$.

4- Décaler la fonction d'impulsion inversée dans le temps $h(-\tau)$ d'une valeur sélectionnée de « t ». La fonction résultante représente $h(t - \tau)$.

5- Multipliez la fonction $x(\tau)$ par $h(t - \tau)$ et tracez la fonction produit $x(\tau)h(t - \tau)$.

6- Calculer l'aire totale sous la fonction produit $x(\tau)h(t - \tau)$ en l'intégrant sur $\tau = [-\infty, \infty]$.

7- Répétez les étapes 4–6 pour différentes valeurs de t pour obtenir $y(t)$ pour tout le temps, $-\infty \leq t \leq \infty$.

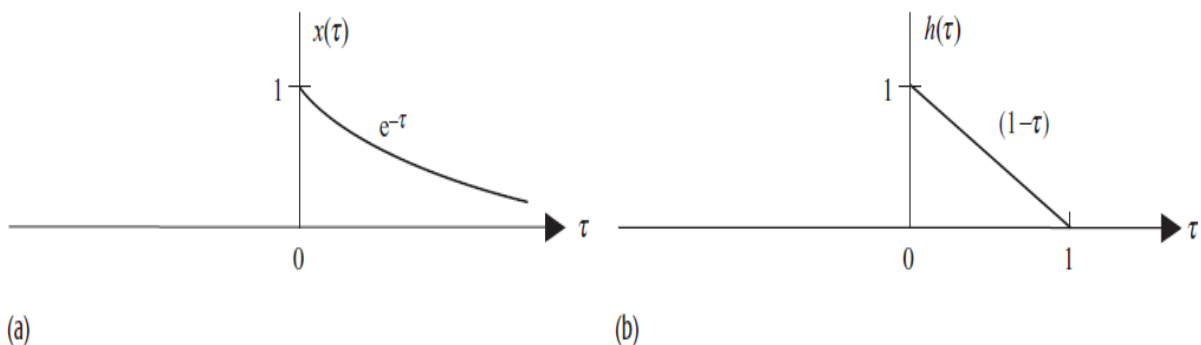
Exemple

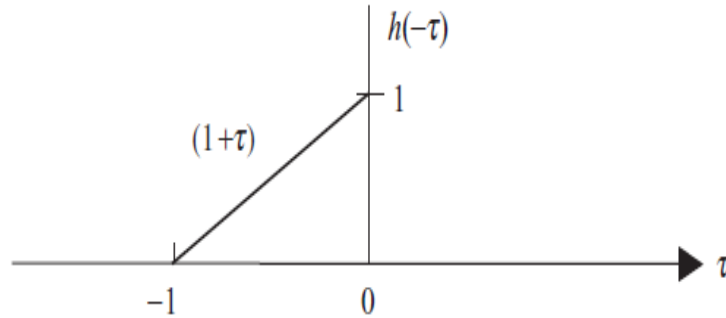
Le signal d'entrée $x(t) = e^{-t}$ est appliqué à un système linéaire invariant dont la réponse impulsionnelle est donnée par

$$h(t) = \begin{cases} 1 - t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Calculez la sortie du système ?

Afin de calculer la sortie du système, nous devons calculer l'intégrale de convolution pour les deux fonctions $x(t)$ et $h(t)$. Les fonctions $x(\tau)$, $h(\tau)$ et $h(-\tau)$ sont tracées en fonction de la variable τ dans les trois sous-tracés supérieurs de la figure 4-1 (a) - (c). La fonction $h(t - \tau)$ est obtenue en décalant la fonction réfléchiée dans le temps $h(-\tau)$ de t . Selon la valeur de t , trois cas particuliers peuvent se présenter.





(c)

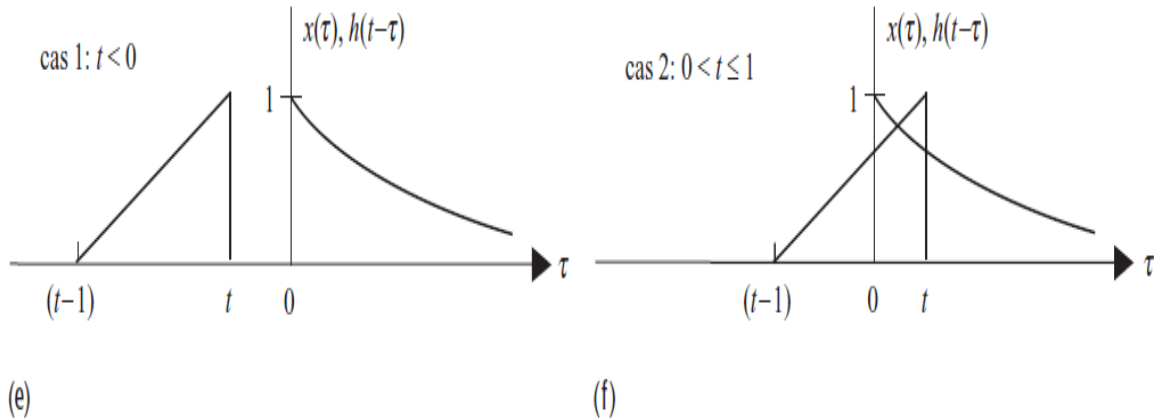
Cas 1 : Pour $t < 0$, nous voyons sur la figure 4.2 (e) que les parties non nulles de $h(t - \tau)$ et $x(\tau)$ ne se chevauchent pas. En d'autres termes, la sortie $y(t) = 0$ pour $t < 0$.

Cas 2 : Pour $0 \leq t \leq 1$, nous voyons sur la figure 4.2 (f) que les parties non nulles de $h(t - \tau)$ et $x(\tau)$ se chevauchent sur la durée $\tau = [0, t]$. Donc,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = \int_{t-1}^t e^{-\tau} (1 - t + \tau) d\tau = (1 - t) \int_0^t e^{-\tau} d\tau + \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau \\ &= (1 - t)(1 - e^{-t}) + 1 - e^{-t} - te^{-t} \end{aligned}$$

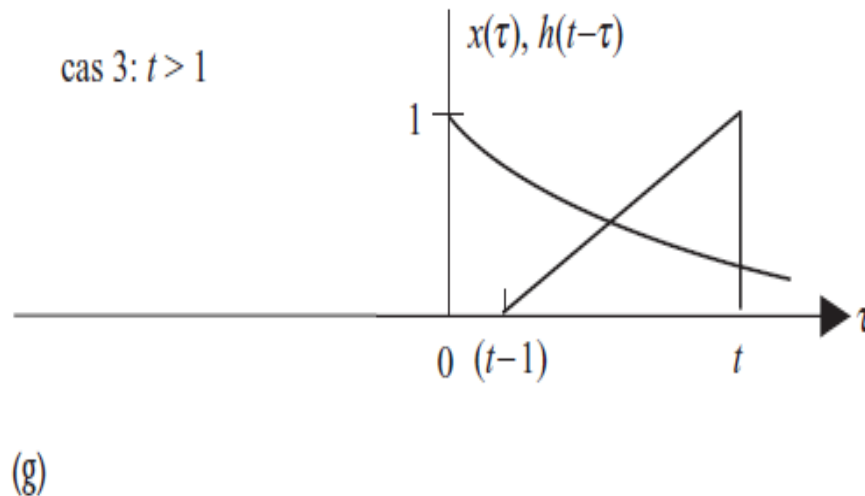
Pour $0 \leq t \leq 1$, la sortie $y(t)$ est donnée par

$$y(t) = (1 - t - e^{-t} + te^{-t}) + (1 - e^{-t} - te^{-t}) = (2 - t - 2e^{-t}).$$



Cas 3 : Pour $t > 1$, nous voyons sur la figure 5.1 (g) que la partie non nulle de $h(t - \tau)$ chevauche complètement $x(\tau)$ sur la région $\tau = [t - 1, t]$. La limite inférieure de la région de chevauchement dans le cas 3 est différente de la limite inférieure de la région de chevauchement dans le cas 2; par conséquent, le cas 3 donne une intégrale de convolution différente et est considéré séparément du cas 2.

La sortie $y(t)$ pour le cas 3 est donnée par



$$y(t) = \int_0^t x(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau = \int_{t-1}^t e^{-\tau} (1-t+\tau) d\tau = (1-t) \int_{t-1}^t e^{-\tau} d\tau + \int_{t-1}^t \tau e^{-\tau} d\tau = (1-t)(e^{-(t-1)} - e^{-t}) + te^{-(t-1)} - te^{-t} - e^{-t}$$

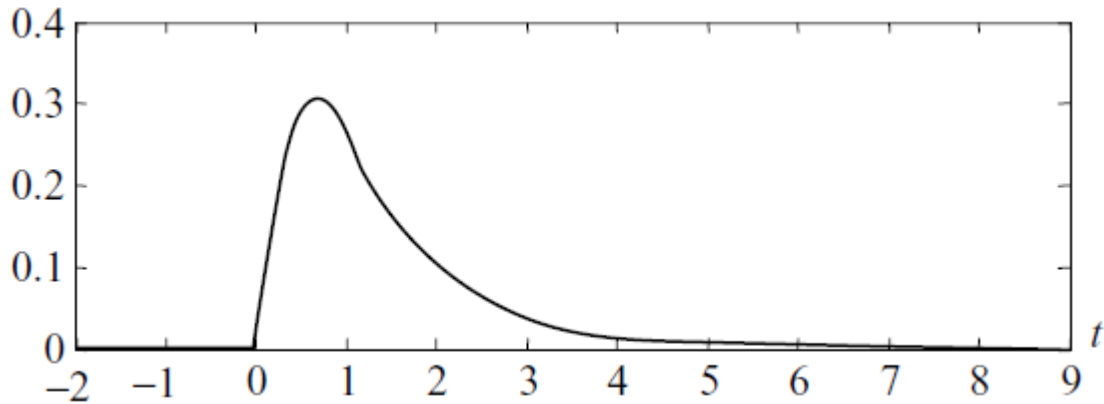
Pour $t > 1$, la sortie $y(t)$ est donnée par

$$y(t) = e^{-(t-1)} - 2e^{-t}$$

En combinant les trois cas ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2 - t - 2e^{-t} & 0 \leq t \leq 1 \\ e^{-(t-1)} - 2e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

qui est tracé sur la figure 5.2.



Chapitre V

Corrélation des signaux

V. Corrélation des signaux

V.1. Définition

En traitement de signal, il est souvent nécessaire de comparer deux signaux. Ceci peut se faire de plusieurs manières. Une méthode possible, dont on fait grand usage, et de déclarer l'un des signaux par rapport à l'autre, et de mesurer leur similitude en fonction du décalage.

a) Fonction d'inter-corrélation

Remplacée parfois par corrélation mutuelle ou corrélation croisée (en anglais : Cross corrélation) consiste à comparer deux fonctions différentes $X(t)$ et $Y(t)$ dont l'une est décalée d'une certaine valeur τ .

$$R_{xy}(\tau) = \langle x^* \cdot y_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \cdot y(t + \tau) dt \quad (5.1)$$

$x^*(t)$ le conjugué de $x(t)$

Si nous avons deux signaux réels le produit sera

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y(t + \tau) dt \quad (5.2)$$

b) Fonction d'auto-corrélation

Elle consiste à comparer une fonction $x(t)$ avec elle-même, durant un intervalle de temps, dont l'une est décalée d'une certaine valeur τ .

$$R_x(\tau) = \langle x^* \cdot x_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \cdot x(t + \tau) dt \quad (5.3)$$

c) Relation entre énergie et fonction d'autocréation :

La valeur à l'origine d'une fonction d'auto-corrélation représente l'énergie du signal :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) \cdot x(t) dt = R_x(0) \quad (5.4)$$

d) Fonction d'inter-corrélation dans le cas des signaux à puissance moyenne finie :

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) \cdot y(t + \tau) dt \quad (5.5)$$

e) Fonction d'auto-corrélation dans le cas des signaux à puissance moyenne finie :

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) \cdot x(t + \tau) dt \quad (5.6)$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^*(t) \cdot x(t) dt = R_x(0) \quad (5.7)$$

V.2. Propriétés de la corrélation

a) La symétrie :

Si les signaux sont complexes

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau) \quad (5.8)$$

Dans le cas où les signaux sont réels

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \quad (5.9)$$

Remarque : pour une fonction d'autocorrélation, on peut dire que pour un signal réel

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

Cela veut dire que la fonction d'autocorrélation $R_x(\tau)$ est une fonction réelle paire.

b) La périodicité :

Si un signal $x(t)$ est périodique d'une période T alors $R_x(\tau)$ est aussi périodique de la même période.

$$x(t) = x(t + kT) \rightarrow R_x(\tau) = R_x(\tau + kT) \quad (5.10)$$

c) Additivité :

$$z(t) = x(t) + y(t) \rightarrow R_z(\tau) \quad (5.11)$$

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) \quad (5.12)$$

Cas particulier :

Si $x(t)$ et $y(t)$ sont indépendants (il n'y'a aucune ressemblance entre les deux)

$$\Rightarrow R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = 0 \quad (5.13)$$

$$\Rightarrow R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) \quad (5.14)$$

Chapitre VI

Echantillonnage et Signaux discrets

VI. Echantillonnage et systèmes discrets

VI.1. Introduction

Comme il a été déjà mentionné dans le premier chapitre que les signaux sont des grandeurs physiques, ils sont par nature analogiques (tension, intensité de courant, vitesse...), de l'autre côté les machines de traitement d'information telles que les ordinateurs travaillent en numérique.

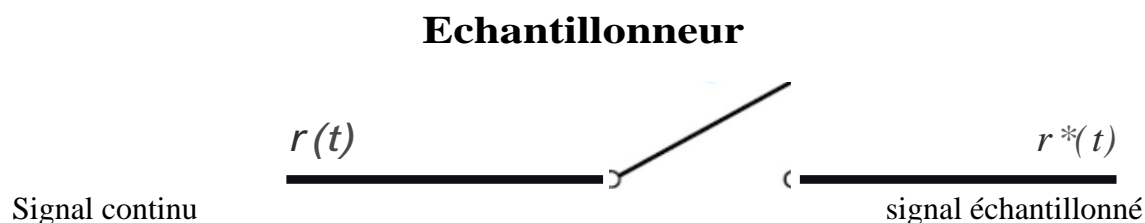
Dès qu'il est nécessaire que le traitement du signal par un outil numérique nécessitera le prélèvement de l'information sous forme ponctuelle, une telle opération est appelée échantillonnage [10].

L'opération d'échantillonnage consiste à représenter un signal analogique continu $s(t)$ par un ensemble de valeurs $s(nT_e)$ avec n un entier situés à des instants discrets T_e constantes appelées période d'échantillonnage. Ces échantillons à intervalles de temps réguliers, sont le résultat de la discrétisation de l'axe des abscisses. On peut dire donc que l'opération d'échantillonnage consiste à découper le signal analogique en petites tranches temporelles.

- Il est à noter que plus l'échantillonnage le traitement numérique du signal doit passer par la quantification et le codage.

VI.2. Système échantillonné

Un système échantillonné est un système à évolution continue pour lequel la prise et la transmission d'information s'effectuent à des instants discrets (T_e) du temps appelés « période d'échantillonnage ou pas d'échantillonnage ». Le système qui réalise cette fonction est un échantillonneur ; tout système numérique dispose d'un échantillonneur [12].



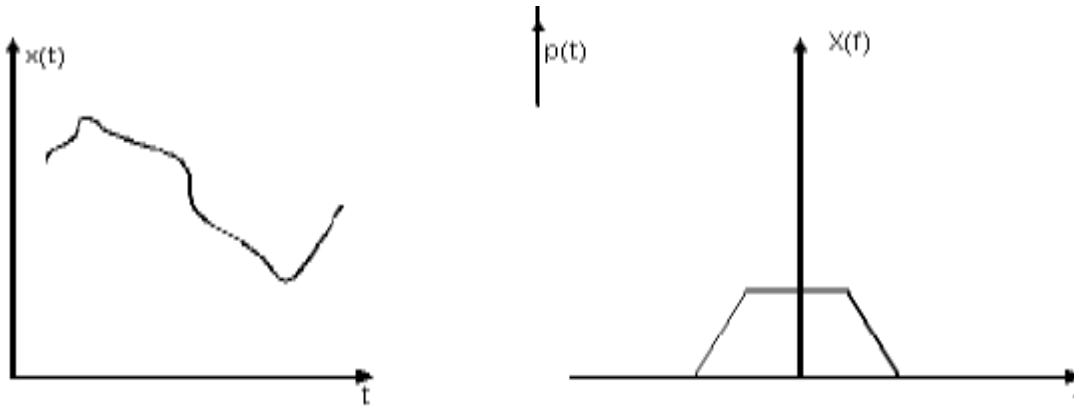


Fig.6.1 échantillonnage d'un signal continu

VIII.3. Echantillonnage réel

D'une manière pratique, on ne peut pas obtenir des impulsions de durée quasiment nulle. La modélisation de l'échantillonnage par un peigne de Dirac est donc erronée (échantillonnage idéal). En fait, chaque impulsion va avoir une durée très courte τ (largeur de l'impulsion). L'échantillonnage réel d'un signal $s(t)$ est donc obtenu en multipliant $s(t)$ par une fonction d'échantillonnage $e(t)$. [10]

$$s_{er}(t) = s(t)e(t) \quad (6.1)$$

$$\text{avec } e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left[\frac{t - nT_e}{\tau}\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_n(t) \quad (6.2)$$

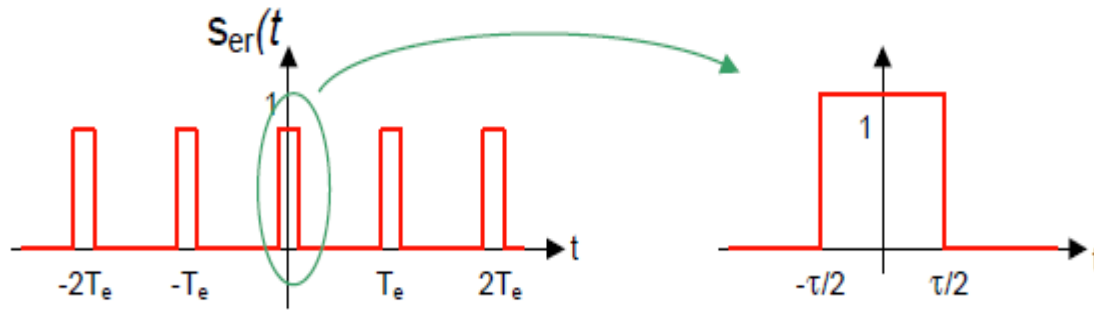


Fig.6.2 échantillonnage réel

VI.3.1 La transformée de Fourier

On a $S_{er}(f) = F[s_{er}(t)]$ et (6.3)

$$s_{er}(t) = s(t)e(t)$$

$$\text{d'où } S_{er}(f) = S(f) * E(f) \quad (6.4)$$

Après calcul

$$S_{er}(f) = \tau f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(n\tau f_e) S(f - n f_e) \quad (6.5)$$

$$f_e = \frac{1}{T_e} \quad (6.6)$$

Le spectre de fréquence de $s_{er}(t)$ est la répétition du spectre de $s(t)$ à la période f_e , modulé en amplitude pour chaque réplique par un facteur ne dépendant que de n et non de f , il n'y a donc pas de distorsion de la forme du spectre.

VI.4. Echantillonnage idéalisé

Le processus d'un échantillonnage idéal revient à multiplier le signal analogique $s(t)$ par une série d'impulsion unité: le signal obtenu est alors constitué d'une succession d'impulsion, dont la hauteur est modulée par l'amplitude du signal échantillonné. Ce signal obtenu n'est qu'une suite d'impulsion de Dirac qui représente l'ouverture et la fermeture d'interrupteur [10].

$$s_e(t) = \sum_n \delta(t - nT_e) S(t) : \text{fonction d'échantillonnage.}$$

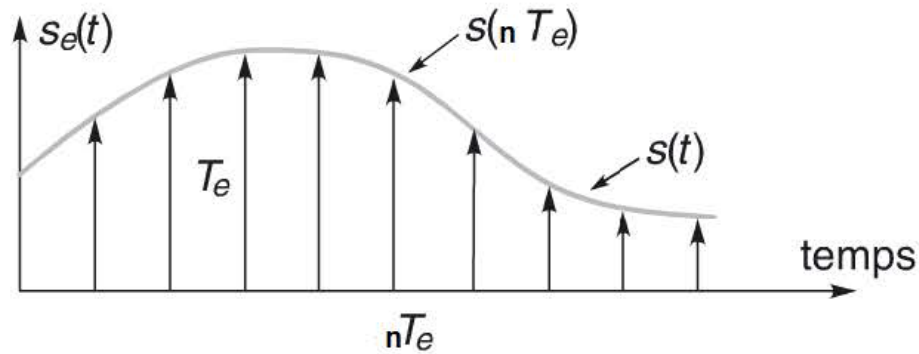


Fig.6.3 échantillonnage idéal

$$s_e(t) = s(t) \odot \sum_n \delta(t - nT_e) = \sum_n s(nT_e) \delta(t - nT_e) \quad (6.7)$$

Echantillonnage idéal est caractérisé par une suite d'impulsions de Dirac périodique (T_e échantillonnage régulier) dont l'air de chaque impulsion est égal à l'amplitude du signal analogique $s(t)$ à l'instant d'échantillonnage.

VI.4.1. La transformée de Fourier

$$S_e(f) = F[s_e(t)] \quad (6.8)$$

$$S_e(f) = f_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f - nf_e) \quad (6.9)$$

Le spectre de fréquence de $s(t)$ est répétition du spectre de $x(t)$, à la période f_e , modulé en amplitude par le facteur constant f_e

VI.5. Théorème de Shannon

Le théorème d'échantillonnage extrêmement utile, également connu sous le nom de théorème de Nyquist, ou théorème de Shannon, donne une condition suffisante pour récupérer un signal en temps continu à partir de ses échantillons $s(nT)$ [11].

VI.5.1 Théorème d'échantillonnage :

Soit $s(t)$ un signal à bande limitée dans un intervalle $[-f_{max}, +f_{max}]$ peut être reconstruit exactement à partir de ses échantillons si $f_e \geq 2f_{max}$

La fréquence limite $\frac{f_e}{2}$ est appelée *fréquence de Nyquist*

VI.5.2 Exemples d'échantillonneurs

Le signal échantillonné réel est constitué d'impulsions distantes de T_e et de largeur τ l'amplitude de ces impulsions sera fonction du procédé d'échantillonnage utilisé :

a) Echantillonneur Bloqueur ou Régulier

L'amplitude d'un échantillon de $x(t)$ pendant une durée τ est égale à $x(nT_e)$

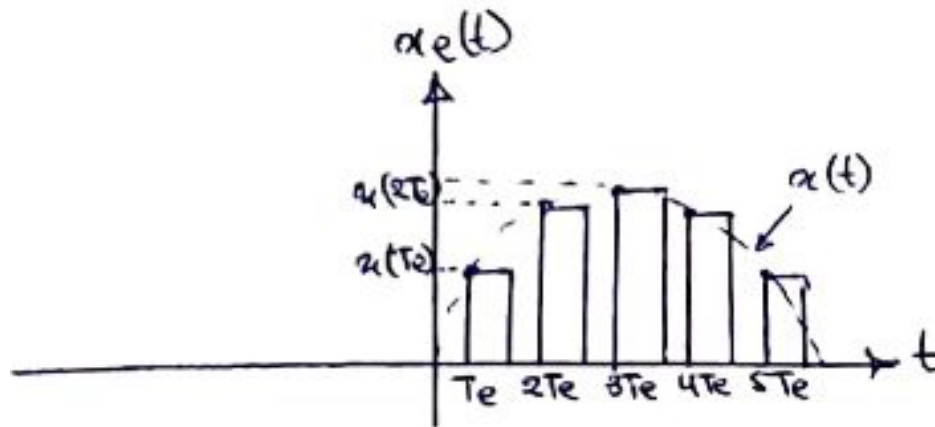


Fig.6.4 échantillonneur bloqueur

$$x_e(t) = [x(t) \cdot \text{III}_{T_e}(t)] * \text{rect}_\tau(t) \quad (6.10)$$

b) Echantillonneur Moyennneur

Consiste à utiliser des impulsions de largeur finies τ et ensuite considérer la valeur moyenne de $x(t)$ pendant la durée τ de l'impulsion.[5]

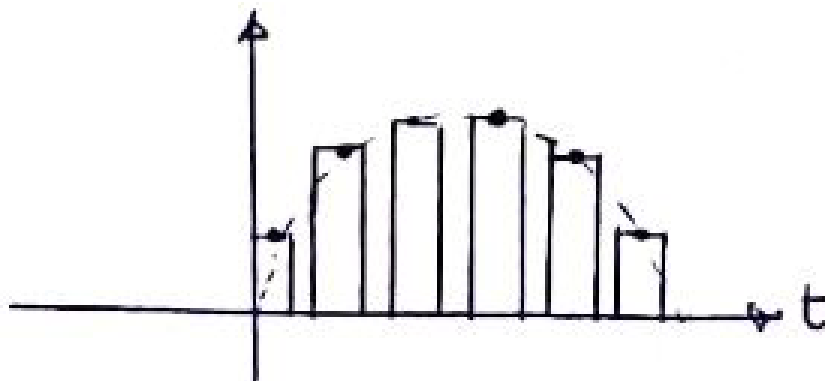


Fig.6.5 échantillonneur moyennneur

$$x_e(t) = \frac{1}{\tau} [x(t) * \text{rect}_\tau(t)] \cdot \text{III}_{T_e}(t) \quad (6.11)$$

Les échantillonneurs moyenneur et bloqueur sont très proche de l'échantillonnage idéal, parce que la durée de l'impulsion d'échantillonnage est très petite relativement à la période du signal à échantillonné.

VI.6. La transformée en Z

VI.6.1. Introduction :

La transformée en Z est utilisée pour simplifier les opérations des équations de différence. Elle est utilisée comme un outil dans l'analyse et la conception des systèmes échantillonnés discrets, elle permet de simplifier la solution d'un problème de système discret par la conversion des équations de différence d'un système en équation algébriques et la convolution en une multiplication.

Considérons le signal analogique $x(t)$, nul pour $t < 0$, et le signal discret issu de $x(t)$ par échantillonnage à la période T_e , $s(kT_e)$.

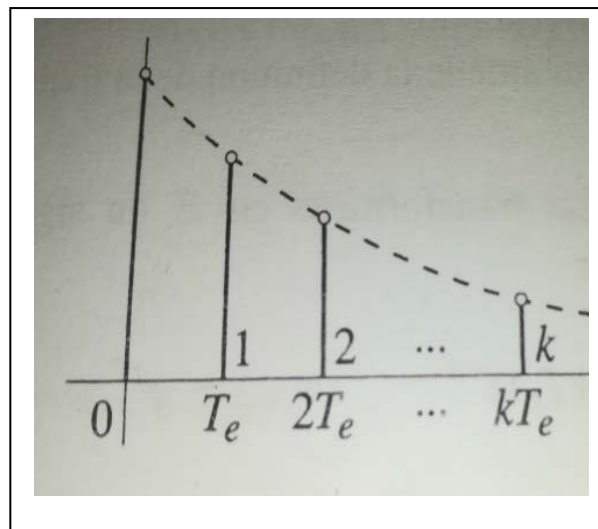


Fig.6.6 signal échantillonné $s(t)$

La transformée de Laplace ne peut s'appliquer aux signaux discrets, chaque signal élémentaire étant de durée nulle.

$$L[s(t)] = \int_0^{+\infty} s(t)e^{-pt} dt \quad (6.12)$$

La transformée en z est un outil mathématique destiné à remplir le même travail que la transformée de Laplace, pour les signaux discrets

VI.6.2 Définition

soit l'échantillonnage $s_e(t)$ de $s(t)$ à la période T_e , par des impulsions de durée τ très faible ; nous pourrions considérer $s_e(t)$ comme constant sur la durée des impulsions

$$s_e(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k(t) \quad (6.13)$$

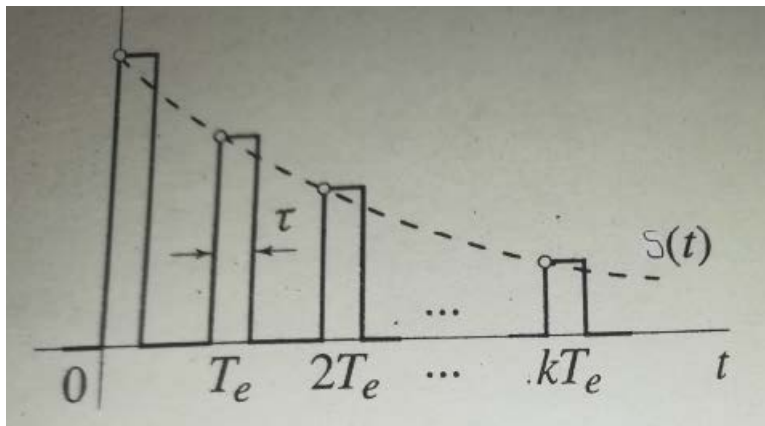


Fig.6.7 échantillonnage d'un signal continu à une période T_e

La transformée en Z du signal $s(t)$ échantillonné à la période T_e est donnée par

$$Z[s(kT_e)] = S(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(kT_e)z^{-k} \quad \text{avec } z = e^{pT_e} \quad (6.14)$$

❖ Conditions d'existence

Le signal $s(kT_e)$ a une transformée en Z s'il existe z tel que la série complexe $S(z)$ soit convergente ; ce sera le cas pour les signaux réellement rencontrés.

VI.6.3 Transformées en Z des signaux particuliers

❖ Echantillon unité $d(k)$

$$d(0) = 1 \text{ pour } n > 0 \text{ d'ou } Z[d(k)] = d(0)z^{-0} = 1$$

$$Z[d(k)] = 1$$

❖ Echelon unité $U(k)$

$$Z[U(k)] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-k} + \dots$$

Est une série géométrique de raison z^{-1} ; d'où :

$$Z[U(k)] = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

❖ Signal rectangulaire $rect_k(k)$

$$Z[rect_k(k)] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-(k-1)}$$

$$Z[rect_k(k)] = \frac{1 - z^{-k}}{1 - z^{-1}}$$

❖ Signal exponentiel $a^{kT_e}U(k)$ ($a \in \mathbb{C}$)

$$Z[a^{kT_e}U(k)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a^{T_e}}{z}\right)^k$$

La transformée existe pour $|z| > |a^{T_e}|$. On a alors

$$\mathcal{Z}[a^{kT_e} U(k)] = \frac{1}{1 - a^{T_e} z^{-1}} = \frac{z}{z - a^{T_e}}$$

$$\mathcal{Z}[e^{-\alpha k T_e} U(k)] = \frac{1}{1 - e^{-\alpha T_e} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha T_e}} \quad \text{avec } \alpha \in \mathcal{C}$$

f(t) (échantillonnée)	F(z)	Intervalle de convergence
U(t)	$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
δ_{n-k}	z^{-k}	$ z > 1$
t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
t ²	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$	$ z > 1$
ε^{at}	$\frac{z}{z - \varepsilon^{aT}}$	$ z > \varepsilon^{aT}$
sin(βt)	$\frac{z * \sin(\beta T)}{z^2 - 2z * \cos(\beta T) + 1}$	$ z > 1$
cos(βt)	$\frac{z * [z - \cos(\beta T)]}{z^2 - 2z * \cos(\beta T) + 1}$	$ z > 1$

Tableau VI.1 la transformée en Z de quelques signaux

VI.6.4 Propriétés de la transformée en Z

La transformée en Z a des propriétés analogues à ceux de la transformée de Laplace. Le tableau ci-dessous évoque certaines propriétés les plus utilisées.

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

ou c est un contour fermé qui inclu z=0

	Signal		Transform en Z
	$x[n]$	\Leftrightarrow	$X(z)$
Superposition	$ax[n] + by[n]$	\Leftrightarrow	$aX(z) + bY(z)$
Translation temporelle	$x[n - n_0]$	\Leftrightarrow	$z^{-n_0} X(z)$
	$e^{j\Omega_0 n} x[n]$	\Leftrightarrow	$X(e^{-j\Omega_0} z)$
	$z_0^n x[n]$	\Leftrightarrow	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$
	$a^n x[n]$	\Leftrightarrow	$X(a^{-1} z)$
Inversion du temps	$x[-n]$	\Leftrightarrow	$X(z^{-1})$
Convolution du temps	$x[n] * y[n]$	(convolution)	$X(z)Y(z)$
Multiplication par n	$n x[n]$	\Leftrightarrow	$-z \frac{dX(z)}{dz}$
Somme	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	\Leftrightarrow	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$

Tableau VI.2 quelques propriétés de la transformée en Z

- Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{k \rightarrow 0} x(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

- Théorème de la valeur finale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) X(z)$$

VI.6.4 transformée en Z inverse

Nous admettons son existence ainsi que son unicité.

- Dans les cas simples, il suffit d'utiliser la table des transformées en Z
Exemple :

$$X(z) = 3z^{-1} + 5z^{-3} + 2z^4$$

$$x[n] = \{0, 3, 0, 5, 2\}$$

- La division : c'est la division suivant les puissances de z dans l'ordre croissant
- La décomposition en fractions rationnelles : comme l'on a déjà vu dans le cours de la transformée de Laplace inverse, cette méthode consiste à décomposer X(z) en fraction élémentaires puis on cherche leur transformée inverse en Z dans la table

Exemple :

Soit

$$X(z) = \frac{z + 1}{z^2 + 0.3z + 0.02}$$

Divisons par z

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z + 1}{z(z^2 + 0.3z + 0.02)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z + 0.1} + \frac{C}{z + 0.2}$$

$$A = z \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=0} = 50$$

$$B = (z + 0.1) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=-0.1} = -90$$

$$A = (z + 0.2) \frac{X(z)}{z} \Big|_{z=-0.2} = 40$$

On aura donc: $X(z) = \frac{50z}{z} - \frac{90z}{z+0.1} + \frac{40z}{z+0.2}$

On se referons à la table

$$x(n) = \begin{cases} 50\delta(n) - 90(-0.1)^n + 40(-0.2)^n \\ 0 & ; n \leq 0 \end{cases}$$

A savoir que $x(0)=50-90+40=0$

Bibliographie

- [1] M. Benidir. Théorie et Traitement du signal, tome 1 : Représentation des signaux et des systèmes - Cours et exercices corrigés. Dunod, 2004.
- [2] F. de Coulon. Théorie et Traitement des Signaux. Dunod Université, 1988.
- [3] Auvray. Traitement du Signal. Bordas, 1979. Disponible sur le web en format PDF.
- [4] F. Tahri, cours de théorie et traitement de signal. Ecole supérieure en génie électrique et énergétique Oran, 2018
- [5] R. ABDELLI , théorie du signal. Polycopie cours de deuxième année S.T. Département de Génie Electrique, Université Abderrahmane MIRA (Béjaia), 2017
- [6] G. Blanchet, M. Charbit. Digital Signal and Image Processing using MATLAB® Gérard HERMES Science Europe Ltd, 2001
- [7] E.W. Kamen and B.S. Heck. Fundamentals of Signals and Systems using the WEB and MATLAB.
- [8] A. Papoulis. Signal analysis. McGraw-Hill, 1977.
- [9] Ronald L. Allen, Duncan W. Mills SIGNAL ANALYSIS TIME, FREQUENCY, SCALE, AND STRUCTURE
- [10] J.P. DELMAS, Éléments de théorie du signal : les signaux déterministes, Ellipses, Paris, 1991
- [11] P. DUVAUT, Traitement du signal, concepts et applications, Hermès, Paris, 1991.
- [12] F. Chebbara , Cour de traitement de signal Pour 1ere année master instrumentation, Département d'Electronique et Des Télécommunications, Université Kasdi Merbah Ouargla

Annexe

Annexe

Quelques Relations mathématiques Utiles

$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$
$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$
$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$
$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
$2 \cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$
$2 \sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
$2 \cos(x) \cos(y) = \cos(x - y) + \cos(x + y)$
$2 \sin(x) \sin(y) = \cos(x - y) - \cos(x + y)$
$2 \sin(x) \cos(y) = \sin(x - y) + \sin(x + y)$

$\int \cos(x) dx$	$\sin(x)$
$\int \sin(x) dx$	$-\cos(x)$
$\int x \cos(x) dx$	$\cos(x) + x \sin(x)$
$\int x \sin(x) dx$	$\sin(x) - x \cos(x)$
$\int x^2 \cos(x) dx$	$2x \cos(x) + (x^2 - 2) \sin(x)$
$\int x^2 \sin(x) dx$	$2x \sin(x) - (x^2 - 2) \cos(x)$
$\int e^{ax} dx$	$\frac{e^{ax}}{a}$
$\int x e^{ax} dx$	$e^{ax} \left[\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right]$
$\int x^2 e^{ax} dx$	$e^{ax} \left[\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right]$
$\int \frac{dx}{\alpha + \beta x}$	$\frac{1}{\beta} \ln \alpha + \beta x $
$\int \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2}$	$\frac{1}{\alpha\beta} \tan^{-1}\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)$