Chapitre 1
Généralités sur les systèmes asservis

1. Introduction

L'automatique est une discipline scientifique qui vise à attribuer des propriétés souhaitées, à un dispositif donné, sans l'intervention de l'être humain. Pour ce fait, cette discipline passe par trois phases : une phase de modélisation (consiste à attribuer un modèle au comportement de ce dispositif), une phase d'analyse (permet de mieux comprendre ce comportement) et enfin une phase de commande (agir sur ce dispositif afin d'améliorer ses propriétés.

L'objet d'application de l'automatique est appelé système. Ce dernier doit être un objet qui bouge, qui se transforme ou qui fonctionne.

2. Notion de système asservi

Un système peut être défini comme un ensemble d'éléments exerçant collectivement une fonction déterminée. Il est caractérisé par ses grandeurs d'entrée et de sortie.

Un système est dit **asservi** lorsqu'une grandeur de sortie suit la grandeur d'entrée (consigne) quelque soient les effets perturbateurs extérieurs.

- Lorsque la consigne d'un système asservi est indépendante du temps, on parle de régulation.
- Lorsque la consigne d'un système asservi dépend du temps, on parle d'asservissement (poursuite).

Le système asservi le plus simple correspond au schéma de la figure *1.1*. On distingue le processus, un actionneur qui est l'organe fournissant la puissance à partir du signal de commande élaboré par le correcteur, et un comparateur qui compare la valeur de la variable de sortie du processus mesurée par un capteur à la valeur de la consigne.

Cette structure fait intervenir deux chaînes, une chaîne d'action et une chaîne de retour. Ce type de système est appelé aussi système bouclé ou système en boucle fermée (*BF*). Dans le cas contraire, il a aucune rétroaction de la sortie du système sur son entrée, On parle de système non bouclé ou système en boucle ouverte (*BO*). La boucle fermée est capable de :

- Stabiliser un système instable en *BO* ;
- Compenser les perturbations externes ;

- Compenser les incertitudes internes au processus lui-même.

La figure suivante présente le schéma fonctionnel d'un système asservi.

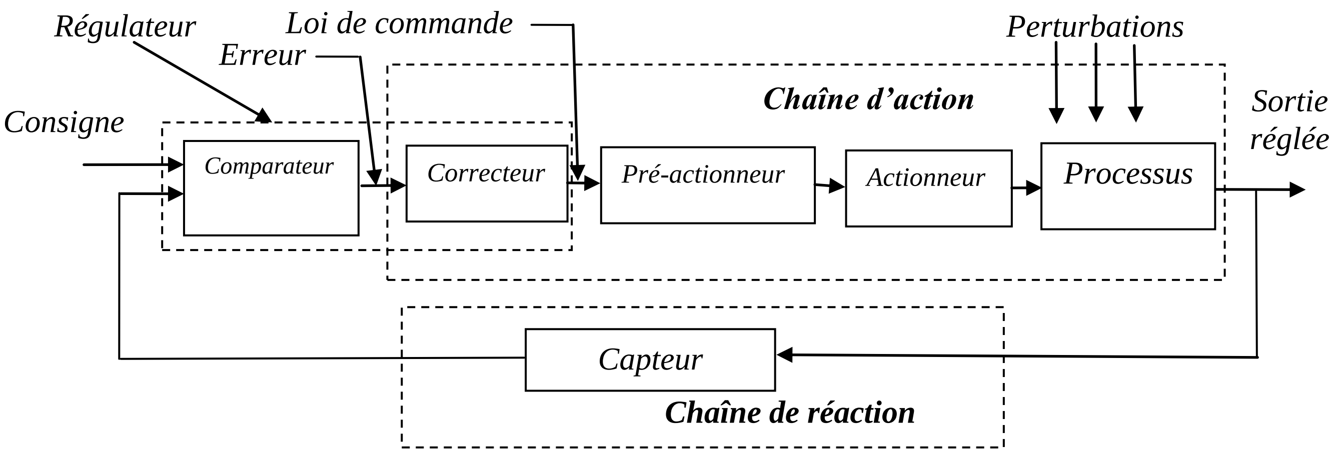


Figure 1.1 : *Schéma fonctionnel d'un système asservi*

Exemple : Conducteur d'une voiture

Le conducteur doit suivre la route, pour cela : il **observe** la route et son environnement et **évalue** la distance qui sépare son voiture du bord de la route. Il **détermine** en fonction du contexte l'angle qu'il doit donner au volant pour suivre la route. Il **agit** sur le volant (donc sur le système), puis il recommence son observation pendant toute la durée du déplacement. Si un coup de vent dévie la voiture, après avoir observé et mesuré l'écart, il agit pour s'opposer à cette perturbation.

3. Classification des systèmes

Dans la figure *1.2* on présente une classification des différents types des systèmes.

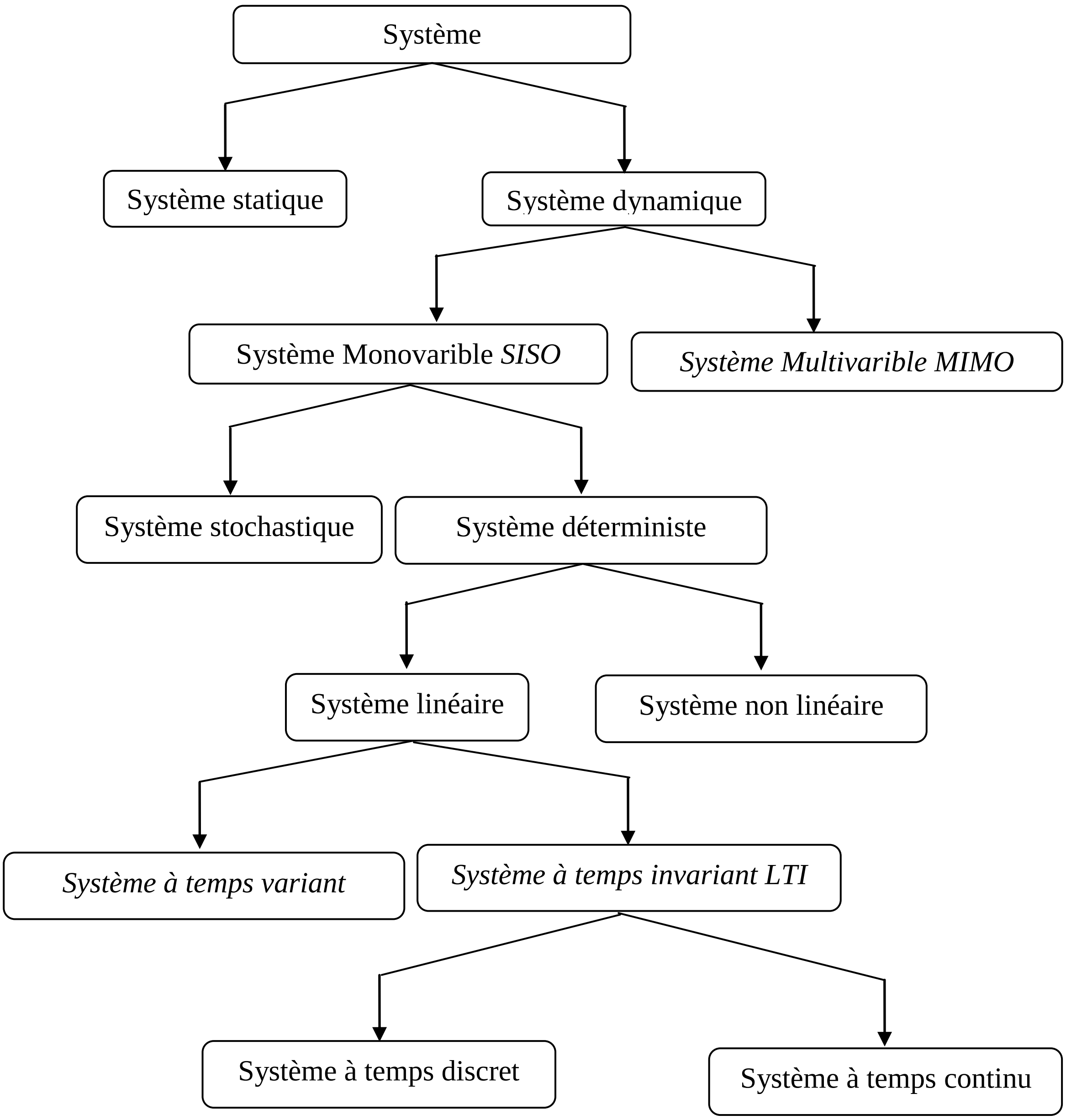
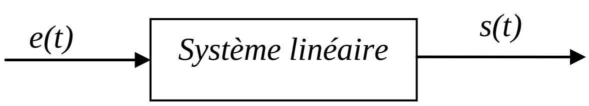


Figure 1.2 : *Classification des systèmes*

4. Définitions

4.1 Système linéaire

Un système est linéaire au sens mathématique si :



$$e_1(t) \Longrightarrow s_1(t)$$

$$e_2(t) \Longrightarrow s_2(t)$$

$$e_1(t)+e_2(t) \Longrightarrow s_1(t)+s_2(t)$$

$$\lambda e_1(t) \Longrightarrow \lambda s_1(t)$$

Un système est linéaire au sens physique s'il est décrit par une équation différentielle à coefficients constants.

4.2 Système à temps continu

Un système est continu s'il met en jeu des signaux continus qui ont les mêmes propriétés qu'une fonction continue.

4.3 Système à temps discret

Un système discret est un ensemble qui introduit une relation entre des variables d'entrée et des variables de sortie, dans lequel ces variables ne peuvent avoir qu'un nombre fini de valeurs.

4.4 Système linéaire à Temps Invariant *LTI*

Un système à temps invariant a un modèle identique à tout instant (un retard τ ne change pas la loi du modèle).

$$e(t) \Longrightarrow s(t)$$

$$e(t-\tau) \Longrightarrow s(t-\tau)$$

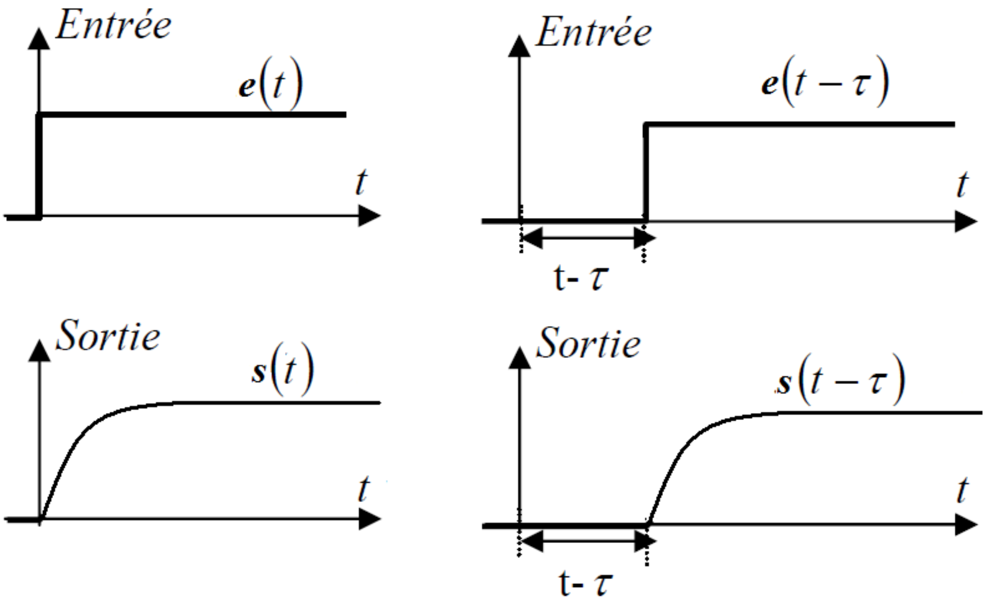


Figure 1.3 : *Comportement d'un système LTI*

4.5 Système déterministe

Un système déterministe résulte d'un système dont la réaction à une impulsion donnée est, à n'importe quel moment, déterminée de façon unique. C'est-à-dire qu'à une « condition initiale » donnée à l'instant « présent » va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état « futur » possible.

4.6 Système causal

Un système est causal si à un instant t_0, sa sortie ***s(t)*** ne dépend que des valeurs de son entrée ***e(t)*** pour $t \leq t_0$. D'autre part, un système causal ne répond pas sans être excité.

Chapitre *2*

Transformée de Laplace

1. Introduction

L'étude des systèmes physiques s'accompagne obligatoirement de manipulation des équations différentielles. Cependant, la résolution n'est pas toujours simple. Pour faciliter les calculs, on utilise un outil mathématique puissant c'est la transformée de Laplace.

2. Définition

Les processus étudiés seront caractérisés par des fonctions régies par des signaux continus. Soit une fonction $f(t)$ continue sur $\Re$ et supposée nulle pour $t<0$ (fonction causale). On appelle la transformée de Laplace de *f* la fonction *F* définie par :

$$F(p)=L[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

Avec ***p*** une variable complexe.

On note :

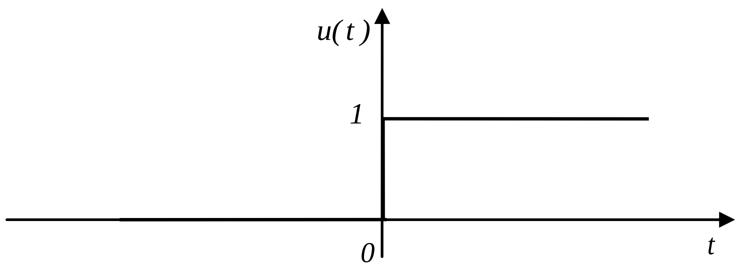
$$f(t)=L^{-1}[F(p)]$$

On appelle *F(p)* la transformée de Laplace de *f(t)* et *f(t)* est l'originale de *F(p)*.

3. Transformée de Laplace des signaux de base

3.1 Echelon unité

Ce signal est défini par : $u(t)=\begin{cases}1 & pour\ t\geq 0\\ 0 & pour\ t<0\end{cases}$

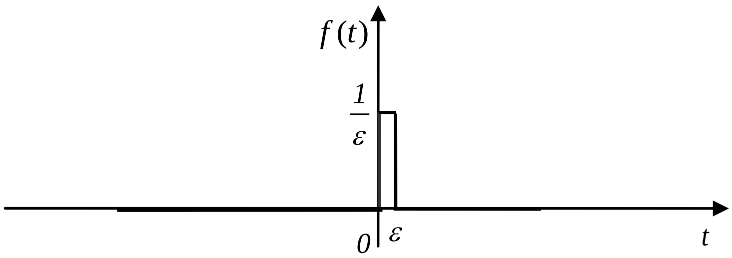


$$U(p)=L[u(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt=\frac{-1}{p}\left[e^{-pt}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{p}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{L[u(t)] = \frac{1}{p}}$.

3.2 Impulsion de Dirac

Soit la fonction $f(t)$ définie par : $f(t) = \begin{cases} 0 & pour \quad t < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & pour \quad 0 \le t \le \varepsilon \\ 0 & pour \quad t > \varepsilon \end{cases}$



$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} e^{-pt} dt = \frac{-1}{\varepsilon p}\left[e^{-pt}\right]_0^{\varepsilon} = \frac{-1}{\varepsilon p}(e^{-p\varepsilon} - 1)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

En faisant tendre ε vers zéro, $f(t)$ devient $\delta(t)$ et $F(p)$ tend vers 1.

D'où : $\boldsymbol{L[\delta(t)] = 1}$

3.3 Fonction puissance

Soit $r_n(t) = t^n u(t)$

$$\Rightarrow R_n(p) = L[r_n(t)] = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt.$$

On pose :

$$x(t) = t^n \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = n\,t^{n-1}$$

$$\dot{y}(t) = e^{-pt} \quad \Rightarrow y(t) = \frac{-1}{p}\, e^{-pt}$$

En utilisant l'intégration par partie, on trouve : $R_n(p) = \frac{-1}{p}\left[t^n e^{-pt}\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-pt} dt$

$$\Rightarrow R_n(p) = \frac{n}{p} R_{n-1}(p)$$

$$R_0(p) = L[u(t)] = \frac{1}{p}$$

$$R_1(p) = \frac{1}{p} R_0(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$R_2(p) = \frac{2}{p} R_1(p) = \frac{2}{p3}$$

$$R_3(p) = \frac{3}{p} R_2(p) = \frac{6}{p4}$$

D'où par récurrence :

$$\boldsymbol{R_n(p)=L\left[t^n u(t)\right]=\frac{n!}{p^{n+1}}}$$

3.4 Fonction exponentielle

Soit la fonction $f(t)=e^{-at}u(t)$ avec $a \in C$

$$F(p)=L[f(t)]=\int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-pt}dt=\frac{-1}{a+p}\left[e^{-(a+p)t}\right]_0^{+\infty}=\frac{-1}{a+p}(0-1)=\frac{1}{a+p}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{L\left[e^{-at}\,u(t)\right]=\frac{1}{a+p}}$$

3.5 Fonctions sinus et cosinus

Soit la fonction $f(t)=sin(\omega t)u(t)$, $g(t)=cos(\omega t)u(t)$ et $e^{j\omega t}=cos(\omega t)+\,j\,sin(\omega t)$

$$L\left[e^{j\omega t}\,u(t)\right]=\frac{1}{p-j\omega}=\frac{p+j\omega}{p^2+\omega^2}=\frac{p}{p^2+\omega^2}+j\,\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$
$$=L\left[cos(\omega t)u(t)\right]+jL\left[sin(\omega t)u(t)\right]$$

D'où $\boldsymbol{L\left[cos(\omega t)u(t)\right]=\frac{p}{p^2+\omega^2}}$ et $\boldsymbol{L\left[sin(\omega t)u(t)\right]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}}$.

4. Propriétés de transformés de Laplace

Soit $f(t)$, $g(t)\in\Re^+$, α, $\beta\in C$, $a\rangle 0$, $F(p)=L[f(t)]$ et $G(p)=L[g(t)]$.

Linéarité	$L[\alpha\, f(t)+\beta\, g(t)]=\alpha\, L[f(t)]+\beta\, L[g(t)]$
Unicité	$L[f(t)]=L[g(t)] \Leftrightarrow f(t)=g(t)$
Changement d'échelle de temps	$L[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$
Changement d'échelle de fréquence	$L^{-1}\left[F(\frac{p}{a})\right]=af(at)$

Translation dans le domaine temporel	$L\left[f(t-a)u(t-a)\right]=e^{-ap}F(p)$
Translation dans le domaine complexe	$L\left[e^{-at}f(t)\right]=F(p+a)$
Transformée de Laplace de la dérivée	$L\left[f^{(n)}(t)\right]=p^{n}F(p)-p^{n-1}f(0^{+})-p^{n-2}f^{(1)}(0^{+})-...-f^{(n-1)}(0^{+})$
Transformée de Laplace de l'intégrale	$L\left[\int_{0}^{t}f(t)dt\right]=\frac{1}{p}F(p)$
Théorème de la valeur initiale	$\lim_{t\to 0}f(t)=f(0^{+})=\lim_{p\to+\infty}pF(p)$
Théorème de la valeur finale	$\lim_{t\to+\infty}f(t)=f(+\infty)=\lim_{p\to 0}pF(p)$

Remarque

Si les conditions initiales sont nulles, alors :

- dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine de Laplace.
- intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine de Laplace.

5. Transformée de Laplace réciproque

$f(t)=L^{-1}\left[F(p)\right]$ est la fonction originale de $F(p)$, nous admettrons que si elle existe, elle est unique. Nous pourrons mettre la transformée sous forme de somme de transformées simples dont on connaît les originaux.

Soit $F(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$ avec $deg(N)\leq deg(D)$, en utilisant la décomposition en éléments simples, on trouve :

$$F(p)=\frac{A}{p+a}+\frac{B}{p+b}+...+\frac{E}{(p+c)^{2}}+...+\frac{Gp+S}{(p+d)^{2}+e^{2}}+...$$

Exemple

Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction $F(p)=\frac{p^{2}-3}{2p^{2}+p-1}$.

Solution

$$F(p)=\frac{p^2-3}{2p^2+p-1}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\frac{p}{2}+\frac{5}{2}}{p^2+\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}\right]$$

avec $\frac{\frac{p}{2}+\frac{5}{2}}{p^2+\frac{p}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p-0.5}=\frac{\left(\frac{-4}{3}\right)}{p+1}+\frac{\left(\frac{11}{6}\right)}{p-0.5}$

D'où $F(p)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\frac{1}{p+1}-\frac{11}{12}\frac{1}{p-0.5}$

On obtient alors :

$$f(t)=0.5\delta(t)+\left(\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{11}{12}e^{0.5t}\right)u(t)$$

6. Résolution d'équations différentielles à coefficients constants

6.1 Equation du premier ordre

Soit $y'+ay=f(t)$ avec $y(0^+)=y_0$

On a $L[y'+ay]=L[f(t)]\Rightarrow pY(p)-y_0+aY(p)=F(p)\Rightarrow(p+a)Y(p)=F(p)+y_0$

D'où $Y(p)=\frac{F(p)}{p+a}+\frac{y_0}{p+a}$ et $y(t)=L^{-1}[Y(p)]$

Exemple 1

Trouver $y(t)$ si $f(t)=u(t)$: échelon unité

Solution

$$f(t)=u(t)\Rightarrow F(p)=\frac{1}{p}$$

$$Y(p)=\frac{1}{p(p+a)}+\frac{y_0}{p+a}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+a}+\frac{y_0}{p+a}\Rightarrow Y(p)=\frac{(A+B)p+Aa}{p(p+a)}+\frac{y_0}{p+a}$$

Par identification, on trouve $\begin{cases}A=\frac{1}{a}\\B=\frac{-1}{a}\end{cases}\Rightarrow Y(p)=\frac{\frac{1}{a}}{p}+\frac{\frac{-1}{a}}{p+a}+\frac{y_0}{p+a}$

D'où $y(t)=\left[\frac{1}{a}+(y_0-\frac{1}{a})e^{-at}\right]u(t)$

Exemple 2

Trouver $y(t)$ si $f(t)=\delta(t)$: Impulsion de Dirac

Solution

$$f(t)=\delta(t) \;\Rightarrow F(p)=1$$

$$Y(p)=\frac{1}{p+a}+\frac{y_0}{p+a}=\frac{1+y_0}{p+a} \Rightarrow \; y(t)=\left[(1+y_0)e^{-at}\right]u(t)$$

6.2 Equation du second ordre

Soit $y''+ay'+by=f(t)$ avec $y(0^+)=y_0$ et $y'(0^+)=y_0'$

On a $L\left[y''+ay'+by\right]=L\left[f(t)\right]\Rightarrow$

$$p^2Y(p)-py_0-y_0'+apY(p)-ay_0+bY(p)=F(p)\Rightarrow$$
$$(p^2+ap+b)Y(p)=F(p)+py_0+ay_0+y_0'$$

D'où $Y(p)=\dfrac{F(p)}{p^2+ap+b}+\dfrac{(p+a)y_0+y_0'}{p^2+ap+b}$ et $y(t)=L^{-1}\left[Y(p)\right]$

Exemple 1

Trouver $y(t)$ si $f(t)=u(t)$, $y_0=1$, $y_0'=-1$, $a=2$ et $b=5$.

Solution

$$Y(p)=\frac{1}{p(p^2+2p+5)}+\frac{p+1}{p^2+2p+5}$$

$$\frac{1}{p(p^2+2p+5)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+5}=\frac{(A+B)p^2+(2A+C)p+5A}{p(p^2+2p+5)}$$

Par identification on trouve $\begin{cases} A=\dfrac{1}{5} \\ B=\dfrac{-1}{5} \\ C=\dfrac{-2}{5}\end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{p(p^2+2p+5)}=\dfrac{1}{5}\left[\dfrac{1}{p}-\dfrac{p+2}{p^2+2p+5}\right]$

$$Y(p)=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{p}+\frac{4p+3}{p^2+2p+5}\right]\Rightarrow Y(p)=\frac{1}{5}\left[\frac{1}{p}+\frac{4(p+1)}{(p+1)^2+4}-\frac{1}{(p+1)^2+4}\right]$$

D'où $y(t)=\dfrac{1}{5}\left[1+e^{-t}(4\cos(2t)-0.5\sin(2t))\right]u(t)$.

Exemple 2

Trouver $y(t)$ pour $f(t)=\delta(t)$, $y(0^+)=1$, $y'(0^+)=-1$, $a=2$ et $b=5$.

Solution

$$Y(p)=\frac{p+2}{p^2+2p+5} \Rightarrow Y(p)=\frac{p+1}{(p+1)^2+4}+\frac{1}{(p+1)^2+4}$$

D'où $y(t)=e^{-t}\left[\cos(2t)+0.5\sin(2t)\right]u(t)$.

Chapitre 3
Schémas fonctionnels

1. Introduction

Un système complexe peut comporter plusieurs sous-systèmes. Afin d'alléger la manipulation des différentes équations de l'ensemble du processus, on utilise une représentation graphique plus pratique. C'est la méthode des schémas fonctionnels ou diagrammes fonctionnels.

2. Définition

Soit un système linéaire d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$, décrit par sa transmittance $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}$ peut être représenté de manière graphique par le biais du schéma fonctionnel suivant :

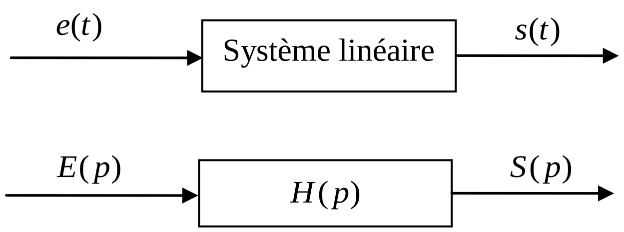


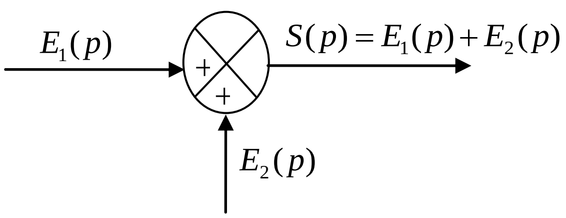
Figure 3.1 : *Schéma bloc*

Un schéma fonctionnel peut comporter plusieurs blocs, où chaque fonction du système peut être caractérisée par un bloc. Ainsi, le système d'équations peut être remplacé par un ensemble de blocs représentant les fonctions du système.

3. Formalisme

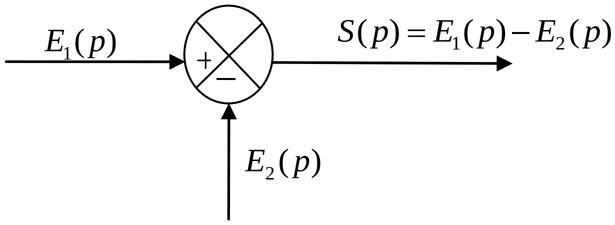
3.1 Sommateur

Un sommateur permet d'additionner des variables. Il peut avoir plusieurs entrées mais une seule sortie.



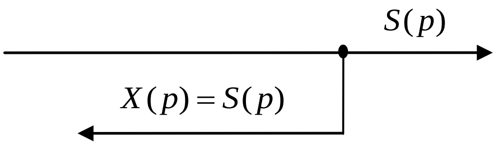
3.2 Comparateur

Le comparateur permet de faire la différence entre deux entrées.

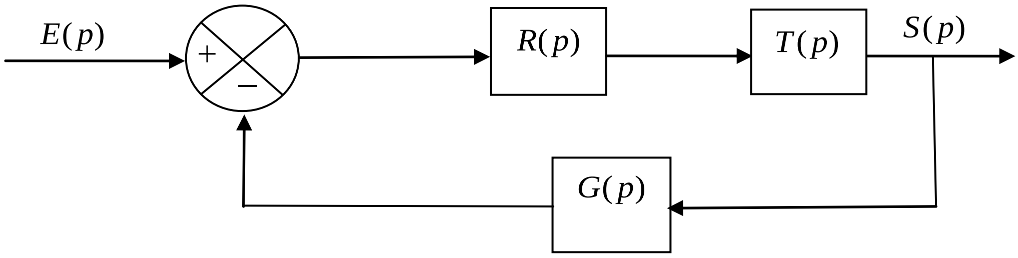


3.3 Le capteur

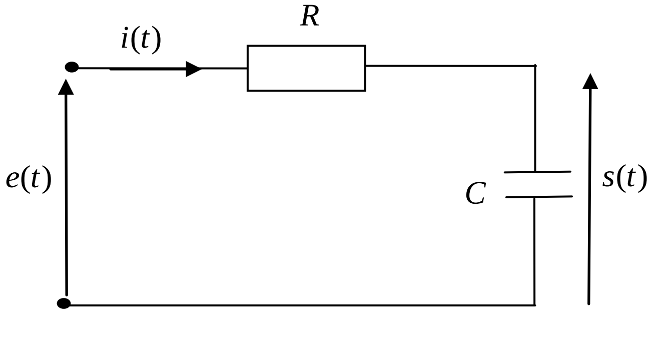
Le capteur retourne la valeur prélevée telle qu'elle est sans modification.



3.4 Schéma fonctionnel



Exemple : Trouver le schéma fonctionnel du circuit RC suivant :



Le condensateur étant initialement déchargé ($u_c(0)=s(0)=0$)

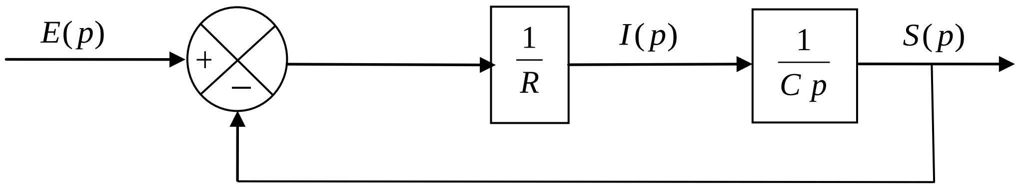
$$e(t)=Ri(t)+s(t) \Rightarrow E(p)=RI(p)+S(p)$$

$$\Rightarrow I(p)=\frac{E(p)-S(p)}{R}$$

$$i(t) = C\frac{ds(t)}{dt} \Rightarrow I(p) = C\,p\,S(p)$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{I(p)}{C\,p}$$

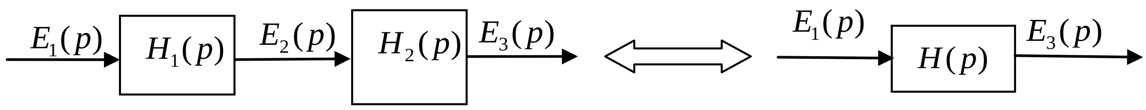
D’où le schéma fonctionnel suivant :



4. Simplification des schémas fonctionnels

4.1 Simplification des blocs en cascade

Un système représenté par la mise en cascade de deux blocs contenant deux fonctions de transfert $\boldsymbol{H_1(p)}$ et $\boldsymbol{H_2(p)}$ est équivalent à celui représenté par un seul bloc contenant le produit de ces fonctions de transfert.



$E_2(p) = H_1(p)E_1(p)$ et $E_3(p) = H_2(p)E_2(p)$

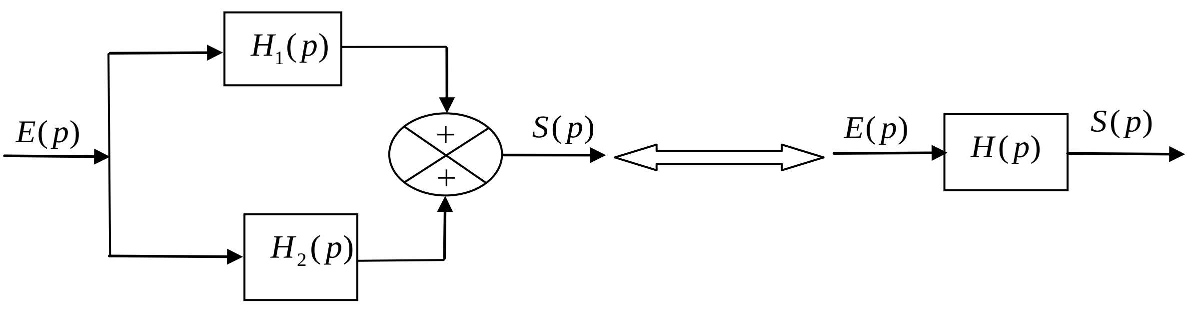
$\Rightarrow E_3(p) = H_2(p)H_1(p)E_1(p)$

$E_3(p) = H(p)E_1(p)$

$H(p) = H_2(p)H_1(p)$

4.2 Simplification des blocs en parallèle

La mise en parallèle de deux blocs peut être remplacée par un seul bloc contenant la somme des deux fonctions de transfert.

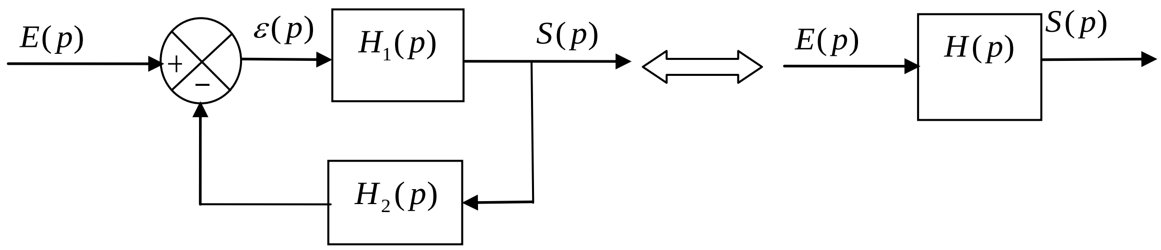


$$\begin{aligned} S(p) &= H_1(p)E(p) + H_2(p)E(p) \\ &= \left(H_1(p) + H_2(p)\right)E(p) \end{aligned}$$

$S(p) = H(p)E(p)$

avec $H(p) = H_2(p) + H_1(p)$

4.3 Formule de Black



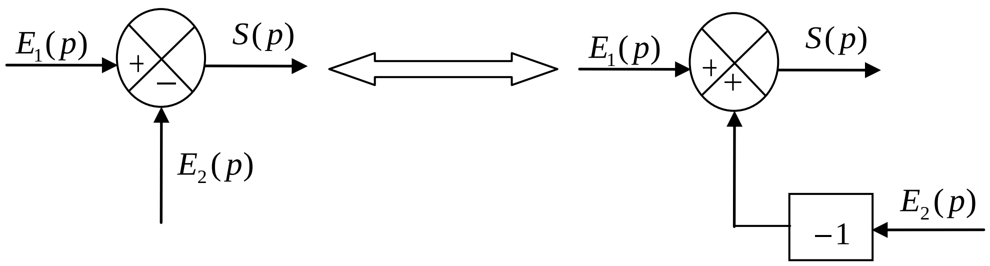
$S(p) = H_1(p)\varepsilon(p)$ avec $\varepsilon(p) = E(p) - H_2(p)S(p)$

$\Rightarrow S(p) = H_1(p)E(p) - H_1(p)H_2(p)S(p)$

$\Rightarrow S(p)\left(1 + H_1(p)H_2(p)\right) = H_1(p)E(p)$

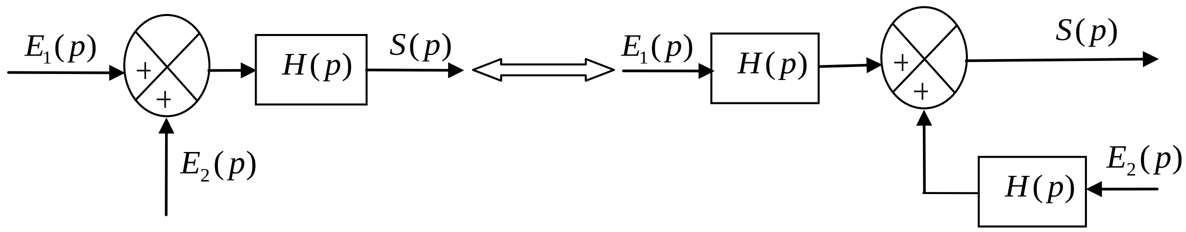
$\Rightarrow H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$ C'est la **formule de Black**

4.4 Transformation d'un comparateur en sommateur

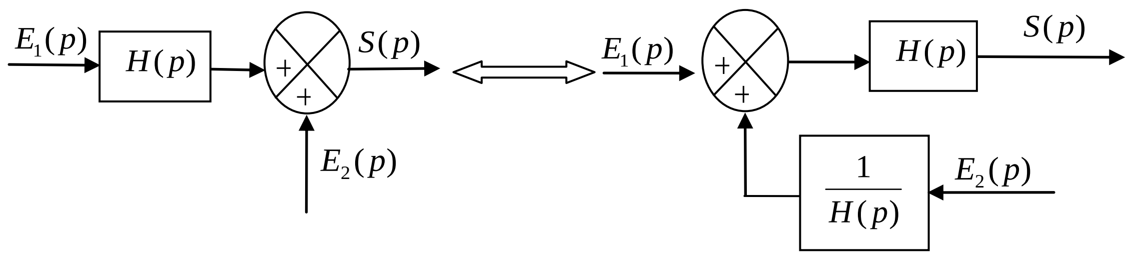


$S(p) = E_1(p) - E_2(p) = E_1(p) + (-1)E_2(p)$

4.5 Déplacement d'un sommateur

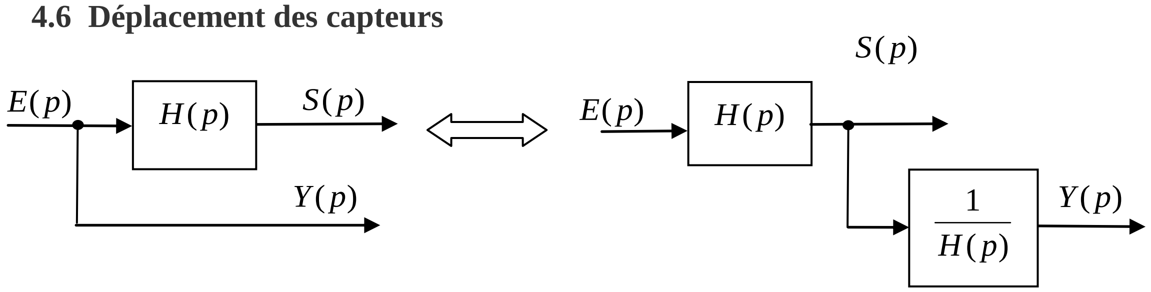


$S(p) = H(p)\left(E_1(p) + E_2(p)\right) = H(p)E_1(p) + H(p)E_2(p)$

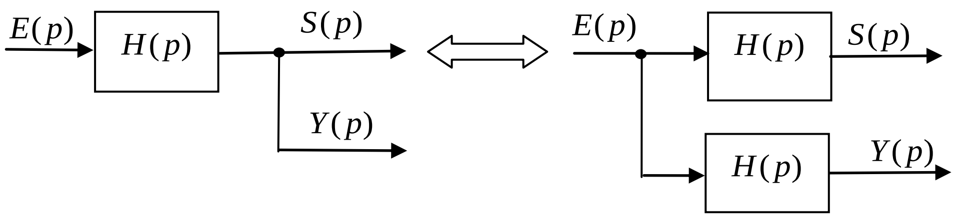


$$S(p)=H(p)E_1(p)+E_2(p)=H(p)\left(E_1(p)+\frac{1}{H(p)}E_2(p)\right)$$

4.6 Déplacement des capteurs

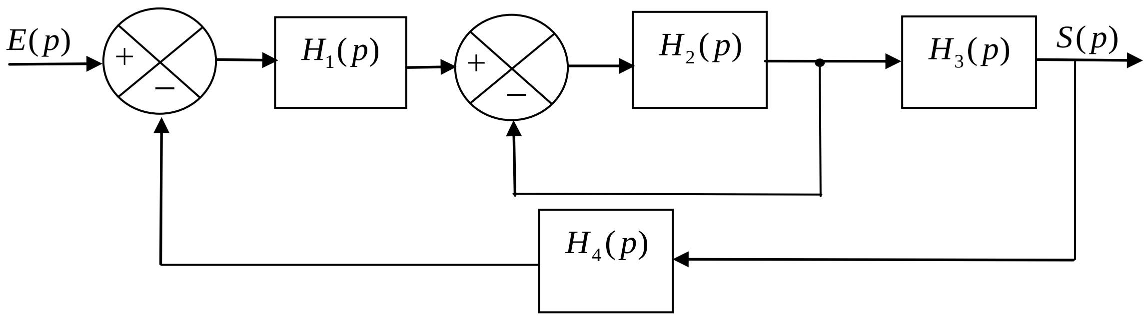


$$Y(p)=\frac{1}{H(p)}H(p)E(p)=E(p)$$



5. Application

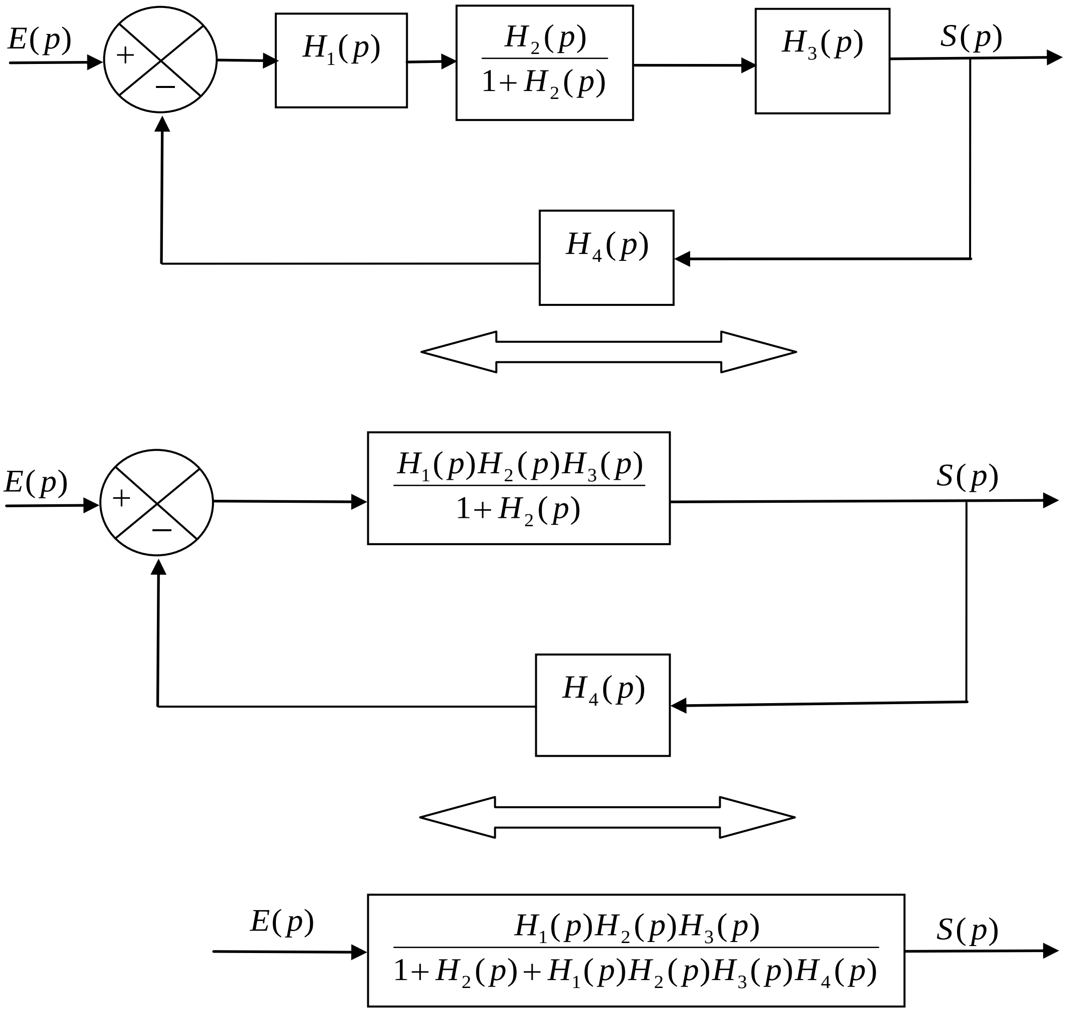
Soit le schéma fonctionnel suivant :



1) Simplifier ce schéma fonctionnel.

2) En déduire la fonction de transfert du système.

<u>Solution</u>



La fonction de transfert est :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{H_1(p)H_2(p)H_3(p)}{1+H_2(p)+H_1(p)H_2(p)H_3(p)H_4(p)}$$

<u>Remarque :</u>

Un système ayant deux entrées $E_1(p)$ et $E_2(p)$ et une sortie $S(p)$, en appliquant le théorème de superposition, nous obtenons :

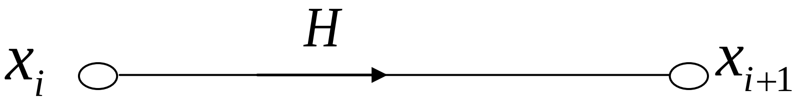
$$S(p)=T_1(p)E_1(p)+T_2(p)E_2(p)$$

avec $T_1(p)=\left(\frac{S(p)}{E_1(p)}\right)_{E_2(p)=0}$ et $T_2(p)=\left(\frac{S(p)}{E_2(p)}\right)_{E_1(p)=0}$.

Chapitre 4
Graphes de fluence

1. Définitions

Un graphe de transfert ou graphe de fluence est constitué d'un ensemble de nœuds et de branches. Les nœuds représentent les variables du système, ils sont symbolisés par des ronds. D'un nœud peuvent partir plusieurs branches il s'agit alors d'un nœud source. Un nœud auquel arrive plusieurs branches est appelé **puit** (nœud secondaire). Les branches reliant les nœuds entre eux et chaque branche est affecté d'un coefficient correspondant à la transmittance.

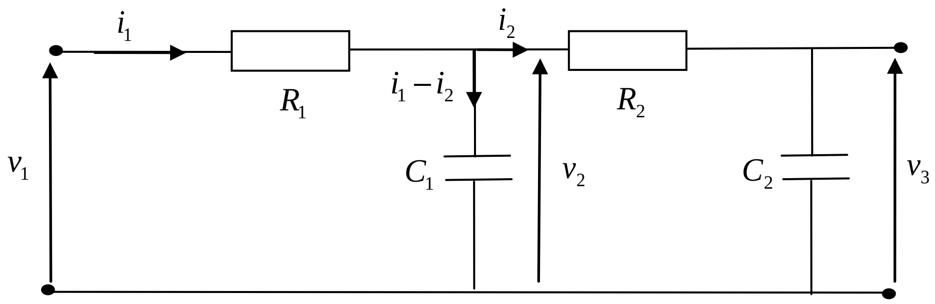


x_i : Nœud de départ

x_{i+1} : Nœud d'arrivée

$H = \frac{x_{i+1}}{x_i}$: Transmittance

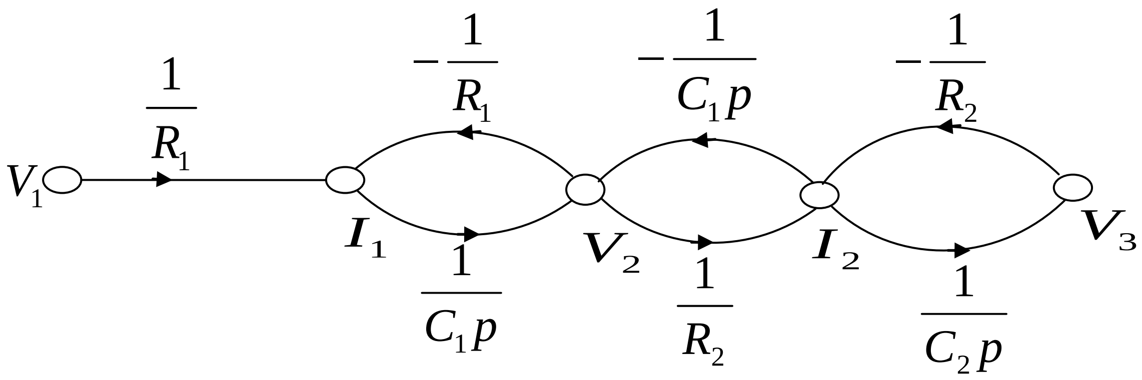
<u>Exemple :</u> Tracer le graphe de fluence de circuit suivant :



D'après ce circuit on a :

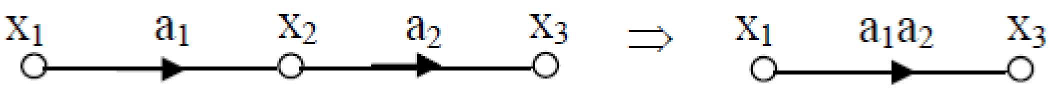
$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{V_1 - V_2}{R_1} \\ V_2 = \dfrac{I_1 - I_2}{C_1 p} \\ I_2 = \dfrac{V_2 - V_3}{R_2} \\ V_3 = \dfrac{I_2}{C_2 p} \end{cases}$$

Avec ces équations on peut tracer le diagramme de fluence suivant :

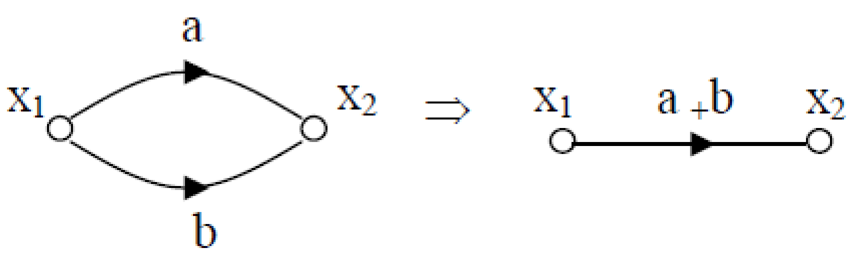


2. Réduction des graphes

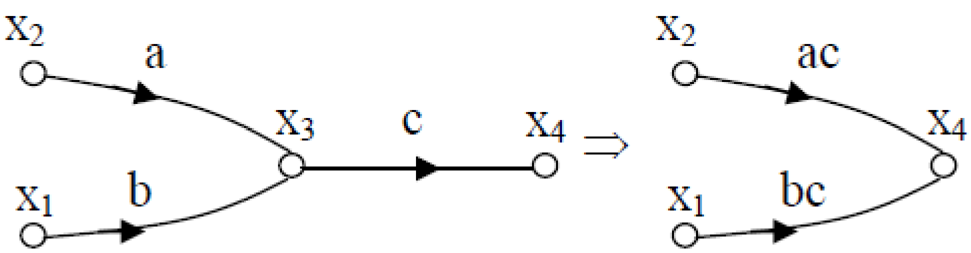
2.1 Transformations élémentaires



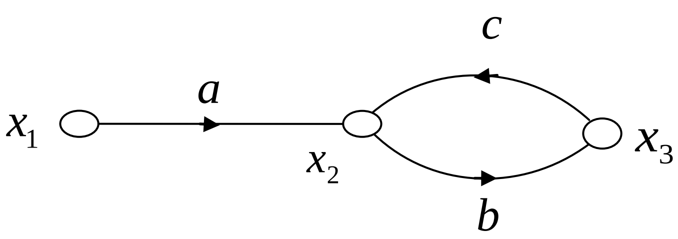
$$\begin{cases} x_2 = a_1 x_1 \\ x_3 = a_2 x_2 \end{cases} \Rightarrow x_3 = a_1 a_2 x_1$$



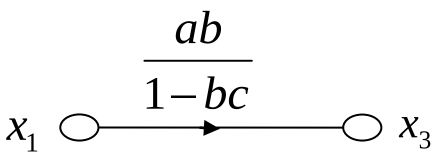
$x_2 = a x_1 + b x_1 = (a+b) x_1$



$$\begin{cases} x_3 = ax_2 + bx_1 \\ x_4 = cx_3 = acx_2 + bcx_1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow$$



$$\begin{cases} x_2 = ax_1 + cx_3 \\ x_3 = bx_2 = b(ax_1 + cx_3) = bax_1 + bcx_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_3(1-bc) = abx_1$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{ab}{1-bc} x_1$$

2.2 Règle de Mason

Cette règle permet de déduire d'un graphe la relation entrée-sortie (fonction de transfert) liant une variable d'entrée à une variable de sortie.

Si un processus possède une variable d'entrée e et une variable de sortie s, la transmitance du processus est : $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} P_i \Delta_i}{\Delta}$

Avec :

N : Entier qui représente le nombre des parcours directs de l'entrée e à la sortie s. Dans un parcours aucun nœud n'est traversé plus d'une fois.

P_i : La transmittance du parcours direct N_i obtenu en faisant le produit des transmittances des branches du parcours i.

Δ : Est le déterminant du graphe donné par : $\Delta = 1 - \sum B_i + \sum B_i B_j - \sum B_i B_j B_k + ...$

B_i : Transmittance de la boucle $n^{\circ i}$.

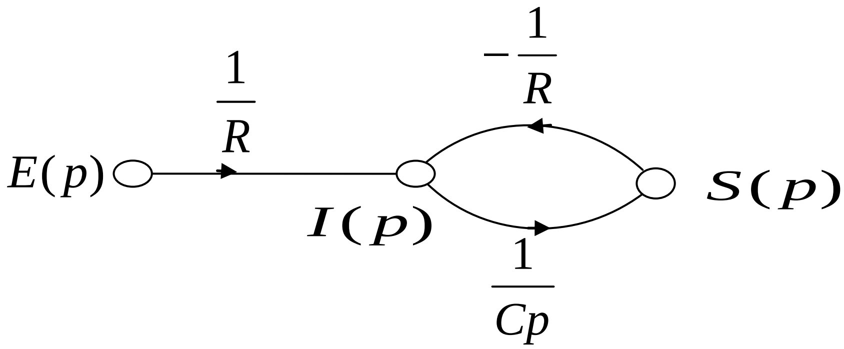
$\sum B_i B_j$: Somme des produits des transmittances des boucles disjointes 2 à 2.

$\sum B_i B_j B_k$: Somme des produits des transmittances des boucles disjointes 3 à 3.

Δ_i : Déterminant du graphe obtenu en supprimant tous les nœuds traversés par le parcours i

Remarque : A chaque parcours i correspond un Δ_i.

Exemple 1: Déterminer la fonction de transfert : $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$.



Nombre de parcours *=1*

$P_1 = \frac{1}{RCp}$

$\Delta_1 = 1$

Nombre de boucle *=1*

$B_1 = \frac{-1}{RCp}$

$\Delta = 1 + \frac{1}{RCp} = \frac{1+RCp}{RCp}$

$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+RCp}$

Chapitre 5
Étude temporelle des systèmes élémentaires

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à l'étude des systèmes élémentaires en présence de diverses entrées : impulsion, échelon et rampe.

2. Système du premier ordre

2.1 Définition

Un système physique d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est dit du premier ordre s'il est régi par une équation différentielle du premier ordre du type :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\, e(t)$$

Avec :

- K : Gain statique du système ;
- τ : Constante de temps >0.

2.2 Fonction de transfert

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation, on obtient :

$$\tau\, p\, S(p) - \tau\, s(0^+) + S(p) = K\, E(p)$$

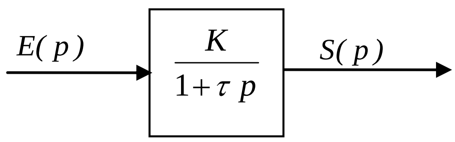
Lorsque les conditions initiales sont nulles cette équation devient :

$$(1+\tau\, p) S(p) = K\, E(p)$$

La fonction de transfert du système est alors :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+\tau\, p}$$

Le schéma bloc d'un système du premier ordre est de la forme suivante :



Exemple 1 : Réservoir à écoulement par gravité

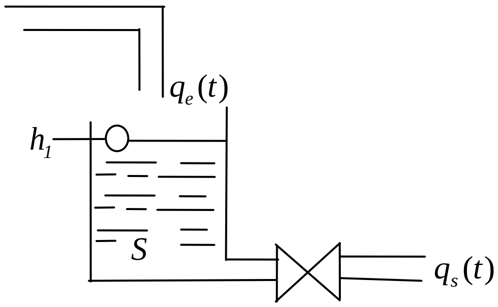


Figure 5.1 : *Régulation de niveau d'un réservoir*

Le réservoir considéré est caractérisé par trois variables :

- Le débit d'entrée : $q_e(t)$;
- Le débit de sortie : $q_s(t)$;
- La hauteur de liquide dans le réservoir : $h(t)$.

La section du réservoir est notée S. Le débit de sortie peut être fixé par l'utilisateur, on parle alors de régime forcé. Dans ce cas, l'évolution du réservoir est décrite par l'équation :

$$\frac{dv(t)}{dt} = S\frac{dh(t)}{dt} = q_e(t) - q_s(t)$$

L'écoulement de sortie du réservoir peut être **libre** (vanne ouverte), dans ce cas le débit de sortie est provoqué par **gravitation**, et il est proportionnel à la hauteur de fluide dans le réservoir (pour une variation autour d'un point de fonctionnement) : $q_s(t) = a\,h(t)$

D'où on a :

$$S\frac{dh(t)}{dt} = q_e(t) - a\,h(t)$$

Lorsque les conditions initiales sont nulles, cette équation devient :

$$(a + S\,p)H(p) = Q_e(p)$$

La fonction de transfert du système est alors :

$$\frac{H(p)}{Q_e(p)} = \frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{S}{a}p} = \frac{K}{1+\tau\,p}$$

avec :

- $K = \frac{1}{a}$: Gain statique du système ;
- $\tau = \frac{S}{a}$: Constante de temps.

2.3 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle du système du premier ordre est obtenue pour une entrée $e(t)=E_0\,\delta(t) \;\Rightarrow\; E(p)=E_0$

On a $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{K}{1+\tau\, p} \;\Rightarrow\; S(p)=H(p)E(p)=\dfrac{K}{1+\tau\, p}E_0=\dfrac{KE_0}{\tau}\dfrac{1}{p+\dfrac{1}{\tau}}$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t)=\frac{KE_0}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$$

t	0	τ	∞
$s(t)$	$\dfrac{KE_0}{\tau}$	$0.366\,\dfrac{KE_0}{\tau}$	0

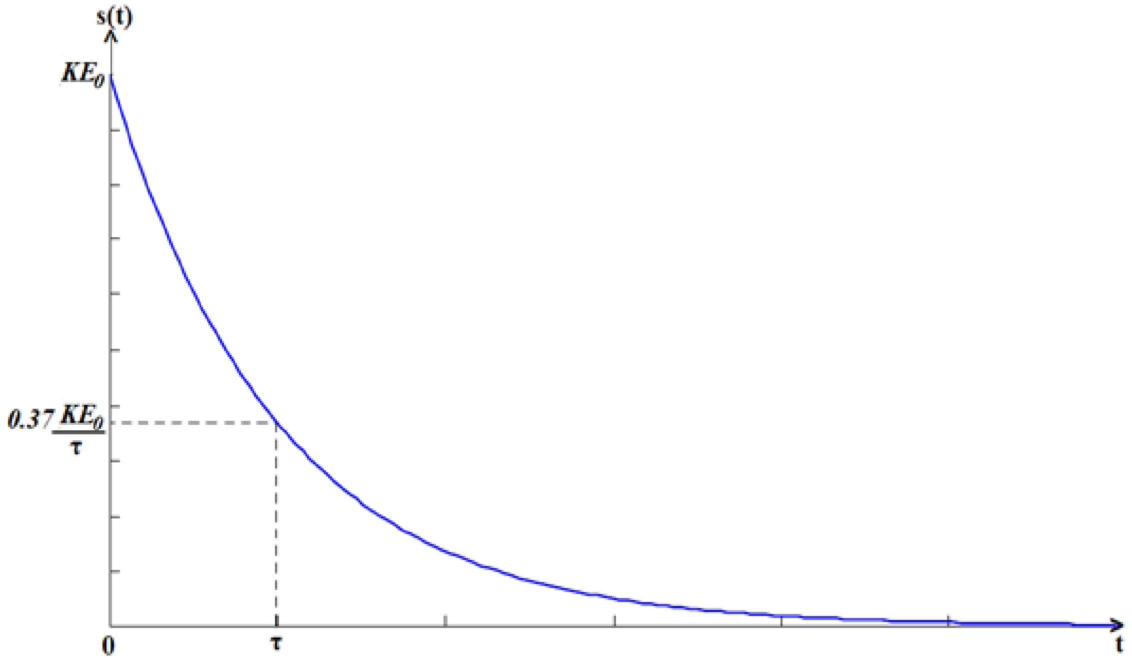


Figure 5.2: *Réponse impulsionnelle d'un système du premier ordre*

2.4 Réponse indicielle

La réponse indicielle du système du premier ordre est obtenue pour une entrée $e(t)=E_0\,u(t) \Rightarrow\; E(p)=\dfrac{E_0}{p}$

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\tau\, p} \;\Rightarrow\; S(p)=H(p)E(p)=\frac{K}{p(1+\tau\, p)}E_0$$

En utilisant la table de transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t)=K\,E_0(1-e^{-\frac{t}{\tau}})u(t)$$

t	0	τ	3τ	5τ	∞
$s(t)$	0	$0.633\ K\,E_0$	$0.95\ K\,E_0$	$0.99\ K\,E_0$	$K\,E_0$

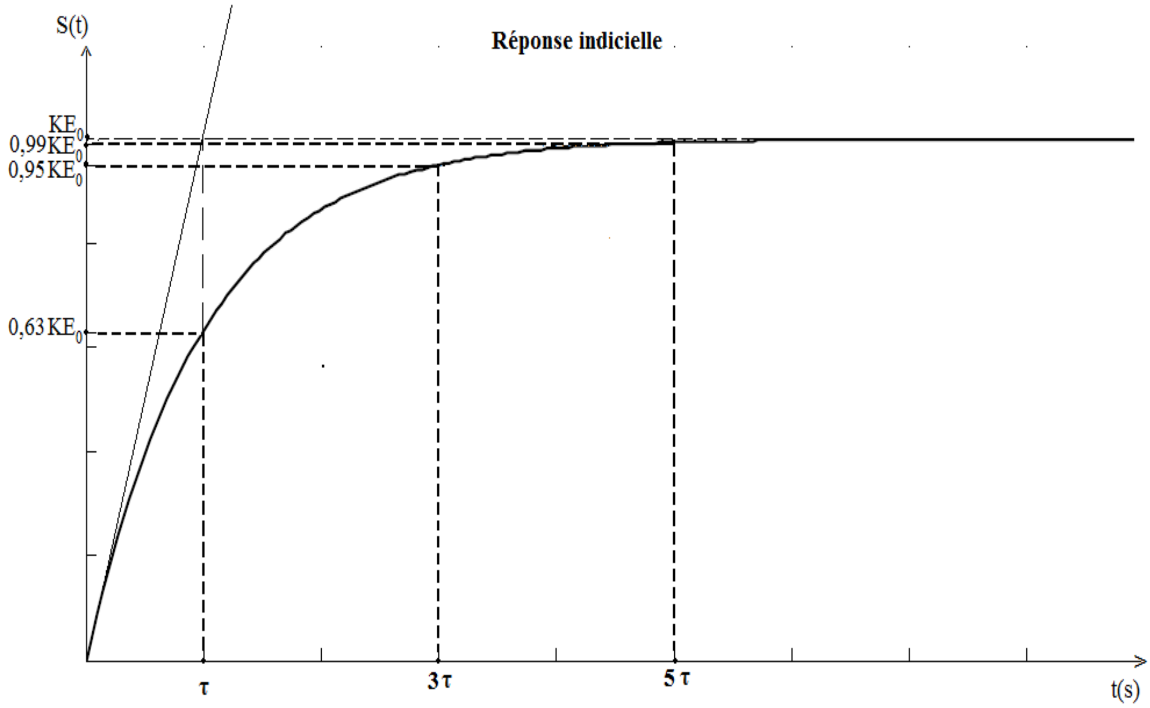


Figure 5.3 : *Réponse indicielle d'un système du premier ordre*

Temps de réponse à 5% $\Rightarrow$ $s(t_r) = K\,E_0(1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}}) = 0.95\,K\,E_0$ $\Rightarrow$

$$1 - e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0.95 \Rightarrow$$

$$e^{-\frac{t_r}{\tau}} = 0.05 \Rightarrow$$

$$t_r = -\tau\,Ln(0.05) \approx 3\tau \Rightarrow$$

$$t_r(5\%) = 3\tau$$

2.5 Réponse à une rampe

La réponse à une rampe du système du premier ordre est obtenue pour une entrée de type rampe $e(t) = E_0\,t\,u(t)$.

$$e(t) = E_0\,t\,u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p^2}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau\,p}$$

$$\Rightarrow S(p) = H(p)E(p) = \frac{K}{p^2(1+\tau\,p)}E_0$$

En utilisant la table de transformée de Laplace on trouve :

$$s(t) = K\,E_0(t - \tau + \tau\, e^{-\frac{t}{\tau}})\,u(t)$$

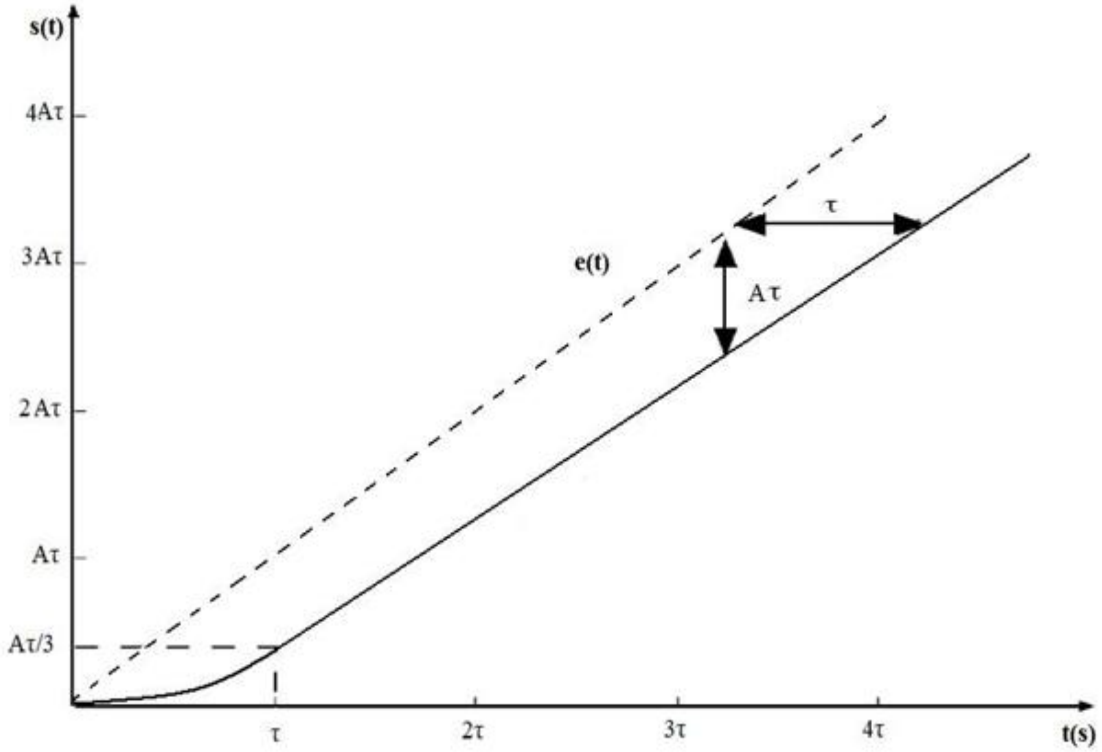


Figure 5.4 *: Réponse à une rampe d'un système du premier ordre*

3. Système du premier ordre généralisé

3.1 Définition

Un système physique d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est dit du premier ordre généralisé, lorsqu'il est régi par une équation différentielle du premier ordre de la forme :

$$a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0\, e(t)$$

Ou sous une forme canonique : $\tau \dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) = K\left(\tau^{'} \dfrac{de(t)}{dt} + e(t)\right)$

avec :

- K : Gain statique ;
- τ et $\tau^{'}$: Constantes de temps ;
- $\tau^{'} = \lambda\tau$:
  - $Si\ \lambda > 1$: on dit que le système est à avance de phase ;
  - $Si\ \lambda < 1$: on dit que le système est à retard de phase.

3.2 Fonction de transfert

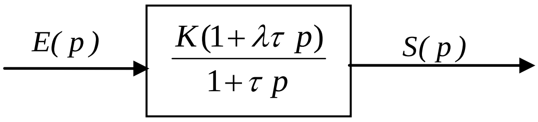
En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle précédente avec des conditions initiales nulles, on obtient :

$$(1+\tau p)S(p) = K(1+\lambda\tau p)E(p)$$

La fonction de transfert du système du premier ordre généralisé est alors :

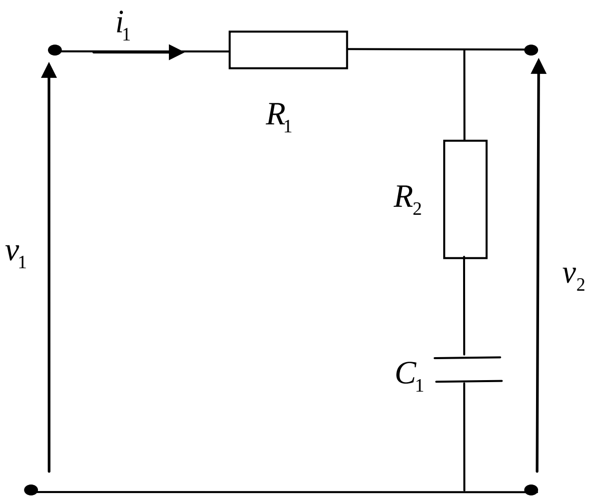
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K\frac{1+\lambda\tau p}{1+\tau p}$$

Le schéma bloc d'un système du premier ordre **généralisé** est de la forme suivante :



Exemple 1 :

On considère le système électrique suivant :



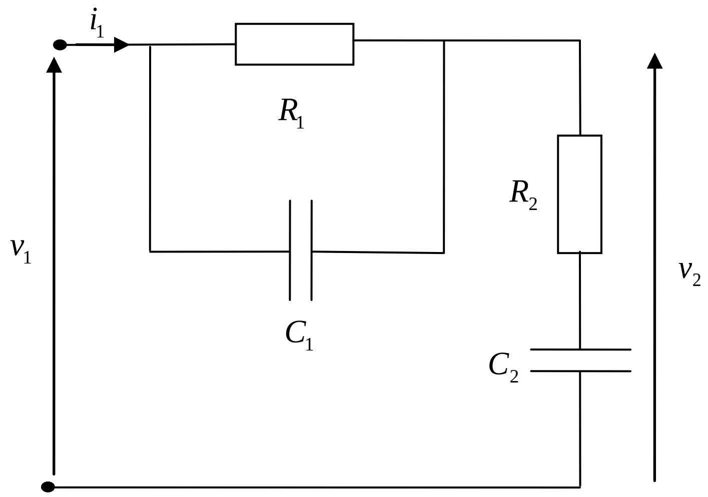
$$H(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{1+R_2Cp}{1+(R_1+R_2)Cp} = K\frac{1+\lambda\tau p}{1+\tau p}$$

$K = 1$, $\tau = (R_1 + R_2)C$ et $\lambda = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$.

$\lambda = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} < 1$, d'où il s'agit d'un système à retard de phase.

Exemple 2 :

On considère le système électrique suivant :



$$H(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + R_1 C p}{1 + \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} p} = K \frac{1 + \lambda \tau p}{1 + \tau p}$$

$$K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}, \ \tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1 + R_2} \ \text{ et } \ \lambda = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

$\lambda = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1$, d'où il s'agit d'un système à retard de phase.

3.3 Réponse indicielle

La réponse indicielle du système du premier ordre généralisé est obtenue pour une entrée

$$e(t) = E_0 \, u(t) \Rightarrow \ E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \frac{1 + \lambda \tau p}{1 + \tau p} \ \Rightarrow \ S(p) = H(p)E(p) = KE_0 \frac{1 + \lambda \tau p}{p(1 + \tau p)}$$

$$S(p) = KE_0 \left(\frac{\frac{1}{\tau}}{p(p + \frac{1}{\tau})} + \frac{\lambda}{p + \frac{1}{\tau}} \right)$$

En utilisant la table de transformée de Laplace on trouve :

$$s(t) = K \, E_0 \left(1 + (\lambda - 1) e^{-\frac{t}{\tau}} \right) u(t)$$

On trouve :

$s(0) = KE_0 \lambda$ et $s(\infty) = 0$

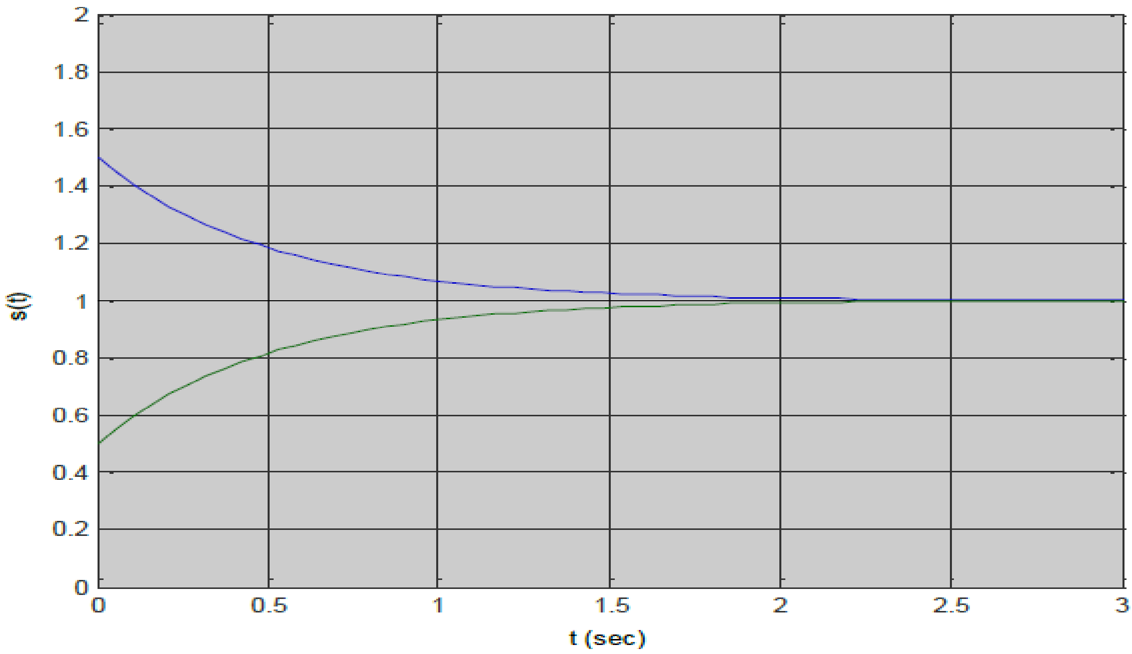


***Figure 5.5** : Réponses indicielles unitaires d'un système du premier ordre généralisé avec* $K=1,\ \lambda=0.5$ et $\lambda=1.5$

4. Système du second ordre

4.1 Définition

Un système physique d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ est dit du second ordre s'il est régi par une équation différentielle du second ordre du type :

$$b\frac{d^2s(t)}{dt^2}+a\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K\,e(t)$$

4.2 Fonction de transfert

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation pour des conditions initiales nulles, on trouve : $b\,p^2S(p)+a\,p\,S(p)+S(p)=K\,E(p)$

La fonction de transfert du système est alors :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+a\,p+bp^2}$$

D'une manière générale, on écrit la fonction de transfert d'un système du second ordre de la façon suivante :

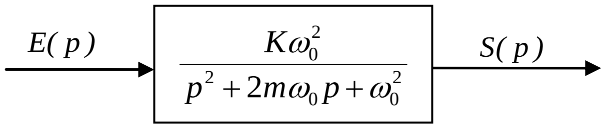
$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2m}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}}=\frac{K\omega_0^2}{p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2}$$

avec :

- K : Gain statique du système;

- ω_0 : Pulsation naturelle du système en rd/s ;
- m : Facteur d'amortissement.

Le schéma bloc d'un système du second ordre est de la forme suivante :



L'équation caractéristique est : $p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4\omega_0^2(m^2 - 1)$

1^er^ cas : $m > 1$

$m > 1 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow H(p)$ possède 2 pôles réels :

- $p_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$
- $p_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1}$

2^éme^ cas : $m = 1$

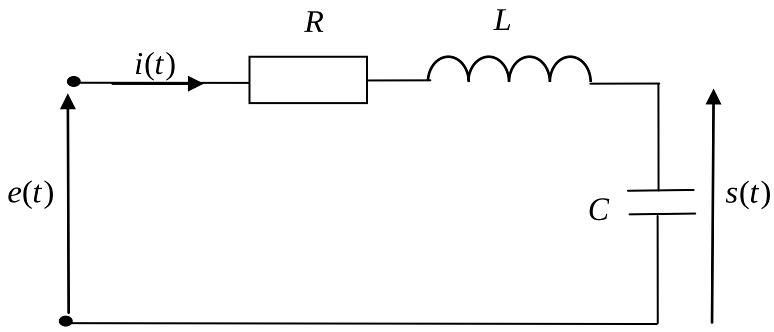
$m = 1 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow H(p)$ possède un pôle double $p_0 = -\omega_0$

3^éme^ cas : $0 < m < 1$

$0 < m < 1 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow H(p)$ possède deux pôles complexes conjugués :

- $p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - m^2}$
- $p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - m^2}$

<u>Exemple 2 : Circuit électrique RLC</u>



La loi des mailles permet d'écrire : $e(t) = R\,i(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + s(t)$

Or on a $i(t) = C\dfrac{ds(t)}{dt}$

D'où $e(t) = RC\dfrac{ds(t)}{dt} + LC\dfrac{ds^2(t)}{dt^2} + s(t)$

On suppose que les conditions initiales sont nulles. En appliquant la transformée de Laplace à cette équation, on trouve :

$$E(p) = LCp^2\, S(p) + RCp\, S(p) + S(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{LCp^2 + RC\,p + 1}$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}.$$

D'où $K = 1,\ \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ et $m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$.

4.3 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est obtenue pour une entrée $e(t) = E_0\delta(t) \Rightarrow E(p) = E_0$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow S(p) = H(p)E(p) = \frac{E_0 K\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

1er cas : $m > 1$ **(Système hyper amorti)**

$$S(p) = \frac{E_0 K\omega_0^2}{(p-p_1)(p-p_2)} = E_0 K\omega_0^2 \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{E_0 K\omega_0^2}{p_1 - p_2}\left(\frac{1}{p-p_1} - \frac{1}{p-p_2}\right)$$

$$\text{D'où } s(t) = \frac{E_0 K\omega_0^2}{p_1 - p_2}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t})u(t) \Rightarrow$$

$$s(t) = \frac{E_0 K\omega_0}{2\sqrt{m^2-1}}\left(e^{(-m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2-1})t} - e^{(-m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2-1})t}\right)u(t)$$

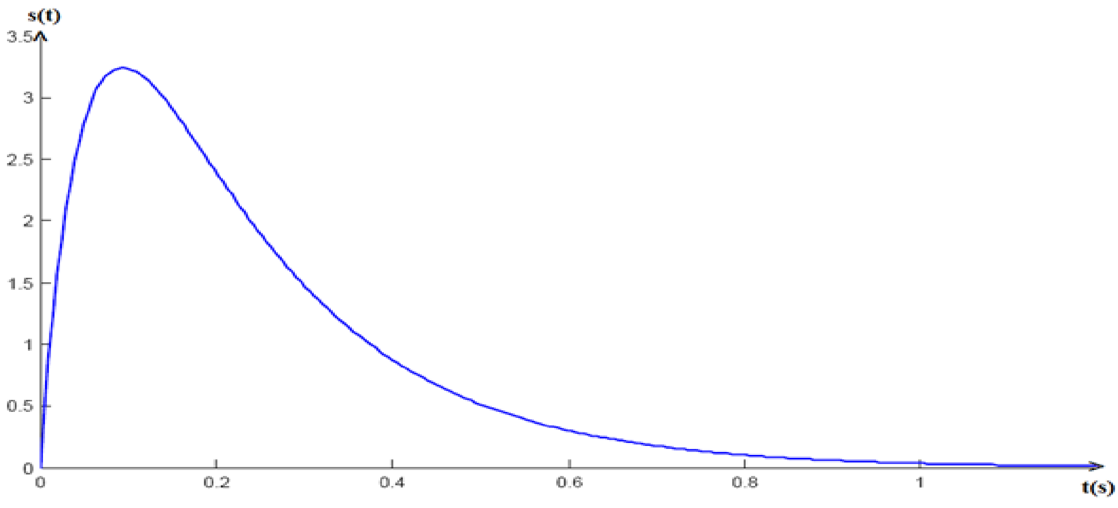


Figure 5.6 *: Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre hyper amorti*

2nd cas : $m = 1$ (Système amorti)

$$S(p) = \frac{E_0 K \omega_0^2}{(p+\omega_0)^2} = \frac{KE_0}{(1+\frac{1}{\omega_0}p)^2}$$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = E_0 K \omega_0^2 \, t \, e^{-\omega_0 t} \, u(t)$$

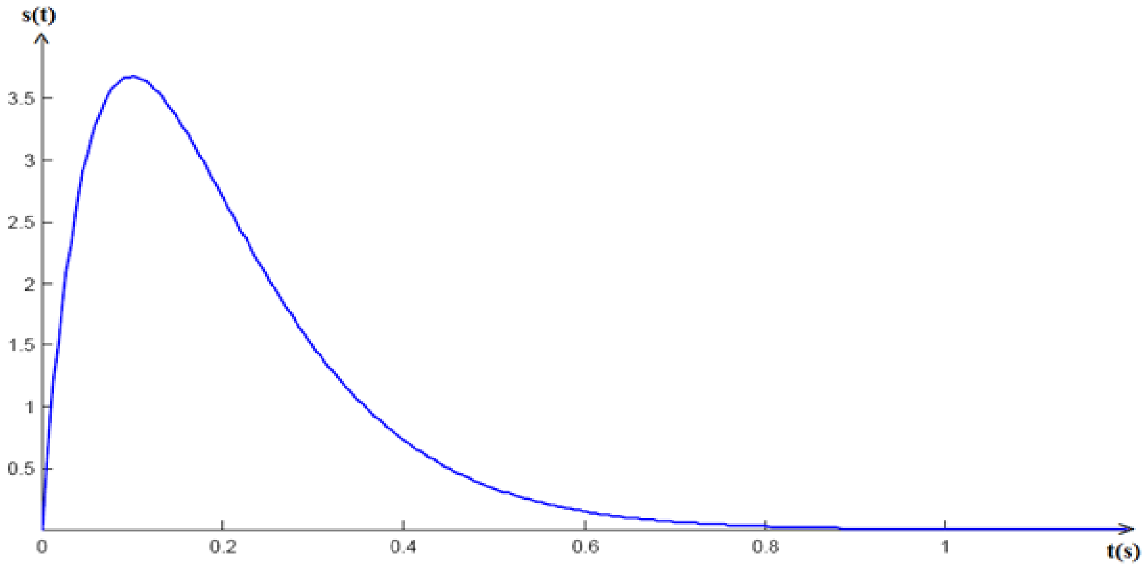


Figure 5.7 *: Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre amorti*

3éme cas : $0 < m < 1$ (Système sous amorti)

$$S(p) = \frac{E_0 K}{1 + 2m(\frac{p}{\omega_0})p + (\frac{p}{\omega_0})^2}$$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = \frac{K E_0 \omega_0 e^{-m\omega_0 t}}{\sqrt{1-m^2}} \sin\left[(\omega_0 \sqrt{1-m^2})\, t\right] u(t)$$

On pose alors :

- $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-m^2}$: Pulsation propre
- $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$: Pseudo période

D'où $s(t) = \frac{K E_0 \omega_0^2 e^{-m\omega_0 t}}{\omega_p} \sin\left[\omega_p \, t\right] u(t)$

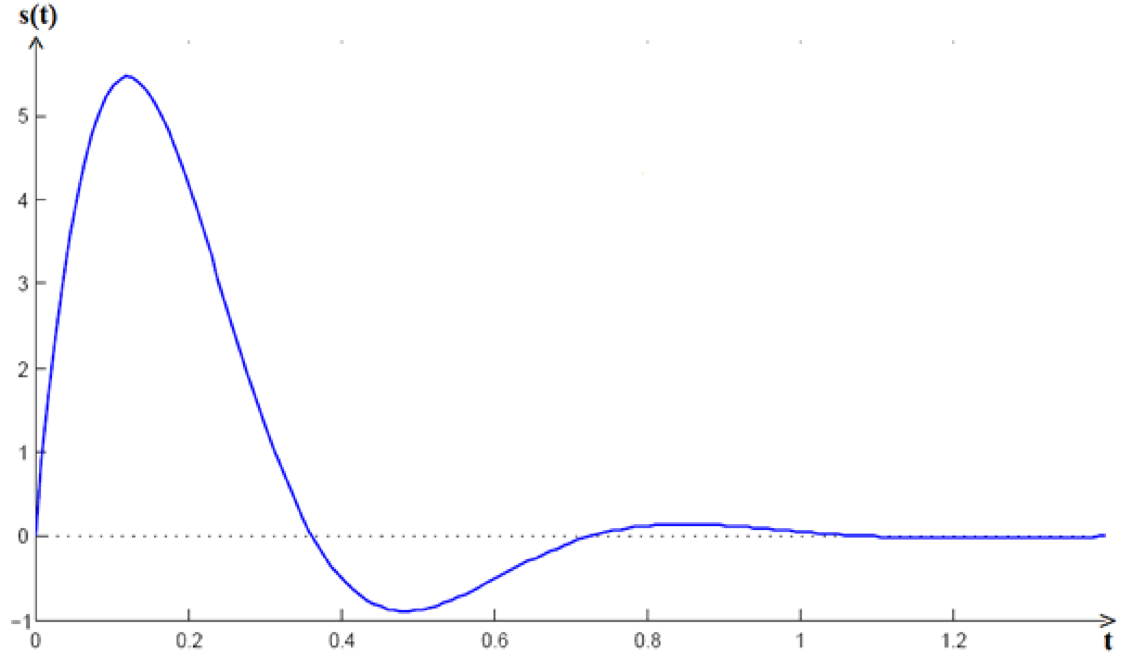


Figure 5.8 *: Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre sous amorti*

4$^{\text{éme}}$ **cas** $\boldsymbol{m = 0}$ **(Système juste oscillant)**

$$S(p) = \frac{E_0 K \omega_0^2}{p^2 + \omega_0^2}$$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = KE_0 \omega_0 \sin[\omega_0\, t]\, u(t)$$

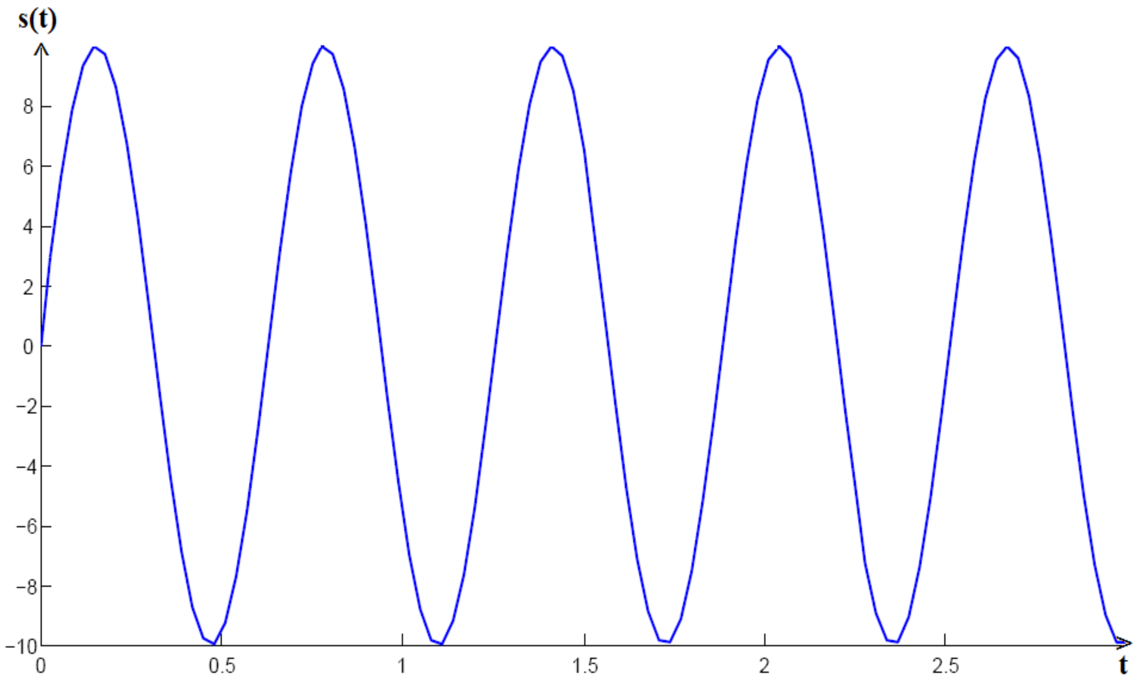


Figure 5.9 *: Réponse impulsionnelle d'un système du second ordre juste oscillant*

4.4 Réponse indicielle

La réponse indicielle est obtenue pour une entrée $\boldsymbol{e(t)=E_0\,u(t)} \Rightarrow E(p)=\frac{E_0}{p}$

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K\omega_0^2}{p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2} \Rightarrow$$

$$S(p)=H(p)E(p)=\frac{E_0K\omega_0^2}{p(p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2)}$$

1[er] **cas :** $m>1$**(Système hyper amorti)**

$$S(p)=\frac{E_0K\omega_0^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}=\frac{E_0K\omega_0^2}{p_1p_2}\frac{1}{p(1-\frac{1}{p_1}p)(1-\frac{1}{p_2}p)}$$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t)=\frac{E_0K\omega_0^2}{p_1p_2}\left[1+\frac{p_1p_2}{p_2-p_1}\left(\frac{1}{p_2}e^{p_2t}-\frac{1}{p_1}e^{p_1t}\right)\right]u(t)$$

$\Rightarrow s(0)=0$ et $s(\infty)=E_0K$

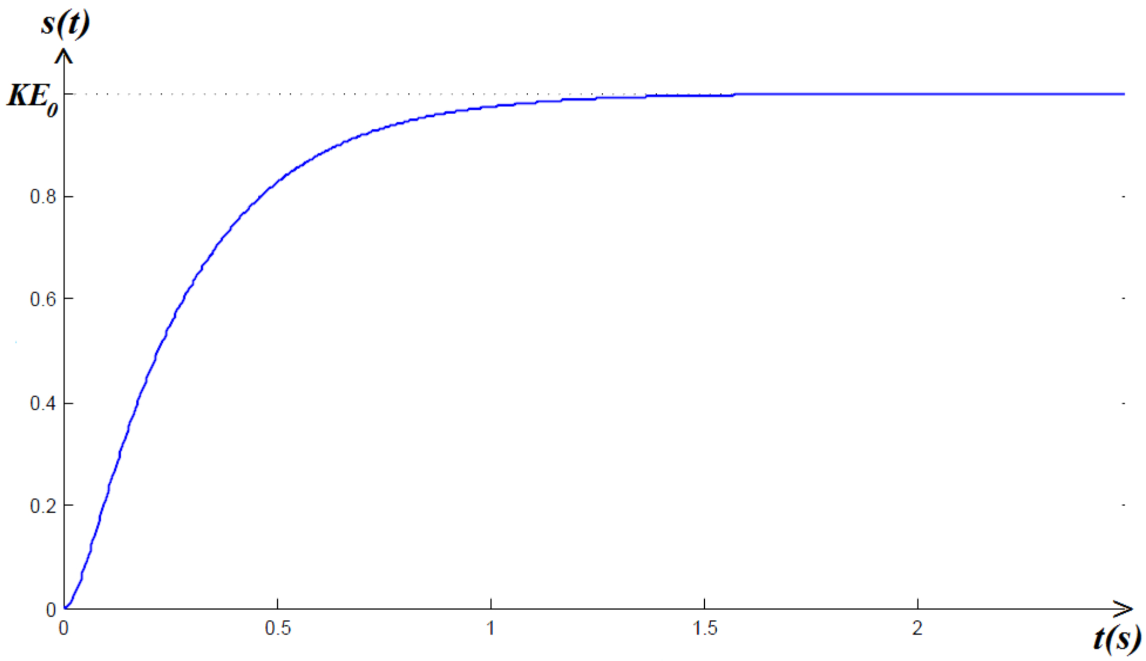


Figure 5.10 *: Réponse indicielle d'un système du second ordre hyper amorti*

On remarque que la tangente à l'origine est nulle.

2[nd] **cas :** $\boldsymbol{m=1}$ **(Système amorti)**

$$S(p)=\frac{E_0K\omega_0^2}{p(p+\omega_0)^2}=\frac{E_0K}{p(1+\frac{1}{\omega_0}p)^2}$$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = E_0 K\left[1-(1+\omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t}\right]u(t)$$

$s(0)=0$ et $s(\infty) = E_0 K$

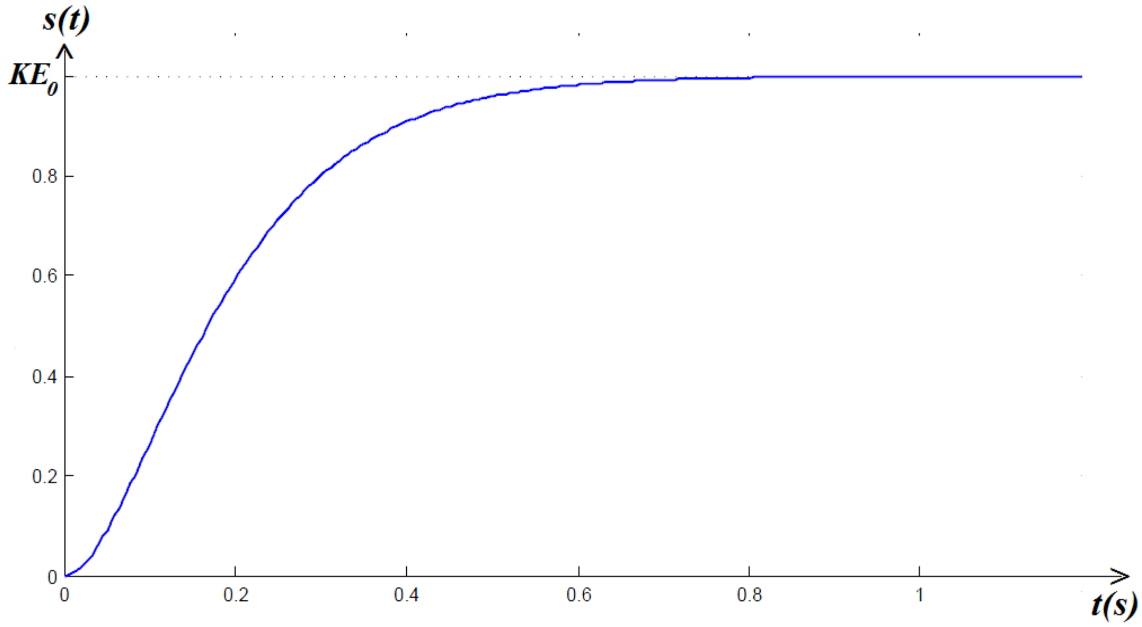


Figure 5.11 *: Réponse indicielle d'un système du second ordre amorti*

3[éme] cas : $0\langle m\langle 1$ (Système sous amorti)

$$S(p) = \frac{E_0 K}{p\left[1+2m(\frac{p}{\omega_0})+(\frac{p}{\omega_0})^2\right]}$$

En utilisant la table de transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = K\,E_0\left[1-\frac{\omega_0 e^{-m\omega_0 t}}{\omega_p}\sin(\omega_p t+\varphi)\right]u(t)$$

avec :

- $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-m^2}$: pulsation propre ;
- $T_p = \dfrac{2\pi}{\omega_p}$: pseudo période ;
- $\varphi = arctan\left[\dfrac{\sqrt{1-m^2}}{m}\right]$.

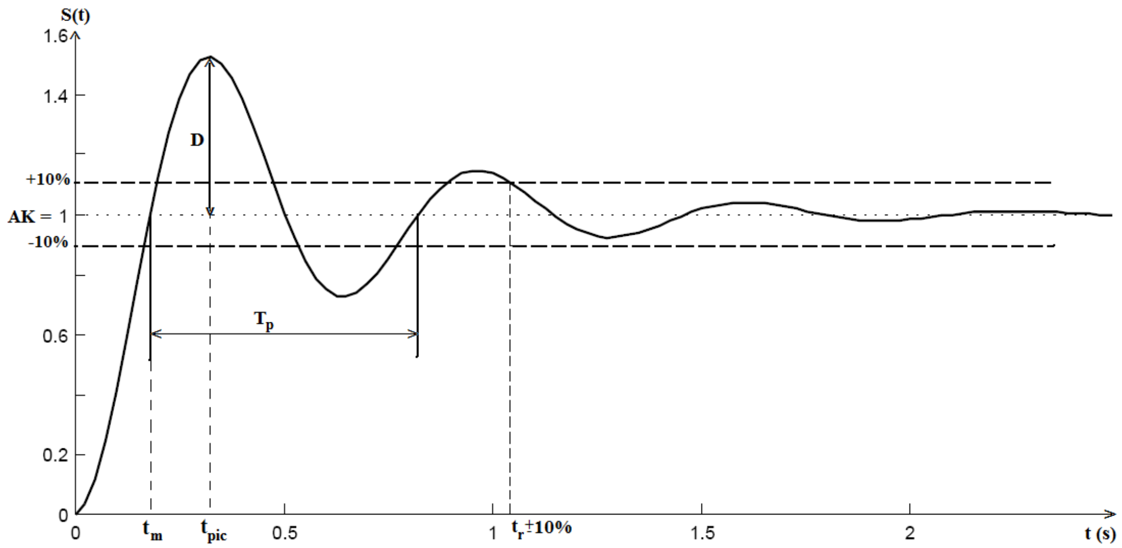


***Figure 5.12 :** Réponse indicielle d'un système* du second *ordre pour m<1*

Dépassement : Le premier dépassement $D\% = \dfrac{S_{\max} - s(\infty)}{s(\infty)} \times 100$: $D\% = 100\, e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$.

- Si $m = 0 \Rightarrow D(\%) = 100\%$
- Si $m = 1 \Rightarrow D(\%) = 0$

Temps de pic : C'est le temps correspondant au premier dépassement : $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}$

Temps de réponse : Pour m faible $t_s(\grave{a} \pm 5\%) \approx \dfrac{3}{m\omega_0}$ et $t_s(\grave{a} \pm 2\%) \approx \dfrac{4}{m\omega_0}$

4[éme] cas $m = 0$ (Système juste oscillant)

$$S(p) = \frac{E_0 K \omega_0^2}{p(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{E_0 K}{p(1 + \dfrac{p^2}{\omega_0^2})}$$

En utilisant la table de la transformée de Laplace, on trouve :

$$s(t) = KE_0 \left[1 - \cos(\omega_0 t)\right] u(t)$$

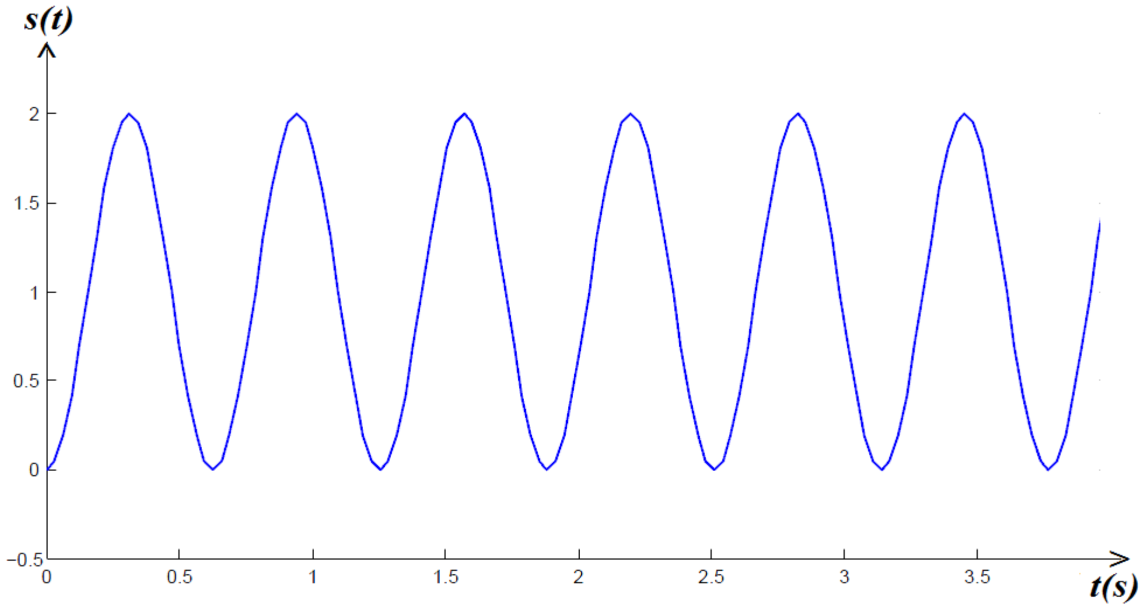


Figure 5.13: *Réponse indicielle d'un système du second ordre juste oscillant*

Chapitre *6*

Étude harmonique des systèmes élémentaires

1. Introduction

Considérons un système linéaire d'ordre quelconque avec une entrée et une sortie. Si l'entrée est sinusoïdale $\left(e(t)=E_0\, sin(\omega t)\right)$, la propriété linéaire du système fait que la sortie sera également une sinusoïde, de même pulsation que l'entrée. On aura : $s(t)=S_0\, sin(\omega t+\varphi)$.

Dans une analyse harmonique d'un système, la réponse de ce système à une sinusoïde est caractérisée par deux paramètres $Gain=\frac{S_0}{E_0}$ et déphasage : φ.

Ces deux paramètres dépendent de la pulsation ω, avec : $Gain=\frac{S_0}{E_0}=\left|T(j\omega)\right|$ et $\varphi=arg(T(j\omega))$ où $T(j\omega)$ est l'expression de la fonction de transfert du système dans laquelle on remplace la variable de Laplace p par $j\omega$.

Il existe trois types de représentations graphiques :

- Le lieu de Bode ;
- Le lieu de Black ;
- Le lieu de Nyquist.

2. Système du premier ordre

2.1 Lieu de Bode

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est donnée par :

$$T(P)=\frac{K}{1+\tau p} \Rightarrow T(j\omega)=\frac{K}{1+\tau j\omega}.$$

Le lieu de Bode se présente sous la forme de deux courbes :

- Courbe de gain : $\left|T(j\omega)\right|_{dB}=20log(\left|T(j\omega)\right|)$;
- Courbe de phase : $\varphi=arg(T(j\omega))$.

Etude du Gain

$$\left|T(j\omega)\right|=\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \Rightarrow \left|T(j\omega)\right|_{dB}=20log K-10log(1+(\tau\omega)^2)$$

Soit $\omega_0=\frac{1}{\tau}$, alors $\left|T(j\omega)\right|_{dB}=20log K-10log(1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2)$

Si $\omega << \omega_0$, alors $|T(j\omega)|_{dB} \approx 20\log K$

Si $\omega = \omega_0$, alors $|T(j\omega)|_{dB} = 20\log K - 3$

Si $\omega = 10\omega_0$, alors $|T(j\omega)|_{dB} \approx 20\log K - 20$

Si $\omega >> \omega_0$, alors $|T(j\omega)|_{dB} \approx 20\log K - 20\log(\frac{\omega}{\omega_0}) \approx 20\log K + 20\log(\omega_0) - 20\log(\omega)$

On remarque que l'asymptote de gain est une droite de pente *-20dB/ décade*

On appelle **décade** l'intervalle de fréquence de f à $10\,f$

On appelle **Octave** l'intervalle de fréquence de f à $2\,f$

Etude de la phase

$$T(j\omega) = \frac{K}{1+\tau\, j\omega} \Rightarrow \varphi = \arg(T(j\omega)) = -\arctan(\tau\omega) = -\arctan(\frac{\omega}{\omega_0})$$

Si $\omega << \omega_0$, alors $\varphi \to 0$

Si $\omega = \omega_0$, alors $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

Si $\omega >> \omega_0$, alors $\varphi \to -\frac{\pi}{2}$

Pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\tau}$, on a $|T(j\omega)|_{dB} \approx 20\log K - 3$ et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$: ω_0 est la pulsation de coupure

D'où la représentation du lieu de Bode est la suivante :

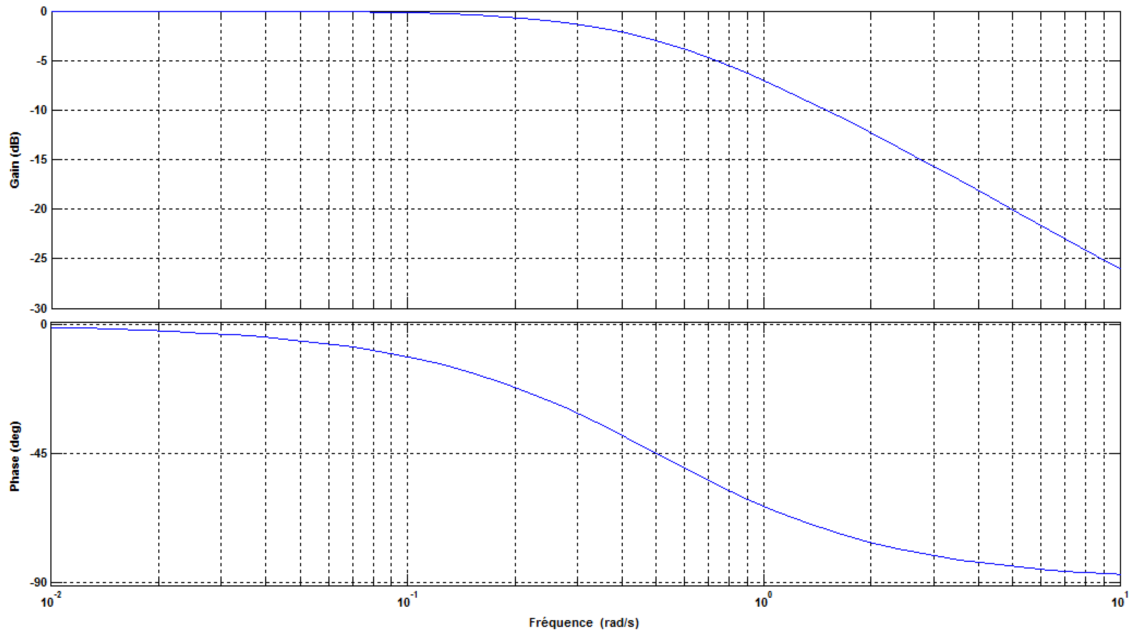


Figure 6.1 *: Lieu de Bode d'un système du premier ordre pour* $K = 1$

2.2 Lieu de Black

Le lieu de ***BLACK***, aussi appelé ***NICHOLS***, représente le gain $|T(j\omega)|_{dB}$ en fonction de la phase $\varphi = arg(T(j\omega))$. La courbe est graduée en ω

Si $\omega \to 0$, alors $|T(j\omega)|_{dB} \approx 20 \log K$ et $\varphi \to 0$

Si $\omega = \omega_0$, alors $|T(j\omega)|_{dB} = 20 \log K - 3$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$

Si $\omega \to +\infty$, alors $|T(j\omega)|_{dB} \to -\infty$ et $\varphi \to -\dfrac{\pi}{2}$

D'où la représentation du lieu de Black est la suivante :

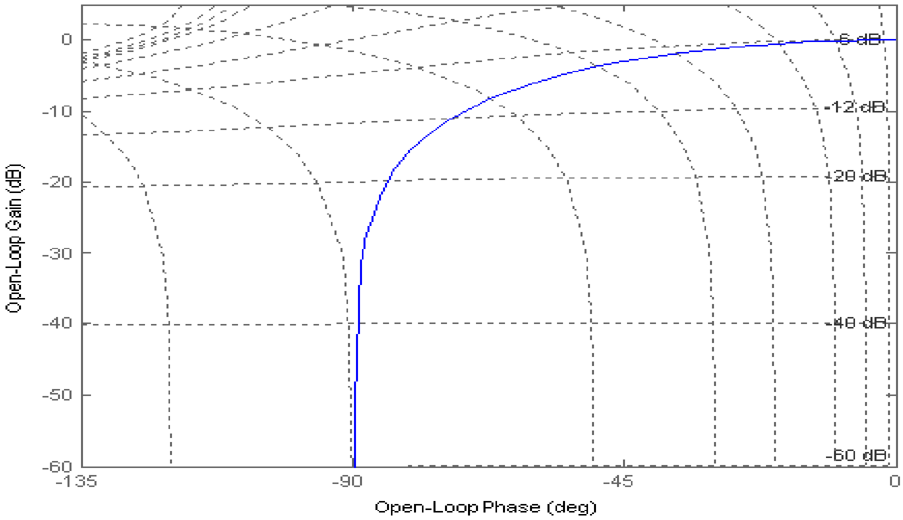


Figure 6.2 *: Lieu de Black d'un système du premier ordre pour* $K = 1$

2.3 Lieu de Nyquist

Le lieu de Nyquist consiste à tracer pour tout ω réel positif la partie imaginaire de $T(j\omega)$ en fonction de la partie réelle de $T(j\omega)$.

$$T(j\omega) = \frac{K}{1+\tau j\omega} = \frac{K}{1+(\tau\omega)^2} + \frac{-K\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2} j = X + jY$$

$$\Rightarrow X = R_e(T(j\omega)) = \frac{K}{1+(\tau\omega)^2} \text{ et } Y = Im(T(j\omega)) = \frac{-K\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2}.$$

$X^2 + Y^2 = \dfrac{K^2 + K^2(\tau\omega)^2}{(1+(\tau\omega)^2)^2} = KX$, alors $(X - \dfrac{K}{2})^2 + Y^2 = (\dfrac{K}{2})^2$: c'est l'équation d'un cercle de rayon $\dfrac{K}{2}$ et de centre $(\dfrac{K}{2}, 0)$.

Si $\omega \to 0$, alors $X = K$ et $Y = 0^-$

Si $\omega \to +\infty$, alors $X = 0^+$ et $Y = 0^-$

Donc le Lieu de Nyquist est le demi cercle inférieur (car ω est positif)

D'où la représentation du lieu de Nyquist est la suivante :

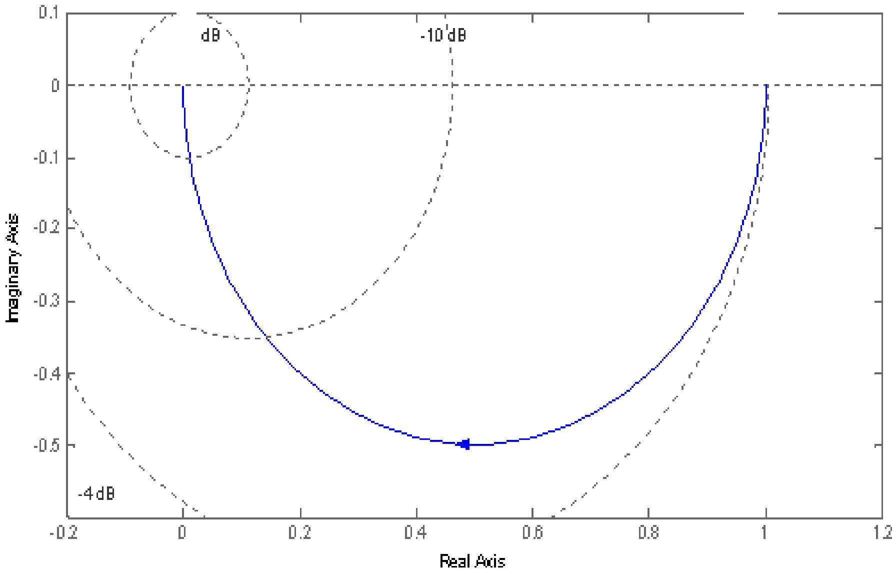


Figure 6.3 *: Lieu de Nyquist d'un système du premier ordre pour* $K = 1$

3. Système du second ordre

3.1 Lieu de Bode

Un système du deuxième ordre est défini par sa fonction de transfert :

$$T(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow T(j\omega) = \frac{K}{(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2) + j\frac{2m\omega}{\omega_0}}$$

Si on pose $u = \frac{\omega}{\omega_0}$, alors on trouve :

$$T(ju) = \frac{K}{(1-u^2) + j2mu}$$

Etude du gain

$$|T(ju)| = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (2mu)^2}} \Rightarrow |T(ju)|_{dB} = 20\log K - 10\log\left[(1-u^2)^2 + (2mu)^2\right]$$

Si $u \to 0$, alors $|T(ju)|_{dB} \approx 20\log K$

Si $u = 1$, alors $|T(ju)|_{dB} = 20\log K - 20\log(2m)$

Si $u \to +\infty$, alors $|T(ju)|_{dB} \approx 20\log K - 40\log u$

On remarque que l'asymptote de gain est une droite de pente *-40dB/ décade*

- Si $m > 0.7$, alors la courbe ne présente pas un pic de résonance.

- Si $m < 0.7$, alors la courbe a un pic de résonance en $u = \sqrt{1-2m^2}$. C'est-à-dire, pour $\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$, on appelle cette pulsation la pulsation de résonance. On définit :
  - Le facteur de résonance : $Q = \dfrac{|T(j\omega)|_{\omega=\omega_R}}{|T(j\omega)|_{\omega\to 0}}$, avec $|T|_{\omega_R} = \dfrac{K}{2m\sqrt{1-m^2}}$
  - Le pic de résonance : $M_P = |T_{max}|_{dB} - |T(0)|_{dB}$

Etude de la phase

$$T(ju) = \frac{K}{(1-u^2) + j2mu} \Rightarrow \varphi = arg(T(ju)) = -arctan(\frac{2mu}{1-u^2})$$

Si $u \to 0$, alors $\varphi \to 0$

Si $u = 1$, alors $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

Si $u \to +\infty$, alors $\varphi \to -\pi$

La courbe suivante représente le lieu de Bode pour $m = 0.15$ et $K = 1$.

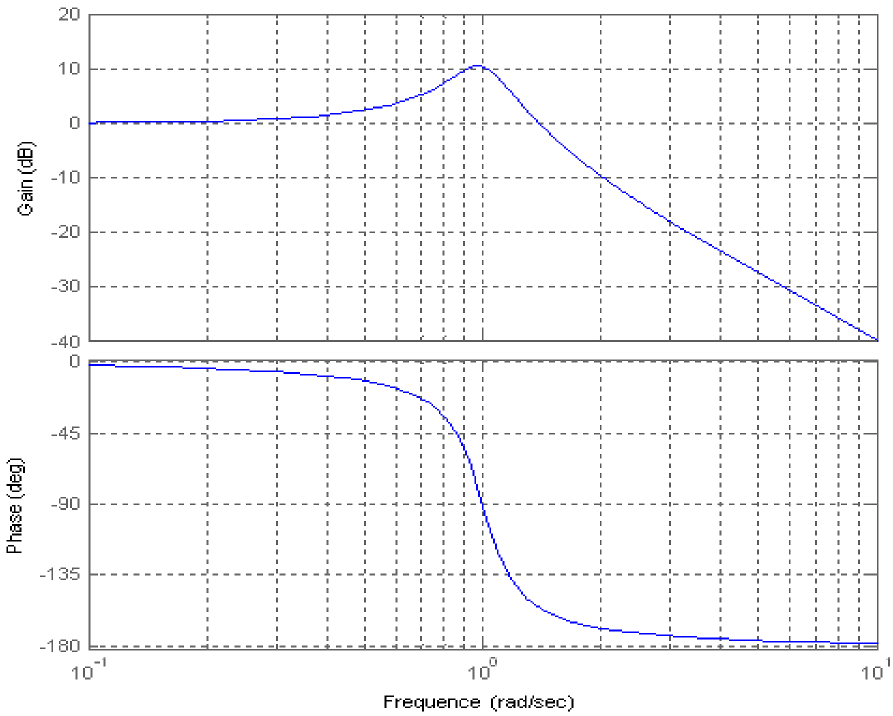


Figure 6.4 *: Lieu de Bode d'un système du second ordre*

3.2 Lieu de Black

Si $\omega \to 0$, alors $|T(j\omega)|_{dB} \approx 20 log K$ et $\varphi \to 0$

Si $\omega = \omega_0$, alors $|T(ju)|_{dB} = 20 log K - 20 log(2m)$ et $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

Si $\omega \to +\infty$, alors $|T(j\omega)|_{dB} \to -\infty$ et $\varphi \to -\pi$

La courbe suivante représente le lieu de Black pour $m = 0.15$ et $K = 1$.

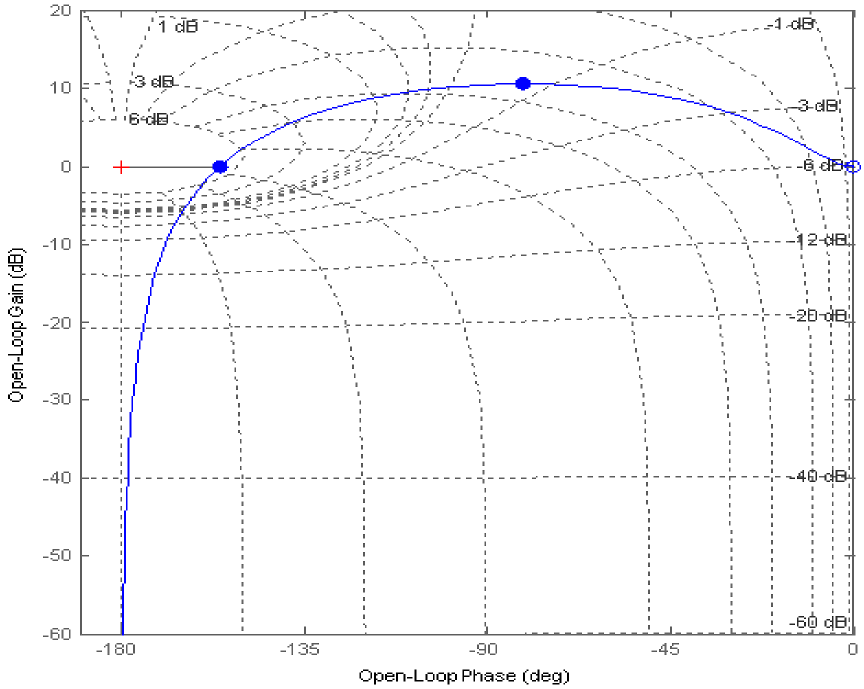


***Figure 6.5** : Lieu de Black d'un système du second ordre*

3.3 Lieu de Nyquist

La courbe suivante représente le lieu de Nyquist pour $m = 0.15$ et $K = 1$.

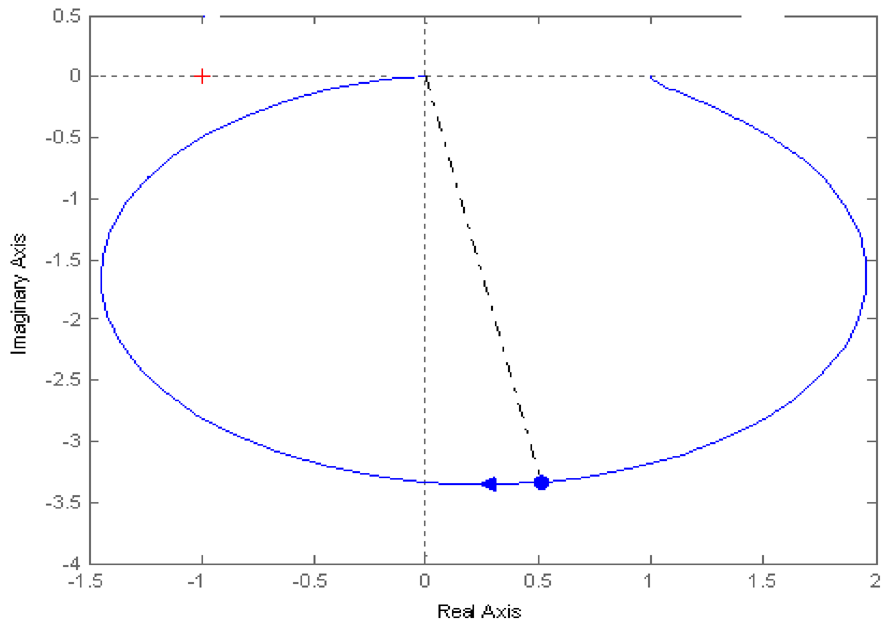


***Figure 5.6** : Lieu de* Nyquist *d'un système du second ordre*

4. Conclusion

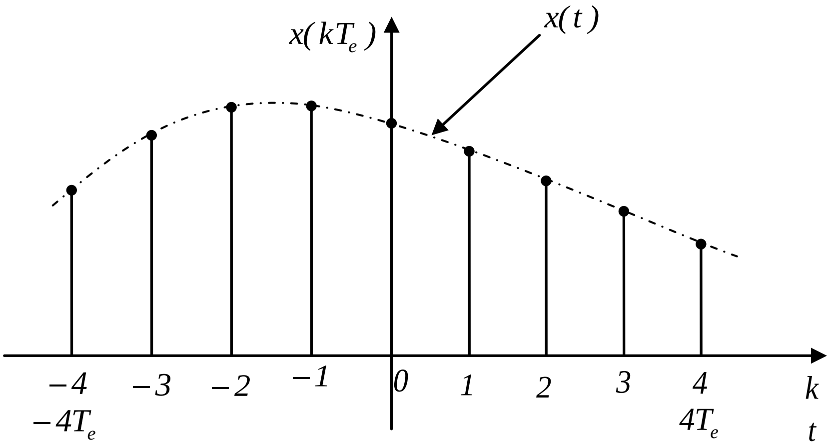
Aussi bien dans la représentation de Bode que celle de Black, le tracé passe par le calcul du gain en dB et du déphasage de $T(j\omega)$. En laissant ce terme factorisé, il sera plus aisé d'étudier le gain et le déphasage de chaque facteur puis de sommer les gains et les déphasages (car l'argument d'un produit est la somme des arguments).

Chapitre 7

Signaux et Systèmes Discrets

1. Introduction

Un signal à temps discret est un signal obtenu par l'expression d'une information à des valeurs ponctuelles du temps $x(t_i)$, il constitue donc une suite numérique. Dans la pratique, les signaux à temps discret sont le plus souvent obtenus par l'opération appelée échantillonnage, qui consiste à prélever sur un signal analogique les valeurs aux instants kT_e, avec T_e période d'échantillonnage et k une variable prenant ses valeurs dans Z.

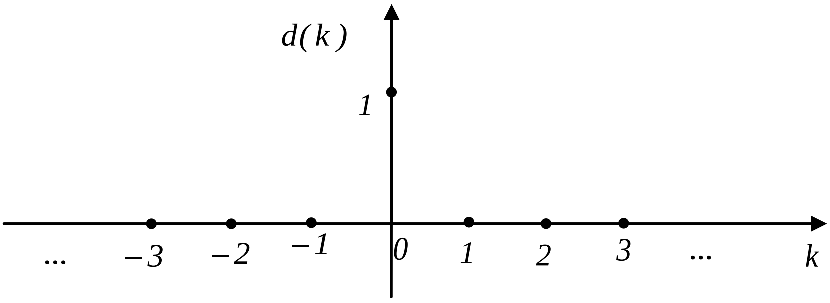


Un signal à temps discret peut aussi être obtenu mathématiquement par la donnée de ses valeurs successives, ou sous forme récurrente.

2. Signaux élémentaires

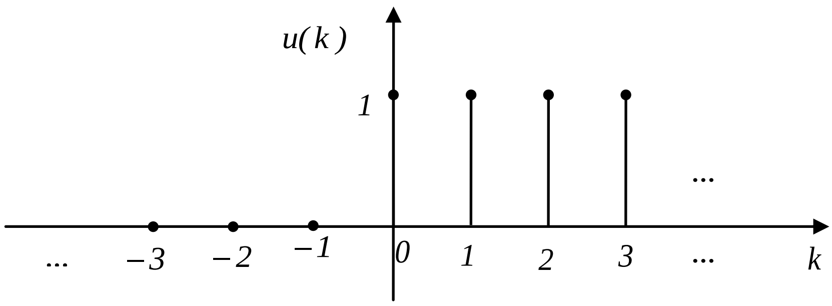
2.1 Echantillon unité

$$d(k) = \begin{cases} 1 & pour \;\; k = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$



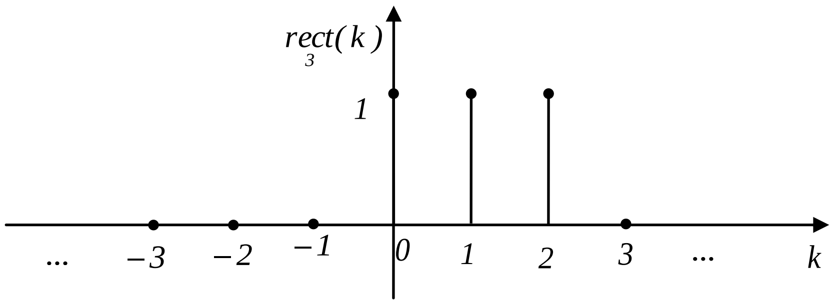
2.2 Echelon unité

$$u(k) = \begin{cases} 1 & pour\ k \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$



2.3 Signal rectangulaire

$$\underset{K}{rect}(k) = \begin{cases} 1 & pour\ 0 \leq k \leq K-1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$



Pour les signaux dont l'amplitude n'est pas constante, nous introduirons la période d'échantillonnage.

2.4 Signal exponentiel

$$x(k) = a^{kT_e} = e^{\alpha k T_e}$$

2.5 Signal sinusoïdal

$$x(k) = sin(2\pi f k T_e) = sin(2\pi k \frac{T_e}{T})$$

$$y(k) = cos(2\pi f k T_e) = cos(2\pi k \frac{T_e}{T})$$

1. Transformée en Z

3.1 Définition

La transformée en z d'un signal causal à temps discret $x(kT_e)$ est donné par

$$X(z) = Z[x(kT_e)] = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT_e) z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k} \text{ avec } z = e^{pT_e}.$$

1.2 Condition d'existence

Le signal $x(kT_e)$ a une transformée en Z s'il existe z tel que la série complexe $X(z)$ soit convergente.

3.3 Transformée en Z des signaux élémentaires

Echantillon unité ou impulsion de Dirac : $\delta(k) = \begin{cases} 1 & pour\, k = 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$

$Z[\delta(k)] = z^{-0} = 1$

Echelon unité : $u(k) = \begin{cases} 1 & pour\, k \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$

$u(k) = \delta(k) + \delta(k-1) + \delta(k-2) + \delta(k-3) + ... + \delta(k-\infty)$

est une série géométrique de raison z^{-1}, d'où

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{z^{-0} - z^{-\infty}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Exemple :

Calculer la transformée en z du signal $x(t)$ échantillonné à la période T_e avec $x(t) = \left(3 + 6t + 8t^2\right)u(t)$, $u(t)$ étant la fonction d'Heaviside (échelon unitaire).

Réponse :

En exploitant la table de transformées en Z, on trouve ;

$$X(z) = \frac{3z}{z-1} + \frac{6T_e z}{(z-1)^2} + \frac{8T_e^2 z(z+1)}{(z-1)^3}.$$

3.4 Propriétés de la transformée en Z

Les propriétés de la transformée en Z sont présentées dans le tableau suivant :

Linéarité	$Z[\alpha\, f(k) + \beta\, g(k)] = \alpha\, Z[f(k)] + \beta\, Z[g(k)]$
Retard	$Z[x(k-k_0)] = z^{-k_0} X(z)$
Avance	$Z[x(k+k_0)] = z^{k_0}\left[X(z) - \sum_{l=0}^{k_0-1} x(l) z^{-l}\right]$
Multiplication par une	$Z[k\, x(k)] = -z\dfrac{dX(z)}{dz}$

rampe	
Translation complexe	$Z\left[e^{-ak}x(k)\right]=X(ze^{-aT_e})$
Sommation	$Z\left[\sum_{k=0}^{N}x(k)\right]=\frac{z}{z-1}X(z)$
Dérivation	$Z\left[\frac{dx}{dt}(kT_e)\right]=\frac{1}{T_e}(1-z^{-1})X(z)$
Théorème de la valeur initiale	$\lim_{k\to 0}\varepsilon(k)=\lim_{z\to\infty}\varepsilon(z)$
Théorème de la valeur finale	$\lim_{k\to\infty}\varepsilon(k)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\varepsilon(z)$

3.5 Transformée en Z inverse

Il y a plusieurs méthodes pour le calcul de la transformée en Z inverse :

$$x(k)=Z^{-1}\left[X(z)\right]$$

- division euclidienne suivant les puissances croissantes en z^{-1}, ou décroissantes en z ;
- décomposition en éléments simples de $\frac{X(z)}{z}$ et exploitation de la table de transformées en Z ;
- utilisation de la méthode des résidus.

Exemple 1 :

Calculer la transformée en Z inverse du signal $F(z)=\frac{z^3-2z^2+2z}{(z-1)^2(z-2)}$.

Réponse :

La décomposition en éléments simples de $\frac{F(z)}{z}$ s'écrit : $\frac{F(z)}{z}=-\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{2}{z-2}$

Alors, $f(k)=(-1-k+2^{k+1})u(k)$

Exemple 2 :

Calculer la transformée en Z inverse du signal $G(z)=\frac{-z+z^2}{2+3z+z^2}$.

Réponse :

On écrit d'abord $G(z)$ comme une fraction rationnelle en z^{-1}, les polynômes ordonné selon les puissances croissantes de z^{-1} : $G(z^{-1})=\frac{1-z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$

Ensuite on effectue la division selon les puissances croissantes de z^{-1} :

$$
\begin{array}{l|l}
\;1 - z^{-1} & 1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} \\
\cline{2-2}
- \; 1 + 3z^{-1} + 2z^{-2} & 1 - 4z^{-1} + 10z^{-2} - 22z^{-3} \ldots \\
\cline{1-1}
\; -4z^{-1} - 2z^{-2} & \\
- \; -4z^{-1} - 12z^{-2} - 8z^{-3} & \\
\cline{1-1}
\; 10z^{-2} + 8z^{-3} & \\
- \; 10z^{-2} - 30z^{-3} + 20z^{-4} & \\
\cline{1-1}
\; -22z^{-3} - 20z^{-4} & \\
- \; -22z^{-3} - 66z^{-4} - 44z^{-5} & \\
\cline{1-1}
\; 46z^{-4} + 44z^{-5} & \\
\; \ldots &
\end{array}
$$

On en déduit que : $g(k) = \delta(k) - 4\delta(k-1) + 10\delta(k-2) - 22\delta(k-3) \ldots$

3.6 Transmittance échantillonnée

Considérons le système à temps discret, linéaire, causal et invariant dans le temps suivant :

$$e(k) \longrightarrow \boxed{\textit{Système}} \longrightarrow s(k)$$

$$E(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow S(z)$$

On appelle transmittance échantillonnée du système le rapport $H(z) = \dfrac{S(z)}{E(z)}$.